

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik =
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 22 (1924)

Heft: 12

Artikel: Herleitung von Fehlerformeln auf Grund einer Figur [Schluss]

Autor: Werkmeister, P.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-188551>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SCHWEIZERISCHE Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik

ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS

REVUE TECHNIQUE SUISSE DES MENSURATIONS ET AMÉLIORATIONS FONCIÈRES

ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Redaktion: F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständiger Mitarbeiter für Kulturtechnik: H. FLUCK, Dipl. Kulturingenieur, Neuchâtel, 9, Passage Pierre qui roule. — Collaborateur attiré pour la partie en langue française: CH. ROESGEN, ingénieur-géomètre, Genève, 11, rue de l'Hôtel-de-Ville — Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats.

□ Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme: □
BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORM. G. BINKERT, WINTERTHUR

Jährlich 12 Nummern
(erscheinend am zweiten Dienstag
jeden Monats)
und 12 Inseraten-Bulletins
(erscheinend am vierten Dienstag
jeden Monats)

No. 12
des **XXII. Jahrganges** der
„Schweiz. Geometerzeitung“.
9. Dezember 1924

Jahresabonnement Fr. 12.—
(unentgeltlich für Mitglieder)

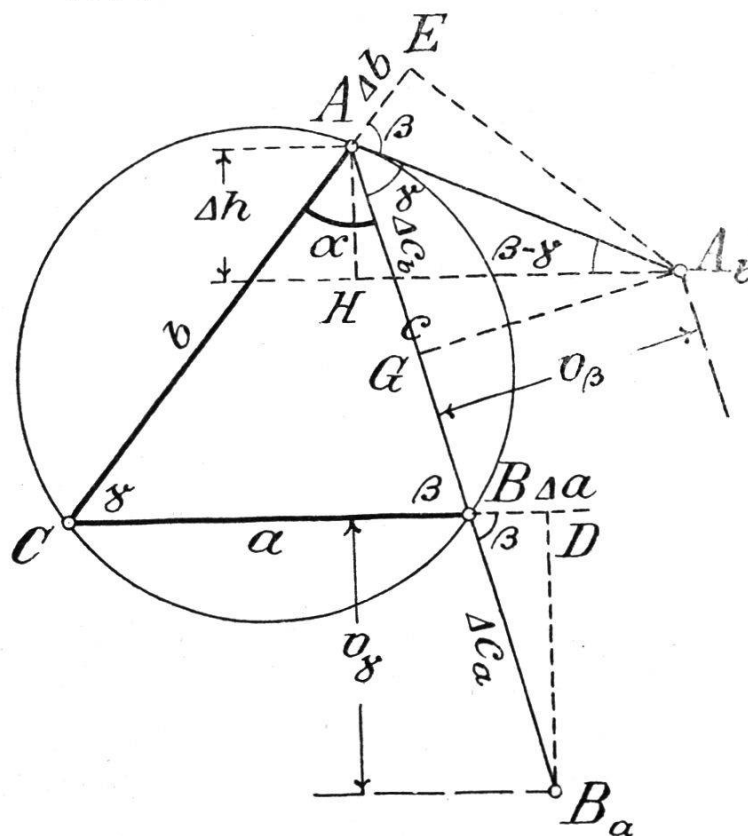
Inserate:
50 Cts. per 1spaltige Nonp.-Zeile

Herleitung von Fehlerformeln auf Grund einer Figur.

Von Dr.-Ing. P. Werkmeister, Eßlingen a. N.

(Schluß.)

b) Gegeben ein Fehler Δb von b ; gesucht die durch Δb an c , β , γ und F verursachten Fehler Δc_b , $\Delta \beta_b$, $\Delta \gamma_b$ und ΔF_b .



Figur 6.

