

Du calcul d'une triangulation dans le voisinage de l'origine des coordonnées

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **24 (1926)**

Heft 8

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-189590>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Du calcul d'une triangulation dans le voisinage de l'origine des coordonnées.

En principe il y a deux méthodes bien différentes de calculer une triangulation :

- 1^o on compense directement le réseau sur le sphéroïde, sans s'occuper du mode de projection; les coordonnées géodésiques sont ensuite transformées en coordonnées cartésiennes par des développements en séries.
- 2^o le calcul s'opère directement dans le plan; les éléments observés doivent alors au préalable subir des corrections puisque les figures sont déformées par la projection dans une mesure qui varie suivant le système de coordonnées adopté.

On sait que, de plus en plus, ce 2^e procédé est en faveur en géodésie depuis l'introduction des coordonnées conformes.

Les deux méthodes ont cependant ceci de commun que dans un certain « champ » plus ou moins étendu autour de l'origine, la double courbure de la surface terrestre peut être négligée, la triangulation étant calculée directement sur la sphère dite de *même courbure moyenne*; on évite ainsi la double projection. Quelle est l'étendue de ce champ? C'est ce qu'il convient tout d'abord d'établir.

La sphère de même courbure moyenne à l'origine jouit

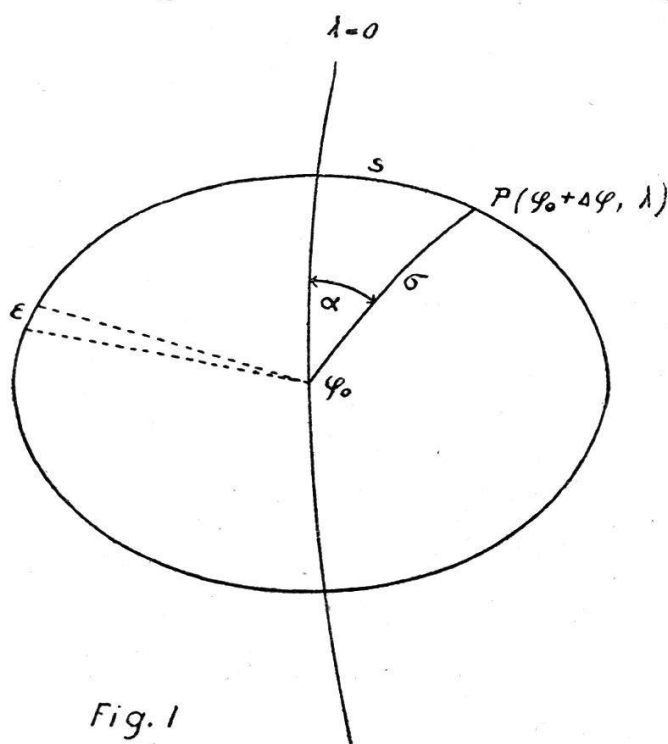


Fig. 1

de la propriété de s'appliquer sur le sphéroïde, les géodésiques d'une des surfaces se transformant en géodésiques de l'autre. En particulier les déformations tant d'azimut que de longueur résultant de cette application seront du 3^e ordre en σ et l'ouverture linéaire ϵ pour toute la périphérie de la calotte (Fig. 1) du 4^e ordre en σ :

déformation = $\sigma^3 f(\alpha) + \sigma^4 \dots$ ou en coordonnées géographiques :

$$\text{déformation} = C_1 \cdot \Delta\varphi + C_2 \cdot \Delta\varphi \cdot \lambda + C_3 \cdot \Delta\varphi \cdot \lambda^2 + C_4 \cdot \lambda^3 + \dots = m - 1$$

où

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \sigma + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \sigma^2} \frac{\sigma^2}{2} + \dots \\ \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \sigma + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \sigma^2} \frac{\sigma^2}{2} + \dots \end{cases}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = \frac{V^3}{c} \cos \alpha; \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} = \frac{V}{c} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi_0} \quad \text{etc.} \dots$$

et en intégrant sur toute la périphérie de la calotte :

$$\int (m-1) ds = \int (m-1) \sigma \cdot da = \sigma \int (m-1) da \cong \sigma^4 \int [C_1' \cos^3 \alpha + C_2' \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha + C_3' \cos \alpha \sin^2 \alpha + C_4' \sin^3 \alpha] da$$

la déformation totale ou ouverture linéaire ε est bien du 4^e ordre en σ ; les coefficients $C_1' C_2' C_3' C_4'$ sont indépendants de α .

