

Du choix d'un système de projection [suite]

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **23 (1925)**

Heft 8

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-189041>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SCHWEIZERISCHE Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik

ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS

REVUE TECHNIQUE SUISSE DES MENSURATIONS ET AMÉLIORATIONS FONCIÈRES

ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Redaktion: F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständiger Mitarbeiter für Kulturtechnik: H. FLUCK, Dipl. Kulturingenieur, Neuchâtel, 9, Passage Pierre qui roule. — Collaborateur attiré pour la partie en langue française: CH. ROESGEN, ingénieur-géomètre, Genève, 11, rue de l'Hôtel-de-Ville — Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats.

□ Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme: □
BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORM. G. BINKERT, WINTERTHUR

Jährlich 12 Nummern
(erscheinend am zweiten Dienstag
jeden Monats)
und 12 Inseraten-Bulletins
(erscheinend am vierten Dienstag
jeden Monats)

No. 8
des **XXIII. Jahrganges** der
„Schweiz. Geometerzeitung“.
11. August 1925

Jahresabonnement Fr. 12.—
(unentgeltlich für Mitglieder)
Ausland Fr. 15.—

Inserate:
50 Cts. per 1spaltige Nonp.-Zeile

Du choix d'un système de projection.

(Suite.)

Soient toujours x et y les coordonnées topographiques, φ et λ les coordonnées géographiques, l'indice zéro se rapportant à l'origine. Les séries

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \Delta\varphi + \frac{1}{4} \lambda^2 \sin 2\varphi_0 + c_1 \Delta\varphi^{-3} + c_2 \Delta\varphi^{-2} \cdot \lambda + c_3 \Delta\varphi \cdot \lambda^2 \\ \quad + c_4 \lambda^3 + \dots \\ y = \lambda \cos \varphi_0 - \lambda \cdot \Delta\varphi \cdot \sin \varphi_0 + c_5 \Delta\varphi^{-3} + c_6 \cdot \Delta\varphi^{-2} \cdot \lambda \\ \quad + c_7 \Delta\varphi \cdot \lambda^2 + c_8 \lambda^3 + \dots \end{array} \right.$$

où $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$

définissent des projections exemptes de toutes déformations de 1^{er} ordre; la condition ci-dessus énoncée est nécessaire et suffisante.

Si l'on annule les 8 coefficients indéterminés la projection est dite « plane » (Ebene Projektion; Frischauf, Beiträge..., p. 113—117); cette projection présente peu d'intérêt pour la géodésie, car elle comporte en général des déformations angulaires de 2^e ordre; en revanche les 4 coefficients $c_2 c_4 c_5 c_7$ sont presque toujours nuls à cause de la symétrie par rapport au méridien central. Il reste encore 4 coefficients $c_1 c_3 c_6 c_8$ à déterminer.

Calcul des coefficients $c_1 c_3 c_6 c_8$.

Pour calculer ou éliminer ces 4 coefficients il suffit de poser des conditions (équivalence, conformité, etc.).

La condition d'équivalence se traduit par l'équation :

$$\pm \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = \cos \varphi$$

la conformité par :

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0.$$

Cette dernière condition n'est pas toujours suffisante; il faut faire intervenir *l'indicatrice* (Tissot A., Mémoire sur la représentation des surfaces); soient a et b les demi-axes de l'indicatrice (figure 7) et $r = 1$ le rayon du petit cercle dont l'indicatrice est la projection; les déformations suivant le méridien et le parallèle sont exprimés par :

$$h = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad k = \frac{1}{\cos \varphi} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