Zeichnet man von dem Dreieck ABC (Figur 6) ausgehend ein neues Dreieck $A_b B C$ mit den Seiten a und $b + \Delta b$ und dem Winkel α , so erhält man die Ecke A_b als Schnittpunkt des Umkreises vom Dreieck ABC mit dem Kreis um C mit Halbmesser $CE = b + \Delta b$, wobei man an Stelle der beiden Kreise die betreffenden Tan-

genten treten lassen darf. Beschreibt man noch um B den Kreis durch A_b als Lot von A_b auf $A B$, so ergibt sich das Fehler-
viereck $A E A_b G$, in dem $A G = \Delta c_b$ und $A_b G = v_\beta = \frac{\Delta \beta b}{\rho} c$ ist. Damit erhält man — unter Beachtung der Abnahme
von c — die Fehlerformeln

$$\Delta c_b = - \frac{\cos \gamma}{\cos \beta} \Delta b$$

$$\text{und } v_\beta = \frac{\sin \gamma}{\cos \beta} \Delta b, \text{ und damit}$$

$$\Delta \beta b = \frac{\sin \gamma}{c \cos \beta} \rho \Delta b \text{ oder mit } \frac{\sin \gamma}{c} = \frac{\sin \beta}{b}$$

$$\Delta \beta b = \frac{\operatorname{tg} \beta}{b} \rho \Delta b.$$

Da α sich nicht verändert hat, und β um $\Delta \beta b$ größer wurde, so hat γ um $\Delta \gamma b$ abgenommen; es ist somit

$$\Delta \gamma b = - \frac{\operatorname{tg} \beta}{b} \rho \Delta b.$$

Die beiden Dreiecke $A B C$ und $A_b B C$ haben die Grundlinie a gemeinsam; ihre Höhen unterscheiden sich um Δh ; der Flächenfehler ΔF_b ist daher gleich $\frac{1}{2} a \Delta h$. Auf Grund der beiden rechtwinkligen Dreiecke $A E A_b$ und $A A_b H$, wobei $A_b H$ parallel $B C$ ist, erhält man für Δh den Wert

$$\Delta h = \frac{\sin (\beta - \gamma)}{\cos \beta} \Delta b;$$

damit findet man

$$\Delta F_b = \frac{1}{2} a \frac{\sin (\beta - \gamma)}{\cos \beta} \Delta b.$$

c) Gegeben ein Fehler $\Delta \alpha$ von α ; gesucht die durch $\Delta \alpha$ an c , β , γ und F verursachten Fehler Δc_α , $\Delta \beta_\alpha$, $\Delta \gamma_\alpha$ und ΔF_α .

Ist $A B C$ das den Stücken a , b und α entsprechende Dreieck (Figur 7), so hat man ein neues Dreieck $A B_\alpha C$ zu zeichnen mit den Stücken a , b und $\alpha + \Delta \alpha$. Die Ecke B_α dieses neuen Dreiecks erhält man als Schnitt der dem Kreis um C durch B entsprechenden Senkrechten zu $B C$ in B mit der Parallelen

Aus den beiden rechtwinkligen Fehlerdreiecken $B_\alpha B D$ und $B B_\alpha E$ liest man dann ab

$$v_\beta = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} v_\alpha;$$

damit und mit $v_\alpha = \frac{\Delta \alpha}{\rho} c$ erhält man

$$\Delta \beta_\alpha = \frac{b \cos \alpha}{a \cos \beta} \Delta \alpha \text{ oder mit } \frac{b}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\Delta \beta_\alpha = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \Delta \alpha.$$

Der Zunahme von α um $\Delta \alpha$ entspricht eine Zunahme von β um $\Delta \beta_\alpha$ und eine Abnahme von γ um $\Delta \gamma_\alpha$; es muß somit $\Delta \gamma_\alpha - \Delta \beta_\alpha = \Delta \alpha$ sein. Auf Grund der gefundenen Werte findet man zur Probe

$$\begin{aligned} \frac{c}{a \cos \beta} \Delta \alpha - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} \Delta \alpha &= \left\{ \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha \cos \beta} - \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta} \right\} \Delta \alpha \\ &= \frac{\sin (\alpha + \beta) - \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta} \Delta \alpha = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \cos \beta} \Delta \alpha = \Delta \alpha. \end{aligned}$$