Telle est la formule générale de l'application du sphéroïde sur la sphère de courbure moyenne; nous verrons que dans le cas particulier préconisé par Gauss trois des termes sur quatre s'éliminent.

Pour le calcul on utilise généralement la formule

$$\varepsilon = 2 [K_2 + \sqrt{K_1^2 + K_2^2}] \sigma^4$$

pour le sphéroïde :

$$K_1 = \frac{1}{3 \varrho_0 N_0^2} \frac{e^2 \cdot \sin \varphi_0 \cos \varphi_0}{1-e^2} \quad K_2 = 0$$

$$e^2 = 1 : 147$$

ϱ_0 et N_0 désignant les rayons de courbure principaux (« Annales hydrographiques », Paris 1912)

soit pour $\varphi_0 = 45^\circ$:

<i>distance</i> σ	ouverture ε résultant de l'application de <i>la sphère sur le sphéroïde</i>
102,7 kil.	0,001 m
183,9	0,01 m
327,1	0,10 m

Si nous reprenons la formule générale en posant avec Gauss

$$C_2 = C_3 = C_4 = 0$$

$$\int (m-1) \sigma \cdot da = \sigma^4 \int \left[\frac{2}{3} \frac{\eta^2}{V} \operatorname{tg} \varphi_0 \cos^3 \alpha + \dots \right] da$$

$$\cong \sigma^4 \int \frac{1}{450} \cos^3 \alpha \cdot da$$

toujours pour $\varphi_0 = 45^\circ$ qui correspond au maximum de déformation:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 a . da = \left[\frac{1}{12} \sin 3 a + \frac{3}{4} \sin a \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$$

intégrales qui se calculent aussi par voie graphique.

Soit $\sigma = 1^\circ$ (sexag.) = 1 : 57,3 (radians) = 111 kilom.

$$\sigma^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 a . da}{450} = \left(\frac{1}{57,3} \right)^4 \frac{6380\,000\,000}{450} mm . \frac{2}{3} = 0,86\, mm$$

soit la déformation totale pour $\frac{1}{4}$ de calotte; pour la calotte complète l'intégrale s'annule ce qui se voit a priori.

La figure 2 a été établie d'après le tableau ci-dessus pour des champs de 183,9 km et 327,1 km.