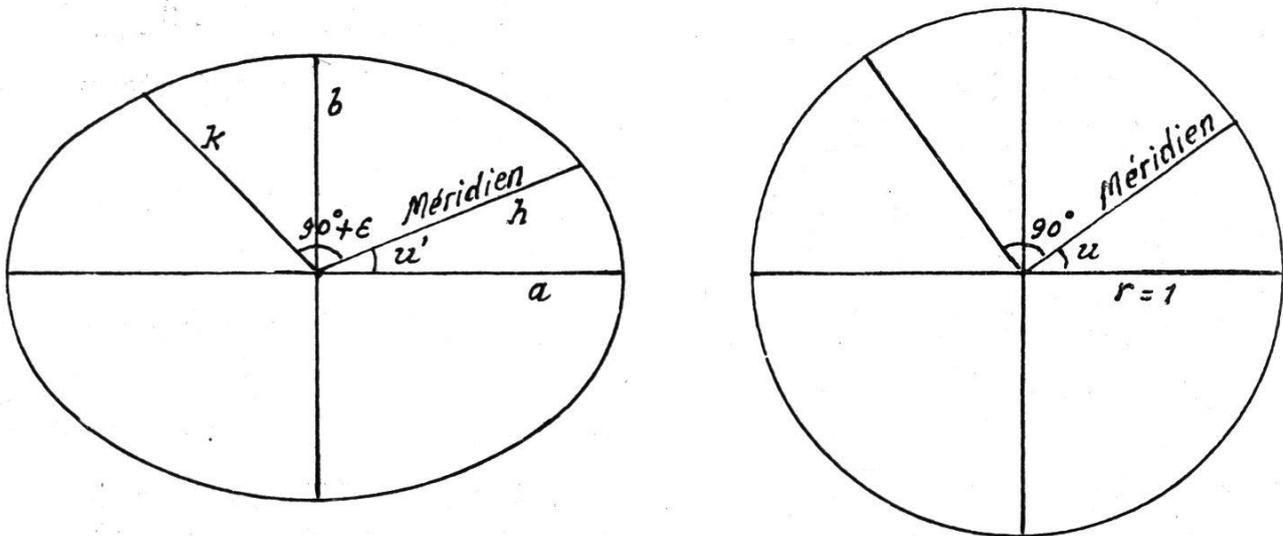


Figure 7.

h et k sont conjugués harmoniques et diffèrent de l'unité, ainsi que a et b de petites quantités de 2^e ordre.

$a = b$ caractérise la conformité et $a b = 1$ l'équivalence. Les déformations angulaires ε et $(u - u')$ sont du même ordre que les différences $(h - k)$ ou $(a - b)$. Peut-on éliminer les termes de 3^e ordre dans ces différences ? Ce côté du problème présente un intérêt capital. On voit de suite qu'une *projection équivalente ne sera jamais exempte de déformations angulaires de 2^e ordre*. C'est là le point faible des projections équivalentes et notam-

ment de la projection Bonne qui est équivalente aux termes du 4^e ordre près.

Revenons aux conditions de conformité:

$$\begin{cases} h = k = a = b = m \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

L'application de ces conditions aux séries exprimant x et y permet d'éliminer 3 des coefficients sur les quatre $c_1 c_3 c_6 c_8$. Il vient alors en substituant (x, y) à (φ, λ) et en introduisant deux nouveaux coefficients α, β

$$m = 1 + \alpha x^2 + \beta y^2 + \dots$$

où le rayon terrestre $R = 1$ et où les coefficients sont liés par la relation fondamentale: $\alpha + \beta = 1/2$. La donnée d'un des coefficients α ou β résoud complètement le problème, car il sera possible alors de calculer le 4^e des coefficients $c_1 c_3 c_6 c_8$ non encore déterminé. La même étude peut se poursuivre pour les termes de 4^e ordre.

La condition $m = \text{constante}$ définit un faisceau d'ellipses circonscrites à un carré (figure 3). Pour la Suisse la plus petite ellipse circonscrite à la périphérie a pour équation:

$$m = 1 + 0,37 x^2 + 0,13 y^2 + \dots = 1,000 11$$

$$\log m = 0,000 048$$

La projection définie par cette équation n'est pas interprétable géométriquement; elle est dite « analytique ». C'est une projection intermédiaire entre la stéréographique et la conique.

Le tracé de l'ellipse et en même temps la détermination de l'origine (pour la Suisse: Meiringen) s'effectueront aisément par voie photographique (schéma figure 8). Le cercle C tracé sur un écran admet comme image une ellipse E que l'on s'efforce de faire passer par les points extrêmes de la périphérie du pays. Pour la Suisse ce procédé réussit bien. Les points dangereux sont Chiasso, la pointe S—O du canton de Genève, Oberbargen (Schaffhouse), et Campo-Cologno (et non le Piz Chavalatsch, comme on pourrait le présumer).

