

Zur Theorie des Wild-Autographen

Autor(en): **Baeschlin, F.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **27 (1929)**

Heft 5

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-191426>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Krankheit durch Chinin bekämpft werden, wohl läßt sich die Ansteckungsgefahr vermindern durch die Verwendung von Moskitonetzen über den Lagerstätten und Drahtgeflechten an den Fenstern, das wirksamste Mittel aber zur Ausrottung des Uebels ist die Trockenlegung der Sümpfe. Ehre denen, die Gesundheit und Leben wagen, um dieses erlösende Werk zu vollbringen!

Dr. Ing. *Hans Fluck.*

Literatur: Société des Nations, L'Etablissement des Réfugiés en Grèce, Genève 1926.
Jacques Ancel, Les travaux et les jours de l'Armée d'Orient, 1915 à 1918. Paris 1921.
August Heisenberg, Neugriechenland, Leipzig 1919.

Zur Theorie des Wild-Autographen.

Von *F. Baeschlin*, Professor an der E. T. H., Zürich.

In Ergänzung zu dem Aufsatz von Herrn Dipl.-Ing. E. Berchtold in Nr. 3, 1929, dieser Zeitschrift, möchte ich etwas eingehender auf zwei Punkte der Theorie des Wild-Autographen eintreten, die von Herrn Berchtold bewußt nur angedeutet worden sind. Es betrifft dies

1. Die Ableitung des Drehwinkels ρ der Platten um deren Hauptpunkt,
2. die Berechnung der Einstellelemente bei der terrestrischen Photogrammetrie für konvergente und geneigte Achsen.

1. Ableitung des Drehwinkels ρ der Platten um deren Hauptpunkt.

In dem angezogenen Aufsatz weist Herr Berchtold darauf hin, daß beim Wild-Autographen durch die Drehung der Kammer um eine lotrechte Stehachse und eine zu ihr normale Horizontalachse der in die Richtung der Kammerachse fallende Lenker mit der Zielachse des festen Betrachtungsfernrohres andere Winkel bildet, als der Feldstrahl mit der Kammerachse.

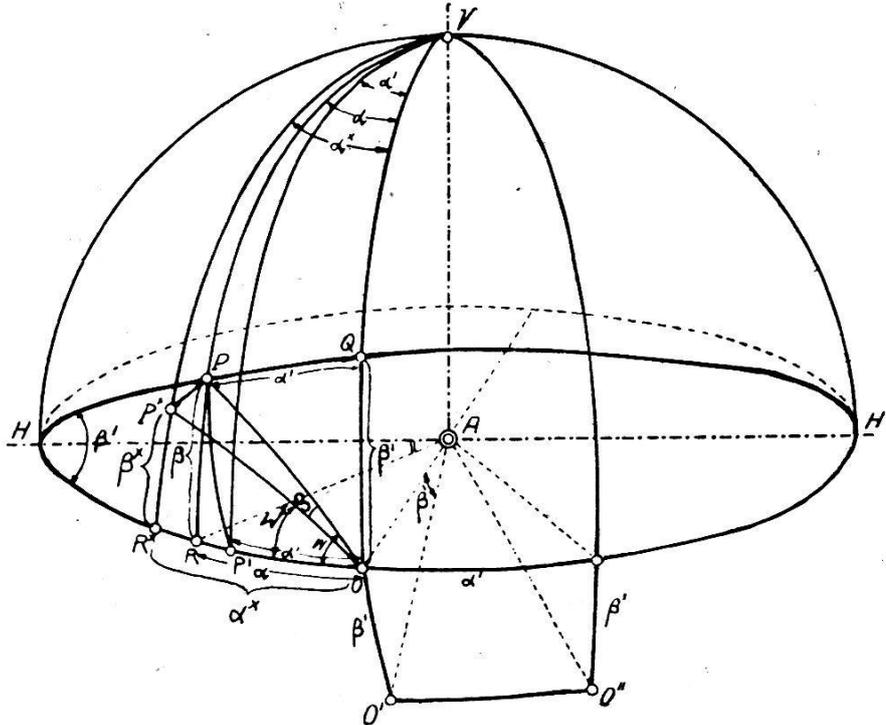
Um die Verhältnisse geometrisch zu untersuchen, legen wir durch den bildseitigen Hauptpunkt des Kammerobjektives *A* eine Kugel vom Radius f = Bildweite der Kammer. Wir schneiden alle Geraden und Ebenen mit dieser Kugel (Figur 1).