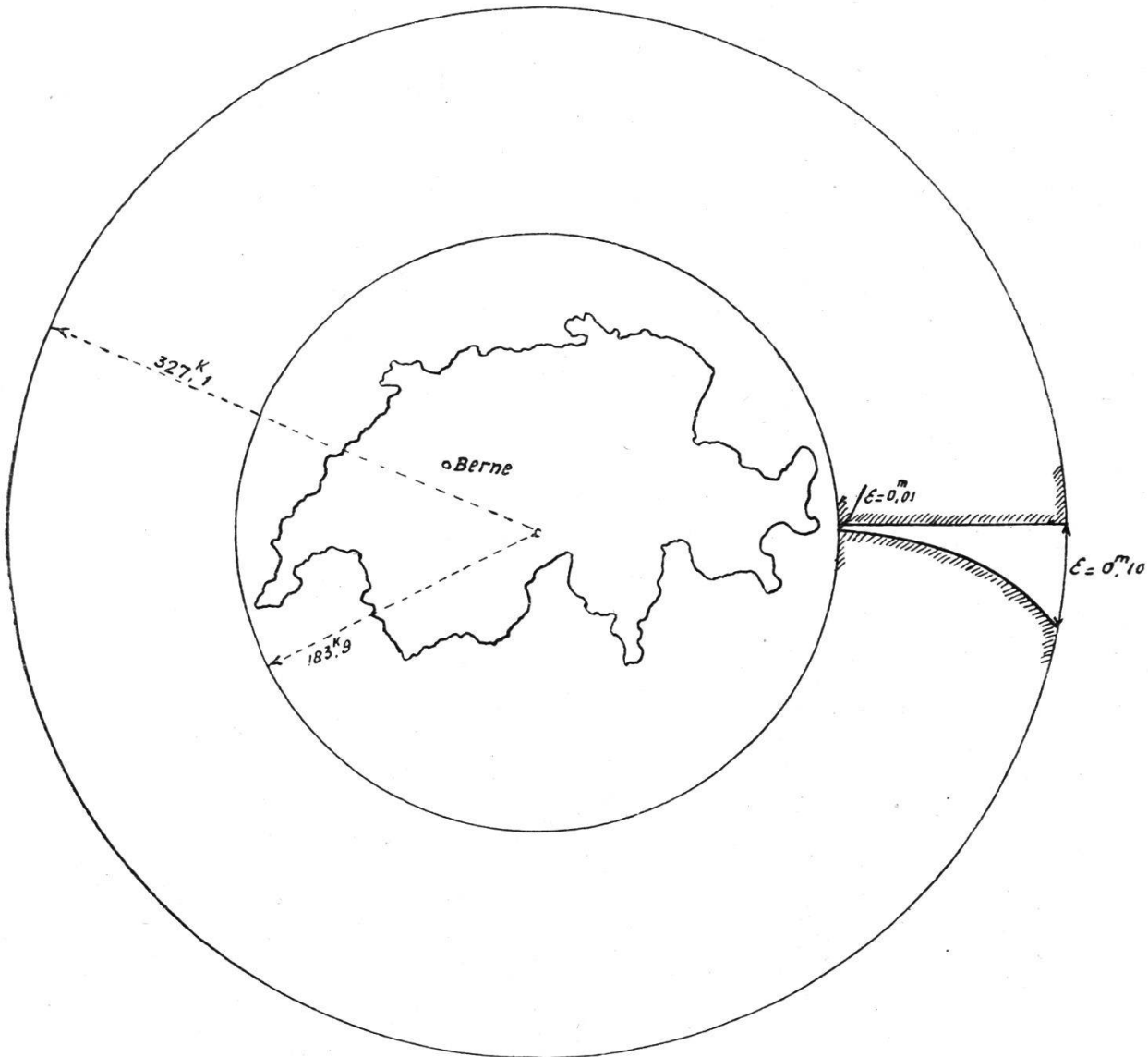


Fig. 2

Il est permis d'admettre que *dans un champ de 183,9 kilom. autour de l'origine la double courbure du sphéroïde peut être négligée et par suite la double projection évitée.*

Développons donc les séries sphériquement en choisissant comme unité le rayon et en admettant l'image du méridien central comme axe de symétrie :

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \Delta\varphi + \frac{\lambda^2}{2} \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \frac{\alpha^{-3}}{3} \Delta\varphi + \Delta\varphi \cdot \lambda^2 \left(\frac{\cos 2\varphi_0}{2} - \alpha \cos^2 \varphi_0 \right) \\ &\quad + \dots \\ y &= \lambda \cdot \cos \varphi_0 - \lambda \cdot \Delta\varphi \sin \varphi_0 + \frac{\lambda \cdot \Delta\varphi}{2} \cos \varphi_0 (2\alpha - 1) \\ &\quad + \frac{\lambda^3}{3} \cos \varphi_0 \left(\frac{\cos 2\varphi_0}{2} - \alpha \cos^2 \varphi_0 \right) \dots \end{aligned} \right.$$

le paramètre α définissant la projection. On vérifie sans peine les formules de déformation :

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \lambda \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \Delta\varphi \cdot \lambda (\cos 2\varphi_0 - 2\alpha \cos^2 \varphi_0) - \lambda \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \lambda \cdot \Delta\varphi [\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 (2\alpha - 1)] + \dots = T_3.$$

T_3 désignant des termes de 3^e ordre;

la déformation linéaire se calcule de même :

$$h^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 = 1 + 2\alpha \cdot \Delta\varphi + \lambda^2 \cdot \cos^2 \varphi_0 (1 - 2\alpha) + T_3.$$

$$h = 1 + \alpha \cdot \Delta\varphi + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \lambda^2 \cdot \cos^2 \varphi_0 + T_3.$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 = \cos^2 \varphi_0 - 2 \Delta\varphi \cdot \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \Delta\varphi (2\alpha \cos^2 \varphi_0 - \cos 2\varphi_0) + \lambda^2 \cdot \cos^2 \varphi_0 (\cos^2 \varphi_0 - 2\alpha \cos^2 \varphi_0).$$

$$k = \frac{1}{\cos \varphi} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \text{ où } \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi_0} \left[1 + \Delta\varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi_0 + \frac{\Delta\varphi}{2} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi_0) + \frac{\Delta\varphi}{6} \dots \right]$$

$$k^2 = 1 + \Delta\varphi (2\alpha) + \lambda^2 \cdot \cos^2 \varphi_0 (1 - 2\alpha) \dots$$

$$k = 1 + \alpha \cdot \Delta\varphi + (0.5 - \alpha) \lambda^2 \cdot \cos^2 \varphi_0 \dots = h \pm T_3.$$

$$m = 1 + \alpha x^2 + \beta y^2 + \dots = 1 + \alpha x^2 + (0.5 - \alpha) y^2 + \dots$$

Cas particuliers: $a = 0.5$ (Project. conique ou Mercator oblique).