La déformation maximum de 11 centimètres par kilomètres est-elle compatible avec les exigences de la géodésie moderne? F.-G. Gauss dans son ouvrage classique (Die trigonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst, p. 571) admet un maxi-

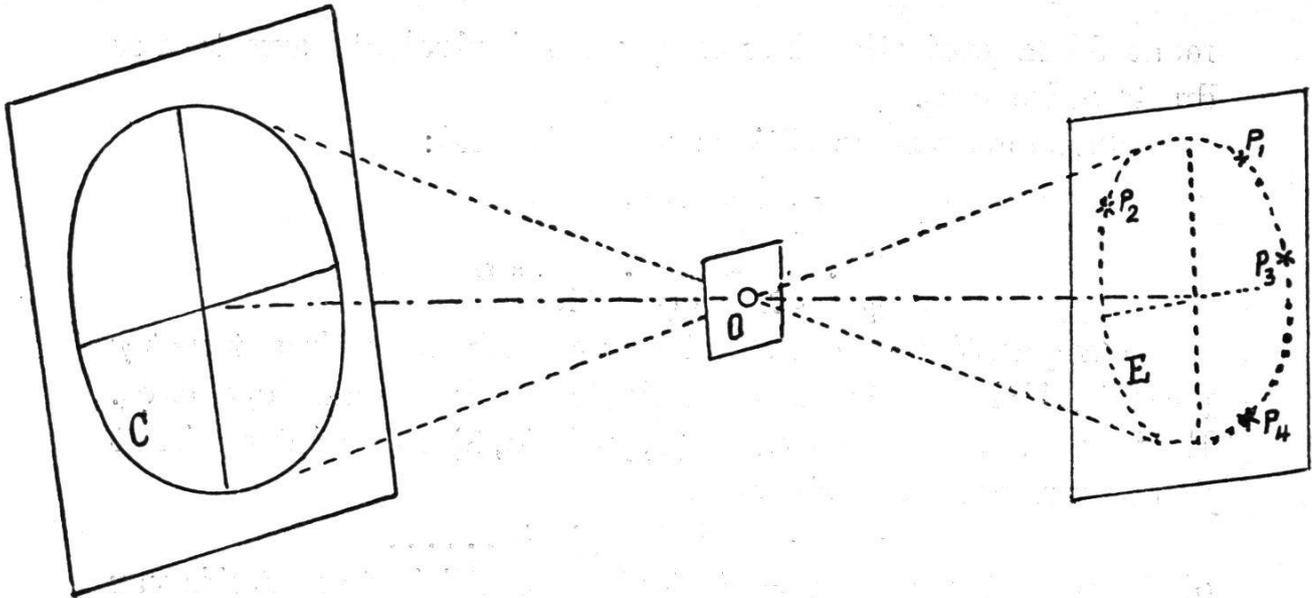


Figure 8.

mun de 5 centimètres par kilomètres, soit 64 kilomètre entre l'origine et la périphérie du pays si l'on veut un seul système de coordonnées. Cela paraît excessif.

H. Roussilhe dans un ouvrage récent (Astronomie appliquée et Géodésie, Paris 1924) préconise pour toute la France une seule système de coordonnées. La vraie solution du problème est à chercher entre ces deux conceptions.

Un artifice, appliqué au Mecklenbourg, consisterait, pour la Suisse, à faire varier la déformation non plus entre zéro et 11 centimètres, mais entre $\pm 5\frac{1}{2}$ centimètres par kilomètre. Un examen rapide montre que cette amélioration n'est qu'apparente (voir fig. 3, valeurs de m et m'); la déformation serait $-1,000\ 05\frac{1}{2}$ à Berne et $+1,000\ 05\frac{1}{2}$ à la périphérie.

L'influence du choix de l'origine est également intéressante à étudier; elle peut se résumer, pour la Suisse, dans le tableau suivant:

Système de projection	Position favorable de l'origine	Déformations $\log m = 0,000\ 000$ à l'origine
Conique conforme	$\varphi_0 = 46^0 48'$ (Schinberg)	1,000 15 ($\varphi = \varphi_0 \pm 1^0 00'$)
Mercator (transversale)	$\lambda_0 = 5^0 53'$ (Schinberg)	1,000 38 ($\lambda = \lambda_0 \pm 2^0 16'$)
Mercator (à axe oblique)	$\varphi_0 = 46^0 48'$ (Schinberg)	1,000 15 ($\varphi = \varphi_0 \pm 1^0 00'$)
Azimutale conforme	Finsteraarhorn	1,000 20 (Martinsbrück)
Analytique conforme	Meiringen	1,000 11 (à la périphérie)
Analytique conforme	Berne	1,000 19 (Chiasso)
Projection Bonne	Grimsel	$\pm 48''$ (sexag.) (Chiasso) $\pm 1,000\ 12$

Il ne reste plus qu'à tenir compte de l'influence de la réduction au niveau de la mer; deux cas sont ici à distinguer:

1^o *L'origine est à une altitude supérieure à la périphérie du pays; c'est le cas notamment pour la Suisse si Berne est choisi comme origine, exemple:*

	Berne	Chiasso
déformation	0,00 m	+0,19 m
réduction	—0,09 »	—0,04 »
	<u>—0,09 m par kilom.</u>	<u>+0,15 m par kilom.</u>

Le kilomètre effectif, déduit des coordonnées, accusera 999,91 m à Berne et 1000,15 m à Chiasso, soit 0,24 m de différence. La réduction au niveau de la mer exerce donc une influence *défavorable*.