Betrachtet man b als gemeinsame Grundlinie der beiden Dreiecke $A B C$ und $A B_\alpha C$, so unterscheiden sich die beiden Höhen um Δh , so daß $\Delta F_\alpha = \frac{1}{2} b \Delta h$. Mit Hilfe der beiden rechtwinkligen Dreiecke $B_\alpha B D$ und $B_\alpha B G$, wobei in dem letzteren $B G$ parallel $A C$ ist, findet man für Δh den Wert

$$\Delta h = \frac{\cos \gamma}{\cos \beta} v_\alpha \text{ oder mit } v_\alpha = \frac{\Delta \alpha}{\rho} c$$

$$\Delta h = c \frac{\cos \gamma}{\cos \beta} \frac{\Delta \alpha}{\rho}.$$

Damit ergibt sich für ΔF_α die Fehlerformel

$$\Delta F_\alpha = \frac{1}{2} b c \frac{\cos \gamma}{\cos \beta} \frac{\Delta \alpha}{\rho}.$$

4. Gegeben die Seiten a , b und c .

a) Gegeben ein Fehler Δa von a ; gesucht die ihm entsprechenden Fehler $\Delta \alpha_a$, $\Delta \beta_a$, $\Delta \gamma_a$ und ΔF_a von α , β , γ und F .

Läßt man bei dem Dreieck $A B C$ (Figur 8) nur die Seite a um Δa zunehmen, so erhält man ein neues Dreieck $A B_a C$,

$$\Delta \beta_a = - \frac{b \cos \gamma}{a c \sin \beta} \rho \Delta a \text{ oder mit } c \sin \beta = b \sin \gamma$$

$$\Delta \beta_a = - \frac{\Delta a}{a \operatorname{tg} \gamma} \rho.$$

Da einer Zunahme von a um Δa eine Zunahme von α um $\Delta \alpha_a$, eine Abnahme von β um $\Delta \beta_a$ und eine Abnahme von γ um $\Delta \gamma_a$ entspricht, so muß $\Delta \beta_a + \Delta \gamma_a = \Delta \alpha_a$ sein. Mit den oben gefundenen Werten für $\Delta \beta_a$ und $\Delta \gamma_a$ erhält man

$$\begin{aligned} \Delta \beta_a + \Delta \gamma_a &= \left\{ \frac{1}{a \operatorname{tg} \gamma} + \frac{1}{a \operatorname{tg} \beta} \right\} \Delta a \rho = \frac{\Delta a \sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma \rho}{a \sin \beta \sin \gamma} \\ &= \frac{\Delta a \sin (\beta + \gamma)}{a \sin \beta \sin \gamma} \rho = \frac{\Delta a \sin \alpha}{a \sin \beta \sin \gamma} \rho = \frac{\Delta a}{b \sin \gamma} \rho \\ &= \frac{\Delta a}{c \sin \vartheta} \rho = \Delta \alpha_a. \end{aligned}$$

Um die Formel für den durch Δa verursachten Flächenfehler ΔF_a zu finden, kann man bei den beiden Dreiecken ABC und AB_aC die Seite $AC = b$ als gemeinsame Grundlinie betrachten; zieht man B_aG parallel zu AC , so ist der Unterschied der beiden zugehörigen Höhen $BG = \Delta h$, und man hat $\Delta F_a = \frac{1}{2} b \Delta h$. Auf Grund der beiden rechtwinkligen Dreiecke BB_aD und BB_aG findet man für Δh den

Ausdruck $\Delta h = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \Delta a$; damit wird

$$\begin{aligned} \Delta F_a &= \frac{1}{2} b \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \Delta a \text{ oder mit } \frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha} \\ \Delta F_a &= \frac{1}{2} a \operatorname{ctg} \alpha \Delta a. \end{aligned}$$

b) Gegeben ein Fehler Δb von b ; gesucht die ihm entsprechenden Fehler $\Delta \alpha_b$, $\Delta \beta_b$, $\Delta \gamma_b$ und ΔF_b von α , β , γ und F .