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \Delta\varphi + \frac{1}{2} \lambda^2 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \frac{1}{6} \Delta\varphi^3 - \frac{1}{2} \Delta\varphi \cdot \lambda^2 \sin^2 \varphi_0 + \dots \\ y &= \lambda \cdot \cos \varphi_0 - \lambda \cdot \Delta\varphi \cdot \sin \varphi_0 - \frac{1}{6} \lambda^3 \cdot \cos \varphi_0 \sin^2 \varphi_0 \dots \end{aligned} \right.$$

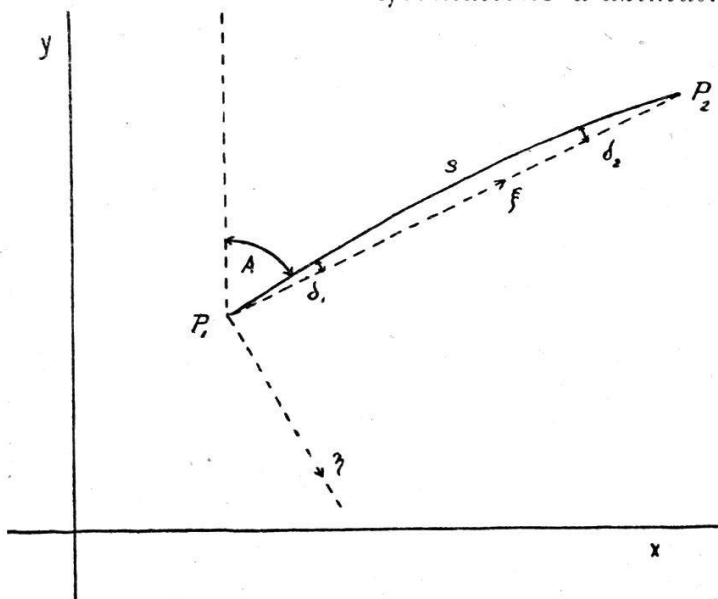
$a = 0.25 = \beta$ (Projection stéréographique).

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \Delta\varphi + \frac{1}{2} \lambda^2 \cdot \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \frac{1}{12} \Delta\varphi^3 \\ &\quad - \frac{1}{4} \cdot \Delta\varphi \cdot \lambda^2 (2 \sin^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0) \dots \\ y &= \lambda \cdot \cos \varphi_0 - \lambda \cdot \Delta\varphi \cdot \sin \varphi_0 - \frac{1}{4} \lambda \cdot \Delta\varphi^2 \cos \varphi_0 \\ &\quad - \frac{1}{2} \lambda^3 \cdot \cos \varphi_0 (2 \sin^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0) \dots \end{aligned} \right.$$

$a = 0$ (Projection transversale de Mercator ou de Gauss).

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \Delta\varphi + \frac{1}{2} \lambda^2 \cdot \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \frac{1}{2} \Delta\varphi \cdot \lambda^2 \cos 2 \varphi_0 + \dots \\ y &= \lambda \cdot \cos \varphi_0 - \lambda \cdot \Delta\varphi \cdot \sin \varphi_0 - \frac{1}{2} \lambda \cdot \Delta\varphi^2 \cos \varphi_0 \\ &\quad + \frac{1}{6} \lambda^3 \cdot \cos \varphi_0 \cos 2 \varphi_0 \dots \end{aligned} \right.$$

Déformations d'azimut.