2^o *La périphérie du pays est à une altitude supérieure à la région centrale.* Un exemple numérique montrerait immédiatement que soit la déformation absolue, soit la déformation relative entre l'origine et la périphérie sont diminuées.

Etude comparative de la projection à axe oblique et de la projection conique.

Pour terminer nous voulons consacrer un court chapitre à ces deux projections si étroitement liées l'une à l'autre. Cela provient de ce que les termes de 3^e ordre dans les séries qui expriment x et y sont identiques dans les deux systèmes de coordonnées. En Suisse, l'application des deux projections ne donne lieu qu'à de très faibles différences même à la périphérie du pays. Malgré cela, et peut-être à cause de cela, des controverses très vives ont surgi, lorsqu'il s'est agi de comparer les deux systèmes.

On reproche à la projection conique de comporter des termes de 3^e ordre dans la série qui exprime la réduction d'azimut. Ce grief paraît peu fondé. Même pour de longs côtés le calcul de ces termes n'entraîne que de très faibles corrections calculables graphiquement.

Un revirement s'est produit du reste en faveur de la projection conique. Un auteur qui fait autorité (Jordan, Handbuch... III, 1916, p. 542) préconise la projection conique pour un pays tel que la Suisse.

L'application au Mecklenbourg de ce système de coordonnées a donné entière satisfaction. Considérons à titre d'exemple un des principaux côtés (Dars-Stralsund) de la triangulation de ce pays (figure 9).