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich unmittelbar

$$\begin{aligned} \Delta \alpha_b &= - \frac{\Delta b}{b \operatorname{tg} \gamma} \rho & \Delta \beta_b &= \frac{\Delta b}{a \sin \gamma} \rho & \Delta \gamma_b &= - \frac{\Delta b}{b \operatorname{tg} \alpha} \rho \\ \text{und } \Delta F_b &= \frac{1}{2} b \operatorname{ctg} \beta \Delta h. \end{aligned}$$

c) Gegeben ein Fehler Δc von c ; gesucht die ihm entsprechenden Fehler $\Delta \alpha_c$, $\Delta \beta_c$, $\Delta \gamma_c$ und ΔF_c von α , β , γ und F . Man erhält

$$\Delta \alpha_c = -\frac{\Delta c}{c \operatorname{tg} \beta} \rho \quad \Delta \beta_c = -\frac{\Delta c}{c \operatorname{tg} \alpha} \rho \quad \Delta \gamma_c = \frac{\Delta c}{b \sin \alpha} \rho$$

und $\Delta F_c = \frac{1}{2} c \operatorname{ctg} \gamma \Delta c.$

Schreibt man die drei für die Flächenfehler gefundenen Formeln so

$$\Delta F_a = \frac{1}{2} \frac{a}{\sin \alpha} \cos \alpha \Delta a \quad \Delta F_b = \frac{1}{2} \frac{b}{\sin \beta} \cos \beta \Delta b$$

$$\Delta F_c = \frac{1}{2} \frac{c}{\sin \gamma} \cos \gamma \Delta c$$

und beachtet man, daß $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2 R$, wo R der Halbmesser des Umkreises ist, so erhält man die Flächenfehlerformeln

$$\Delta F_a = R \cos \alpha \Delta a \quad \Delta F_b = R \cos \beta \Delta b \quad \Delta F_c = R \cos \gamma \Delta c.$$

B. Fehlerformeln für Aufgaben der Punktbestimmung im Koordinatensystem.

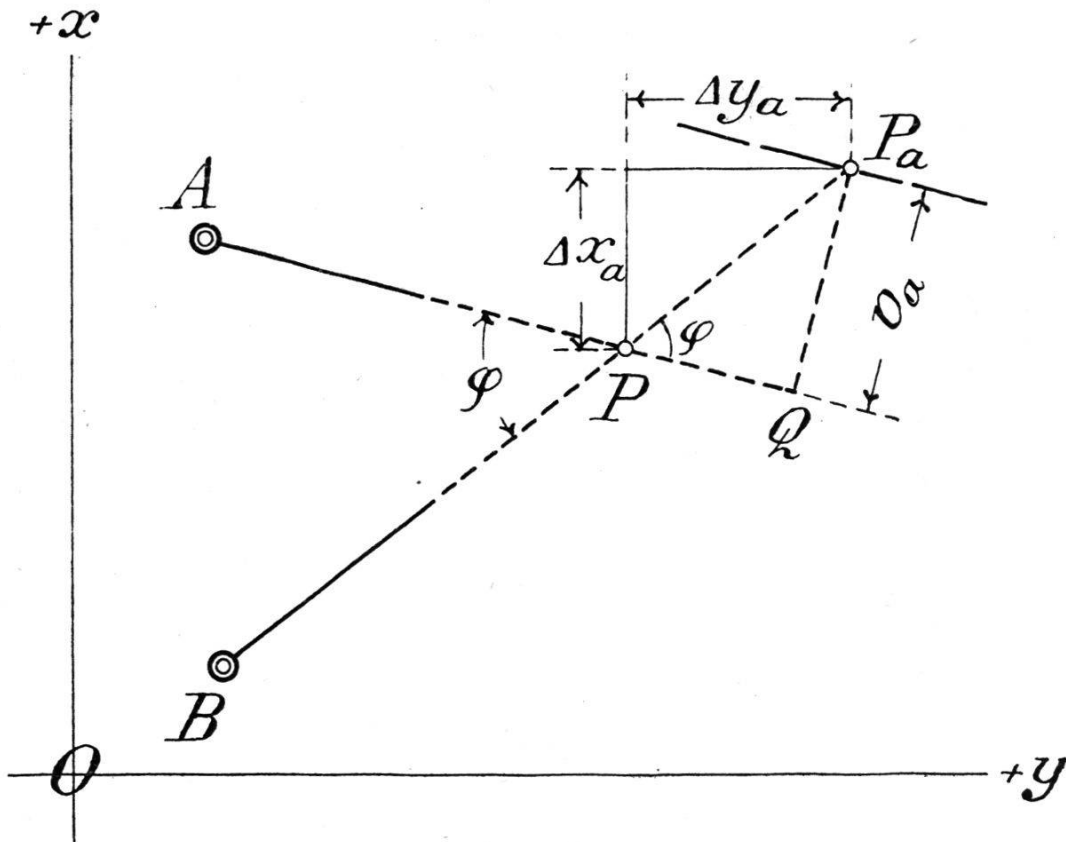
1. Gegeben zwei Festpunkte A und B (Figur 9); zur Festlegung eines Neupunktes P wurden die Strecken $AP = a$ und $BP = b$ gemessen.