Nous sommes maintenant en mesure de calculer ces déformations δ_1 δ_2 qui permettront de compenser le réseau directement dans le plan; nous avons trouvé (« Schweiz. Zeitschrift für Vermessungswesen », 1925, nos 7 et 8):

Fig. 3

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} = \beta' \cdot y_1 \sin A - \alpha' x_1 \cos A + (\beta' - \alpha') \xi \sin A \cos A + \dots$$

L'équation de l'arc s en $(\eta \xi)$ s'écrira :

$$\eta = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right)_0 \xi + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2}\right)_0 \frac{\xi^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3}\right)_0 \frac{\xi^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2}\right)_0 \xi + \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3}\right)_0 \frac{\xi^2}{2} + \dots$$

δ_1 et δ_2 en valeur absolue s'obtiennent par

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right)_0 \quad \operatorname{tg} \delta_2 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right)_s$$

c.-à-d. pour les abscisses $\xi = 0$ et $\xi = s$

$$0 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right)_0 s + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2}\right)_0 s^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3}\right)_0 \frac{s^3}{2} + \dots$$

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right)_s = \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2}\right)_0 s + \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3}\right)_0 \frac{s^2}{2} + \dots$$

$$\text{où } \frac{\partial^3 \eta}{\partial \xi^3} = (\beta' - \alpha') \sin A \cos A.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 = \frac{s}{6} [3 \beta' y_1 \sin A - 3 \alpha' x_1 \cos A + (\beta' - \alpha') s \sin A \cos A] \dots \\ \delta_2 = \frac{s}{6} [3 \beta' y_1 \sin A - 3 \alpha' x_1 \cos A + 2(\beta' - \alpha') s \sin A \cos A] \dots \end{array} \right.$$

Projection stéréographique: $\alpha' = \beta' = 0,5$.

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{s}{4} [y_1 \sin A - x_1 \cos A] + \dots$$

Projection conique ou Mercator oblique $\alpha' = 1 \quad \beta' = 0$

$$-\delta_1 = \frac{s}{6} \cos A [3 x_1 + s \sin A] \dots$$

$$-\delta_2 = \frac{s}{6} \cos A [3 x_1 + 2 s \sin A] \dots$$

L'interprétation graphique de ces formules est immédiate; quant au maximum de δ_1 et δ_2 il s'obtient en différentiant par rapport à l'azimut A .

Applications: supposons $s = 1$ kilomètre et $x_1 = \pm y_1$ la déformation linéaire est indépendante du système de projection puisque le point P_1 est sur la bissectrice des axes; le tableau ci-après donne un aperçu des valeurs maximums de δ_1 et δ_2 (valeurs absolues):

Valeurs absolues de δ_1 maximum ou δ_2 maximum.

$x_1 = \pm y_1$	$\alpha = \beta = 0,25$	$\alpha = 0,5$ ou $\beta = 0,5$
100 kilom.	0," 18	0," 25
150 »	0," 27	0," 38
200 »	0," 36	0," 50
250 »	0," 44	0," 63

Il n'est donc pas exact d'affirmer comme le fait le Prof. Fasching («*Zeitschr. für Vermessungswesen*», 1925, p. 51) que la valeur de $\delta_{max.}$ est moitié moindre dans la projection stéréographique. Quant à l'influence des termes de 3^e ordre elle est exposée dans le travail déjà cité («*Schweiz. Zeitschr. für Vermessungswesen*», 1925, n^{os} 7 et 8) et calculable par une abaque. Pour la triangulation secondaire et dans le voisinage de l'origine on se contentera du calcul ci-dessus qui est simple et justifie la compensation d'un réseau directement dans le plan.

En résumé, pour un pays tel que la Suisse, la triangulation peut se calculer directement dans le plan sans faire intervenir la double courbure du sphéroïde; les formules qui précèdent suffiront pour la triangulation secondaire; pour les longs côtés éloignés de l'axe neutre on développera éventuellement les séries jusqu'aux termes de 3^e ordre. *A. Ansermet.*

Berechnung des Wertes von Obstbäumen.

Von Kulturingenieur Dr. H. Fluck, Neuenburg.

A. Allgemeines.

Wie schon früher an dieser Stelle¹ bemerkt wurde, werden bei Obstbaumbewertungen noch häufig Verfahren zur Anwendung gebracht, die einer genauen Kritik nicht standhalten können. Unter diesen Umständen und mit Rücksicht darauf, daß bei Güterzusammenlegungen, Straßen- und Bahnbauten sehr oft Obstbäume taxiert werden müssen, ist es vielleicht nicht unangebracht, daß das Problem der Obstbaumbewertung auch hier einmal zur Sprache kommt.

Für die Taxierung der Obstbäume ist in erster Linie der Ertragswert maßgebend. Wir verstehen darunter die Summe der Barwerte aller künftiger Obstrenten (Obstreinerträge).

¹ 1924, S. 290 ff.