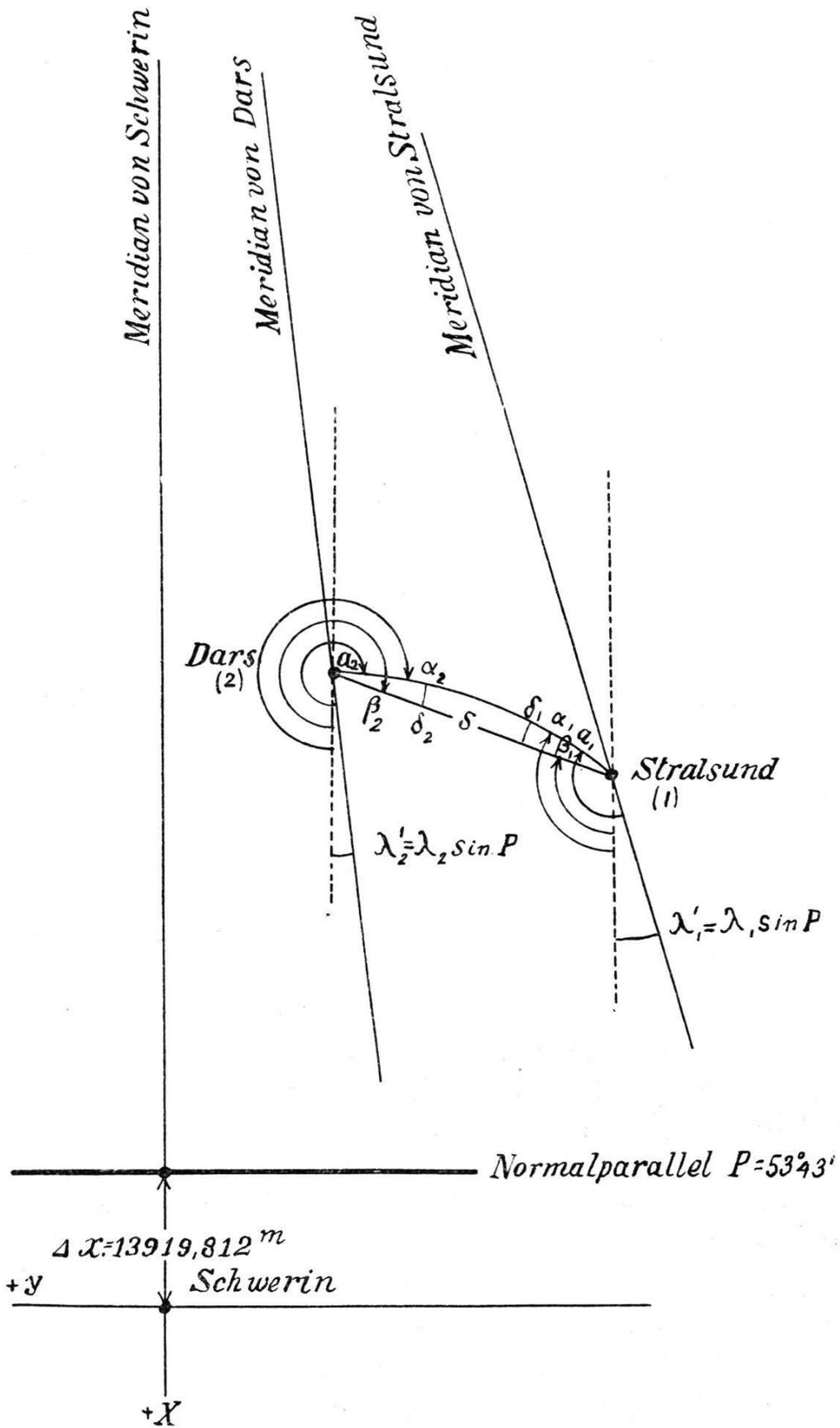


Figure 9.

La réduction d'azimut se calcule au Mecklenbourg par les formules :

$$\delta_1 = \frac{1}{3} (2\Delta_1 - \Delta_2) \quad \delta_2 = -\frac{1}{3} (\Delta_1 + \Delta_2)$$

où

$$\Delta = \frac{\rho}{2r^2} x \cdot \Delta y - \frac{\rho}{4r^3} \frac{t}{V} (1-4\eta^2) x^2 \cdot \Delta y + \frac{\rho}{4r^3} \frac{t}{V} y^2 \cdot \Delta y - \frac{\rho}{2r^3} \frac{t}{V} \Delta x \cdot x \cdot y$$

$\Delta = \Delta_1$ pour $y = y_1$ $x = x_1$ $\Delta y = y_2 - y_1$ $\Delta x = x_2 - x_1$
 $\Delta = \Delta_2$ „ $y = y_2$ $x = x_2$ $\Delta y = y_1 - y_2$ $\Delta x = x_1 - x_2$
 soit numériquement pour $t = \text{tg } 53^\circ 45'$

$$\Delta = [1,40327] x \cdot \Delta y - [4,427] x^2 \cdot \Delta y + [4,431] y^2 \cdot \Delta y - [4,732] y \cdot x \cdot \Delta x$$

Le calcul du groupe des termes de 3^e ordre paraît effectivement laborieux; il n'en est rien si l'on construit un abaque (figure 10); on peut en effet poser avec assez d'exactitude :

$$\Delta \cong [\dots\dots] x \cdot \Delta y - [4,43] x^2 \cdot \Delta y + [4,43] y^2 \cdot \Delta y - [4,43] y \cdot x \cdot 2 \Delta x$$

Les 3 coefficients sont maintenant égaux; un même abaque suffit pour les 3 termes :

Exemple: côté Dars—Stralsund

Dars . . .	$y_2 = -70,2$ kilom.	$x_2 = -81,1$ kilom.	
Stralsund	$y_1 = -108,6$ „	$x_1 = -63,7$ „	
	$y_2 - y_1 = + 38,4$ „	$x_2 - x_1 = -17,4$ kilom.	
		$2 \Delta x = -34,7$ kilom.	

L'interprétation de l'abaque est immédiate :

Dars: $\Delta_2 = +7'', 870 + 0'', 068 - 0'', 051 - 0'', 053$
 $= +7'', 834$

Stralsund: $\Delta_1 = -6'', 182 - 0'', 042 + 0'', 122 + 0'', 065$
 $= -6'', 037$

$$\delta_2 = -\frac{1}{3} (\Delta_1 + 2 \Delta_2) = 7'', 235 \quad (\text{Dars})$$

$$\delta_1 = \frac{1}{3} (2 \Delta_1 - \Delta_2) = -6'', 636 \quad (\text{Stralsund})$$

Pour la Suisse on aurait $t = \text{tang } 46^\circ 57'$ et [4,326] au lieu de [4,431]. Comme on le voit le calcul des termes de 3^e ordre est rapide.