a) Gegeben ein Fehler Δa von a ; gesucht die ihm entsprechenden Fehler Δx_a und Δy_a der Koordinaten x und y von P.

Die gesuchten Fehler Δx_a und Δy_a sind die Koordinatenunterschiede zwischen dem Punkt P und einem Punkt P_a , der von A die Entfernung $a \pm \Delta a$ und von B die Entfernung b hat; man erhält demnach P_a als Schnittpunkt der beiden Kreise um A und B mit den Halbmessern $a \pm \Delta a$ und b . Beachtet man die in der Einleitung angegebenen Näherungen, so hat man AP um $PQ = \Delta a$ z. B. zu verlängern⁷; man erhält dann P_a als Schnittpunkt der Senkrechten zu AP in Q mit der Senkrechten zu BP in P. Bezeichnet man den Winkel APB mit φ ,

⁷ Von den Vorzeichen der Fehler wird im folgenden abgesehen.

a) Gegeben ein Fehler $\Delta (A P)$ von $(A P)$; gesucht die ihm entsprechenden Fehler Δx_a und Δy_a der Koordinaten x und y von P .



Figur 10.

Bestimmt man einen neuen Punkt P_a derart, daß $(A P_a) = (A P) \pm \Delta (A P)$ und $(B P_a) = (B P)$, so hat man die Gerade $A P$ um den kleinen Winkel $\Delta (A P)$ zu drehen oder sie in der Nähe von P parallel zu verschieben um $v_a = \frac{\Delta (A P)}{\rho} \overline{A P}$; die so sich ergebende Parallele schneidet dann $B P$ in P_a . Bezeichnet man den Winkel $A P B$ mit φ , so findet man mit Hilfe des rechtwinkligen Dreiecks $P P_a Q$ für $\overline{P P_a}$ den Wert

$$\overline{P P_a} = \frac{v_a}{\sin \varphi} \text{ oder } \overline{P P_a} = \frac{\overline{A P}}{\sin \varphi} \frac{\Delta (A P)}{\rho}.$$

Damit ergibt die Figur

$$\Delta x_a = \overline{P P_a} \cos (B P) \text{ und } \Delta y_a = \overline{P P_a} \sin (B P)$$

$$\text{oder } \Delta x_a = \frac{\overline{A P} \cos (B P) \Delta (A P)}{\sin \varphi \rho} \text{ und}$$

$$\Delta y_a = \frac{\overline{A P} \sin (B P) \Delta (A P)}{\sin \varphi \rho}.$$