Durch den Punkt *A* geht die Vertikalachse *V* und zu ihr normale die Horizontalachse *HH'*. In der Ausgangslage denken wir uns die Kammer so gestellt, daß der Plattenhauptpunkt *O* an der Ziellinie des Betrachtungsfernrohres eingestellt erscheint. Die Vertikalachse schneidet unsere Kugel in *V*, die Horizontalachse in *H* und *H'*, der Strahl *AO* schneidet den horizontalen Großkreis durch *H* und *H'* in *O*, wobei der Winkel *HAO* ein rechter ist.

Ein beliebiger Punkt *p* der Platte erzeugt einen Strahl *Ap*, der die Kugel in *P* schneide. Durch diesen Punkt legen wir einen vertikalen Großkreis *VPR*, der mit dem vertikalen Großkreis *ZO* den Winkel α (gleich dem Großkreisbogen *OR*) bildet. Der Neigungswinkel des Strahles *OP* mit der Horizontalebene ist gleich dem Großkreisstück *RP*.

Wir wollen nun die Kammer zunächst um die Horizontalachse HH' drehen, bis der Strahl AP in die Horizontalebene HOH' fällt. Der Punkt P beschreibt dabei einen Parallelkreis normal zur Drehachse HH' und kommt nach P' . Den Drehwinkel β' finden wir zwischen dem Großkreis durch H, P und H' , der den Vertikalkreis durch O in Q schneiden möge, und dem Horizontalkreis $HP'OH'$. Der Großkreisbogen OQ ist ebenfalls gleich dem Drehwinkel β' .

Figur 1



Nun drehen wir die Kammer um die Stehachse V , bis der Strahl AP' nach O kommt. Der Winkel zwischen den Vertikalkreisen VP' und VO stellt den notwendigen Drehwinkel α' um die Stehachse V dar; er ist auch gleich dem Stück des Horizontalkreises $P'O$.

Wir betrachten jetzt das rechtwinklige sphärische Dreieck HRP , mit dem rechten Winkel bei R . (Figur 2)

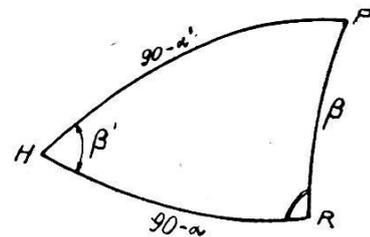
In diesem Dreieck haben wir:

Seite $HP = 90 - \alpha'$ (da $PQ = \alpha'$)

„ $HR = 90 - \alpha$

„ $PR = \beta$

Winkel bei $H = \beta'$



Figur 2

Wir erhalten aus diesem Dreieck

$$\cos \alpha = \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{cotg} \beta' \tag{1}$$

$$\cos \beta' = \operatorname{cotg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha' \tag{2}$$

Daraus ist ersichtlich, daß α' und β' von α und β i. A. verschieden sind. Der Lenker nimmt also, wie vermutet, abgesehen vom falschen

Sinn, was leicht zu beheben ist, eine unrichtige Lage ein, da er ja um die Winkel α' und β' gegenüber seiner Ausgangslage verdreht ist.

Wir wollen nun die Lage eines Bildpunktes P^* mit den Winkelgrößen α^* und β^* berechnen, für den $\alpha^* = \alpha$, $\beta^* = \beta$ ist, so daß die zugehörigen Lenkerbewegungen gerade α und β werden.

Um dem gerecht zu werden, haben wir in den Formeln (1) und (2)

$$\alpha \text{ durch } \alpha^*, \beta \text{ durch } \beta^*$$

$$\alpha' \text{ durch } \alpha, \beta' \text{ durch } \beta$$

zu ersetzen, und wir erhalten:

$$\cos \alpha^* = \operatorname{tg} \beta^* \cdot \operatorname{cotg} \beta \quad (3)$$

$$\cos \beta = \operatorname{cotg} \alpha^* \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (4)$$

Wenn wir durch P^* den vertikalen Großkreis VP^* legen, so möge er den Horizontalkreis HOH' in R^* schneiden.

Das rechtwinklige Dreieck HR^*P^* hat die Stücke

$$\text{Seite } HP^* = 90 - \alpha$$

$$\text{„ } HR^* = 90 - \alpha^*$$

$$\text{„ } P^*R^* = \beta^*$$

$$\text{„ } P^*R^* = \beta^*$$

$$\text{Winkel bei } H = \beta$$

Damit erhält man die Formeln (3) und (4), woraus sich die Berechtigung der betreffenden Interpretationen ergibt.

Wir legen durch AO und P eine Ebene; sie schneidet aus der Platte die Gerade Op heraus, aus der Kugel den Großkreis OP . Der Bogen OP entspricht dem Winkel OAp .