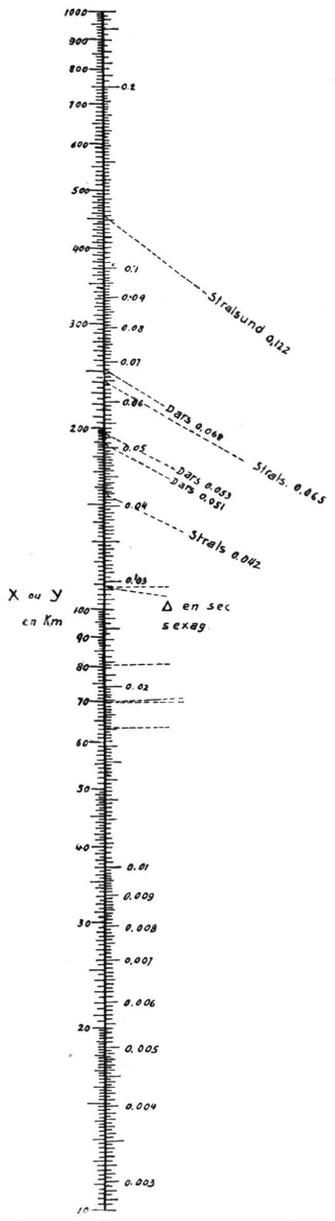
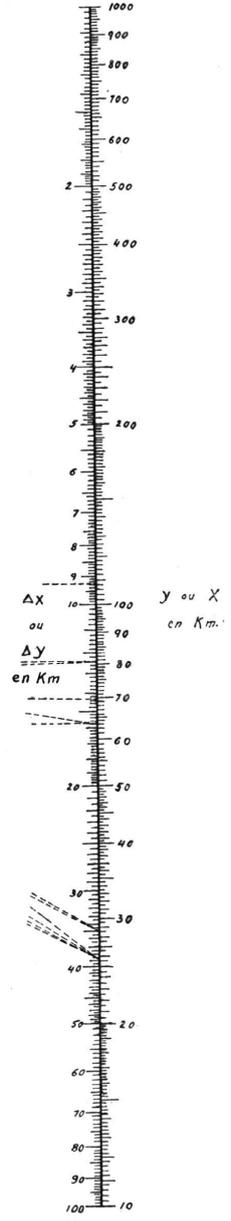


Figure 10.



Abaque pour le calcul
de la réduction d'azimut.

Choix des constantes de la projection.

Nous avons admis au début de cette étude le rayon terrestre égal à l'unité et négligé l'aplatissement. Pour les applications il faut faire choix de constantes; la géodésie suisse est basée sur l'ellipsoïde de Bessel:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Demi-grand axe} = 6\,377\,397 \text{ m} \\ \text{aplatissement} = 1 : 299,15 \end{array} \right\} \text{(Bessel)}$$

En Italie on a admis 6378 191 m et 1 : 293,46; d'autres pays ont encore d'autres constantes. De plus en plus l'ellipsoïde de Bessel est remplacé par l'ellipsoïde dit « international »:

$$\text{Demi-grand axe} = 6\,378\,388 \text{ m} \qquad \text{aplatissement} = 1 : 297$$

Le but de cette étude n'étant pas de déterminer toutes les constantes d'une projection, nous nous bornerons à quelques chiffres. Supposons qu'il s'agisse de projeter l'ellipsoïde sur la sphère de même courbure moyenne à la latitude de Berne suivant la méthode de Gauss:

	ellipsoïde international	ellipsoïde de Bessel
log. rayon sphère	= 6,804 7408	6,804 7401
latitude sphère	= 46° 54' 26'', 6	46° 54' 27'', 8
coefficient d'amplification des méridiens	= 1,000 735	1,000 729

Il est loisible de poursuivre cette comparaison pour tous les coefficients et toutes les constantes. Relevons que les écarts sont relativement considérables entre les deux résultats.

Résumé et conclusions.

La projection sera en principe conforme; les coordonnées conformes comportent de beaucoup les formules les plus simples pour le calcul des déformations des triangles géodésiques.

Sauf pour les pays d'étendue restreinte on projettera d'abord le sphéroïde sur la sphère de même courbure moyenne à l'origine suivant la méthode de Gauss ou toute autre méthode, suivant la forme et la configuration du pays.

En général on s'efforcera de réduire les déformations ce qui s'obtient par l'application du théorème de Tchebycheff et le tracé de la plus petite ellipse circonscrite à la périphérie.

Le plus souvent il faut renoncer à concilier à la fois la géodésie et la cartographie dans le choix d'un système de projection, les éléments des deux problèmes et les buts à réaliser étant différents.

A. Ansermet.