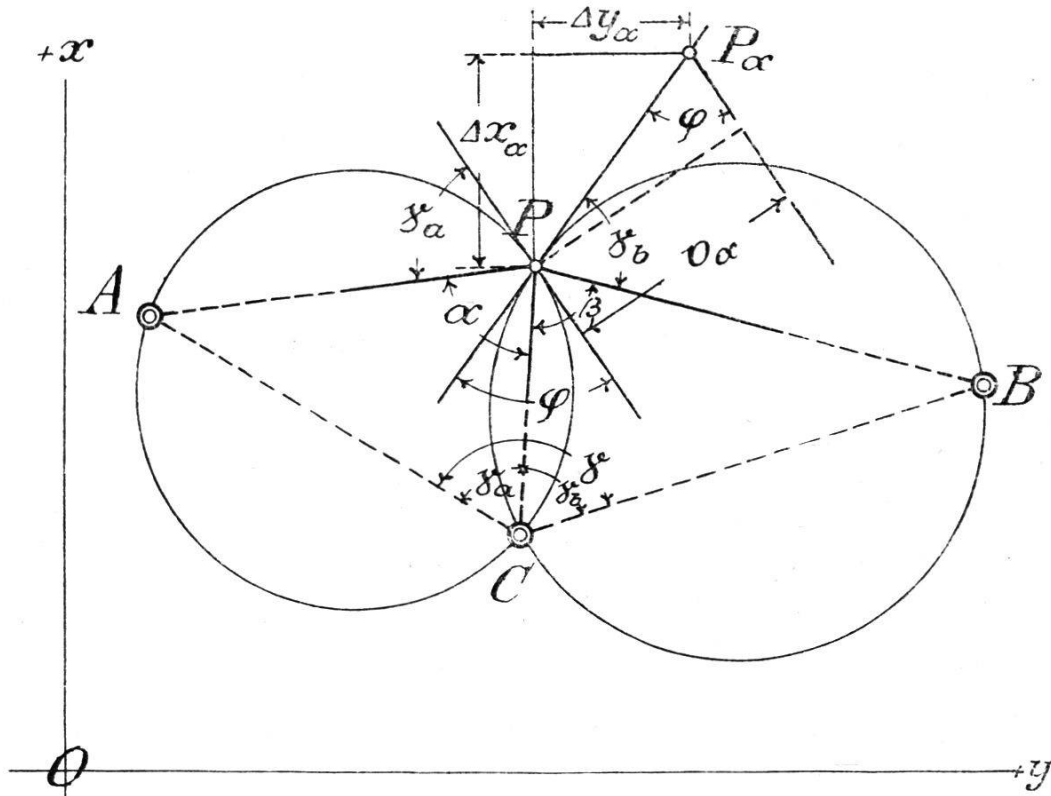
b) Gegeben ein Fehler $\Delta(BP)$ von (BP) ; gesucht die ihm entsprechenden Fehler Δx_b und Δy_b von x und y .

Aus dem Vorhergehenden folgt

$$\Delta x_b = \frac{\overline{BP} \cos(AP) \Delta(BP)}{\sin \varphi \rho} \text{ und}$$

$$\Delta y_b = \frac{\overline{BP} \sin(AP) \Delta(BP)}{\sin \varphi \rho}.$$

3. Gegeben die drei Festpunkte A , B und C (Figur 11); zur Festlegung eines Neupunktes P wurden die beiden Winkel $APC = \alpha$ und $BPC = \beta$ gemessen (Aufgabe des Rückwärts-einschneidens).



Figur 11.

a) Gegeben ein Fehler $\Delta \alpha$ von α ; gesucht die ihm entsprechenden Fehler Δx_α und Δy_α der Koordinaten x und y von P .

Der Punkt P ist geometrisch bestimmt als Schnittpunkt der beiden Kreise über AC und BC mit α und β als Peripheriewinkel; einen den Winkeln $\alpha \pm \Delta \alpha$ und β entsprechenden Punkt P_α erhält man als Schnitt der Tangente in P an den β -Kreis mit der um $v_\alpha = \frac{\Delta \alpha \overline{PA} \times \overline{PC}}{\overline{AC}}$ parallel verschobenen

Tangente in P an den α -Kreis. Bezeichnet man den Winkel zwischen den beiden Tangenten in P mit φ , so ist $\overline{P P_\alpha} = \frac{v_\alpha}{\sin \varphi}$

oder $\overline{P P_\alpha} = \frac{\Delta \alpha}{\rho} \frac{\overline{P A} \times \overline{P C}}{\overline{A C} \sin \varphi}$; dabei ist — wenn der Winkel

A C B mit γ bezeichnet wird — $\varphi = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)$, so daß man schreiben kann

$$\overline{P P_\alpha} = \frac{\Delta \alpha}{\rho} \frac{\overline{P A} \times \overline{P C}}{\overline{A C} \sin (\alpha + \beta + \gamma)}.$$