Wir betrachten das rechtwinklige sphärische Dreieck PRO , mit rechtem Winkel bei R . (Figur 3)

$$\text{Seite } PR = \beta$$

$$\text{„ } RO = \alpha$$

Wir erhalten:

$$\cos OP = \cos \alpha \cdot \cos \beta \quad (5)$$

Ferner legen wir eine Ebene durch OA und P^* . Sie schneidet aus der Kugel den Großkreis OP^* heraus.

Wir betrachten das rechtwinklige sphärische Dreieck P^*R^*O mit dem rechten Winkel bei R^* .

$$\text{Seite } P^*R^* = \beta^*$$

$$\text{„ } R^*O = \alpha^*$$

Wir erhalten:

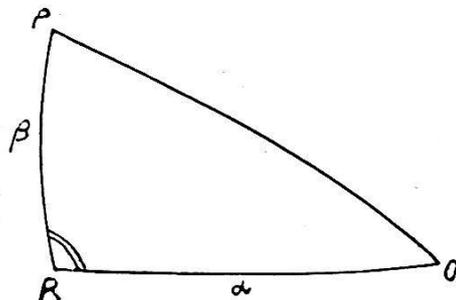
$$\cos OP^* = \cos \alpha^* \cdot \cos \beta^* \quad (6)$$

Auf das sphärische Dreieck HP^*R^* wenden wir den Sinus-Cosinus-Satz der sphärischen Trigonometrie an und erhalten:

$$\sin (90 - \alpha) \cdot \cos \beta = \cos \beta^* \cdot \sin (90 - \alpha^*) - \sin \beta^* \cdot \cos (90 - \alpha^*) \cdot \cos HR^*P^*$$

Da der Winkel $HR^*P^* = 90^\circ$, so folgt:

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos \alpha^* \cdot \cos \beta^* \quad (7)$$



Figur 3

Damit folgt aber aus (5) und (6):

$$\cos OP = \cos OP^*$$

oder da OP und $OP^* < 90^\circ$ sind:

$$\underline{\underline{OP^* = OP}} \quad (8)$$

P und P^* liegen daher auf einem Parallelkreis zur Achse AO .

Wir können uns die den Kugelpunkten P und P^* entsprechenden Plattenpunkte p und p^* dadurch erzeugt denken, daß wir uns im Punkte O die Tangentialebene an die Kugel legen und die Strahlen AP resp. AP^* mit ihr schneiden. Dadurch entstehen die Plattenpunkte p und p^* . Da die Winkel OAP und OAP^* gleich sind, so sind auch die Entfernungen Op und Op^* gleich.

Die beiden Plattenpunkte p und p^* liegen daher auf einem Kreis um den Plattenhauptpunkt O als Mittelpunkt. Wenn deshalb die Platte in ihrer eigenen Ebene um den Plattenhauptpunkt O um einen bestimmten Winkel ρ gedreht (verkantet) wird, so gelangt der Punkt p in die Lage von p^* . Wird jetzt die Kammer um die Stehachse V und die Horizontalachse HH' gedreht, bis der durch die Verkantung erzeugte Punkt im Betrachtungsfernrohr erscheint, so kommt der Lenker in die richtige Lage; er zeigt die Winkel α und β .

Um den nötigen Verkantungswinkel ρ zu bestimmen, beachten wir, daß ρ gleich dem Winkel POP^* ist.

Wir bezeichnen:

Winkel ROP mit w

„ R^*OP^* mit w^*

Es ist dann:

$$\rho = w - w^* \quad (9)$$

Aus den rechtwinkligen Dreiecken PRO und P^*R^*O erhalten wir:

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{cotg} w \quad (10)$$

$$\sin \alpha^* = \operatorname{tg} \beta^* \cdot \operatorname{cotg} w^* \quad (11)$$

oder

$$\operatorname{tg} w = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha} \quad (10a)$$

$$\operatorname{tg} w^* = \frac{\operatorname{tg} \beta^*}{\sin \alpha^*} \quad (11a)$$

Es empfiehlt sich, in Formel (11a) β^* und α^* durch β und α auszudrücken.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck HP^*R^* folgt:

$$\operatorname{tg} \beta^* = \operatorname{tg} \beta \cdot \cos \alpha^*$$

$$\sin \alpha^* = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta^*}$$

Damit wird:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta^*}{\sin \alpha^*} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha^* \cdot \cos \beta^*$$

Nach Formel (7) ist aber:

$$\cos \alpha^* \cdot \cos \beta^* = \cos \alpha \cos \beta$$

womit wir unsern Zweck erreichen:

$$\frac{\operatorname{tg} \beta^*}{\sin \alpha^*} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta = \underline{\underline{\operatorname{cotg} \alpha \cdot \sin \beta}} \quad (12)$$