Beachtet man, daß $(P P_\alpha) = (P B) - \gamma_b$, wenn γ_b der Winkel B C P ist, so findet man an Hand der Figur die Fehlerformeln⁸

$$\Delta x_\alpha = \overline{P P_\alpha} \cos \{(P B) - \gamma_b\} \text{ und } \Delta y_\alpha = \overline{P P_\alpha} \sin \{(P B) - \gamma_b\}$$

$$\text{oder } \Delta x_\alpha = \frac{\Delta \alpha}{\rho} \frac{\overline{P A} \times \overline{P C}}{\overline{A C} \sin (\alpha + \beta + \gamma)} \cos \{(P B) - \gamma_b\} \text{ und}$$

$$\Delta y_\alpha = \frac{\Delta \alpha}{\rho} \frac{\overline{P A} \times \overline{P C}}{\overline{A C} \sin (\alpha + \beta + \gamma)} \sin \{(P B) - \gamma_b\}.$$

b) Gegeben ein Fehler $\Delta \beta$ von β ; gesucht die ihm entsprechenden Fehler Δx_β und Δy_β von x und y.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich

$$\Delta x_\beta = \frac{\Delta \beta}{\rho} \frac{\overline{P B} \times \overline{P C}}{\overline{B C} \sin (\alpha + \beta + \gamma)} \cos \{(P A) + \gamma_a\} \text{ und}$$

$$\Delta y_\beta = \frac{\Delta \beta}{\rho} \frac{\overline{P B} \times \overline{P C}}{\overline{B C} \sin (\alpha + \beta + \gamma)} \sin \{(P A) + \gamma_a\}.$$

4. Gegeben die zwei Festpunkte A und B (Figur 12); zur Festlegung eines Neupunktes P wurde der Winkel A P B = φ unmittelbar und der Richtungswinkel (A P) mittelbar gemessen (Aufgabe des Seitwärtseinschneidens).

a) Gegeben ein Fehler $\Delta \varphi$ von φ ; gesucht die ihm entsprechenden Fehler Δx_φ und Δy_φ der Koordinaten x und y von P.

⁸ Die hier angegebenen Fehlerformeln für das Rückwärtseinschneiden gelten nur für die in der Figur 11 angenommene Lage der Festpunkte A, B und C zu dem Neupunkt P.

Die gesuchten Fehler Δx_a und Δy_a sind gleich den Koordinatenunterschieden des Punktes P und eines Punktes P_a ; dieser Punkt P_a ist der Schnittpunkt der Tangente in P an den Umkreis des Dreiecks P A B mit der um $v_a = \frac{\Delta(A P)}{\rho} \overline{A P}$ parallel verschobenen Geraden A P. Für Δx_a und Δy_a liest man aus der Figur ab

$$\Delta x_a = \overline{P P_a} \cos (P P_a) \text{ und } \Delta y_a = \overline{P P_a} \sin (P P_a).$$

Beachtet man, daß $\overline{P P_a} = \frac{v_a}{\sin \beta} = \frac{\Delta(A P)}{\rho} \frac{\overline{A P}}{\sin \beta}$ und $(P P_a) = (P A) + \beta$, so erhält man ⁹

⁹ Die Formeln gelten nur für die in der Figur 12 gewählte Lage der beiden Festpunkte A und B zum Neupunkt P.

$$\Delta x_a = \frac{\Delta(A P)}{\rho} \frac{\overline{A P}}{\sin \beta} \cos \{(P A) + \beta\} \text{ und}$$

$$\Delta y_a = \frac{\Delta(A P)}{\rho} \frac{\overline{A P}}{\sin \beta} \sin \{(P A) + \beta\}.$$

In den im vorstehenden für einige Aufgaben der Punktbestimmung hergeleiteten Fehlerformeln kommen außer unmittelbar gegebenen Größen auch nicht gegebene Größen vor; da man die Werte dieser Größen für die Berechnung der gesuchten Fehler nicht sehr genau braucht, so genügt es, wenn man sie in einer maßstäblich gezeichneten Figur abmißt. Die zahlenmäßige Berechnung der mittleren Fehler auf Grund einer der gefundenen Fehlerformeln kann man genügend genau mit dem Rechenschieber ausführen.

La triangulation du globe par la TSF.

La détermination d'un point à la surface du globe comporte trois opérations: détermination astronomique de la latitude; détermination astronomique de l'heure locale; comparaison de celle-ci avec l'heure locale d'un point connu ou choisi pour origine. Cette méthode est en quelque sorte absolue, puisqu'elle ne nécessite d'autre définition que celle d'une origine. Elle sera donc la base sur laquelle sera établi le canevas qui déterminera de proche en proche tous les points caractéristiques.