Wir finden damit:

$$\operatorname{tg} w^* = \operatorname{cotg} \alpha \cdot \sin \beta \quad (11b)$$

Es ist:

$$\operatorname{tg}(w - w^*) = \frac{\operatorname{tg} w - \operatorname{tg} w^*}{1 + \operatorname{tg} w \cdot \operatorname{tg} w^*}$$

Damit erhalten wir:

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{\operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{cosec} \alpha - \operatorname{cotg} \alpha \cdot \sin \beta}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{cosec} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha + \operatorname{tg} \beta \operatorname{cotg} \alpha \sin \beta}$$

oder:

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha + \sin \beta \operatorname{tg} \beta} \quad (13)$$

Diese Formel kann noch umgeformt werden.

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta \left(\frac{1}{\cos \alpha \cos \beta} - 1 \right)}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta}} = \frac{\sin \alpha \sin \beta (1 - \cos \alpha \cos \beta)}{\sin^2 \alpha \cdot \cos \beta + \sin^2 \beta \cos \alpha}$$

Wir ersetzen im Nenner

$$\sin^2 \alpha \text{ durch } 1 - \cos^2 \alpha, \sin^2 \beta \text{ durch } 1 - \cos^2 \beta$$

und finden:

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{\sin \alpha \sin \beta (1 - \cos \alpha \cos \beta)}{\cos \alpha (1 - \cos^2 \beta + \cos \beta (1 - \cos^2 \alpha))} = \frac{\sin \alpha \sin \beta (1 - \cos \alpha \cos \beta)}{(\cos \alpha + \cos \beta) (1 - \cos \alpha \cos \beta)}$$

Wenn wir kürzen, erhalten wir endgültig:

$$\underline{\underline{\operatorname{tg} \rho = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}}} \quad (14)$$

womit die von Herrn Berchtold zitierte Formel nachgewiesen ist.

Man kann für diese Formel noch einen Näherungswert angeben.

Wir quadrieren (14) und erhalten:

$$\operatorname{tg}^2 \rho = \frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta} = \frac{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \beta \operatorname{tg} \beta}{\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} + 2}$$

Wir können zeigen, daß

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cong 2 \text{ mit einem Fehler von der Größenordnung } \operatorname{tg}^2 (a - \beta)^2.$$

Um dies zu zeigen, setzen wir

$$a = \beta + \Delta$$

Wir wenden auf $\cos a$ eine Taylor'sche Entwicklung an und erhalten:

$$\cos a = \cos \beta - \sin \beta \cdot \Delta - \cos \beta \frac{\Delta^2}{2} + \sin \beta \frac{\Delta^3}{6} \text{ etc.}$$

Daraus folgt:

$$\frac{\cos a}{\cos \beta} = 1 - \operatorname{tg} \beta \cdot \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \operatorname{tg} \beta \frac{\Delta^3}{6} \text{ etc.}$$

$$\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} = 1 + \operatorname{tg} \beta \cdot \Delta + \frac{\Delta^2}{2} - \operatorname{tg} \beta \frac{\Delta^3}{6} + \operatorname{tg}^2 \beta \cdot \Delta^2 + \operatorname{tg} \beta \cdot \Delta^3 + \operatorname{tg}^3 \beta \cdot \Delta^3$$

Damit finden wir:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} + \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} &= 2 + \operatorname{tg}^2 \beta \cdot \Delta^2 + \operatorname{tg}^3 \beta \cdot \Delta^3 + \operatorname{tg} \beta \cdot \Delta^3 \\ &= 2 + \operatorname{tg}^2 \beta \cdot \Delta^2 + \operatorname{tg} \beta (1 + \operatorname{tg}^2 \beta) \cdot \Delta^3 \\ &= 2 + \operatorname{tg}^2 \beta \cdot \Delta^2 + \frac{\operatorname{tg} \beta}{\cos^2 \beta} \Delta^3. \end{aligned}$$

Somit wird:

$$\operatorname{tg} \rho \approx \frac{\sqrt{\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha} \cdot \sqrt{\sin \beta \cdot \operatorname{tg} \beta}}{2} \quad (15)$$

Von dieser Näherungsformel, die für die größten auftretenden Winkel α und β praktisch weit über das zu verlangende Maß mit der strengen Formel (14) übereinstimmt, geht Wild aus, um die Plattenverdre-
hung ρ automatisch zu erhalten, womit der primär sich zeigende Projektionsfehler aufgehoben wird.

Man erkennt sofort, daß die Näherungsformel (15) streng ist, wenn

1. $\alpha = 0$; β beliebig
2. $\beta = 0$; α beliebig
3. $\alpha = \beta$

2. Berechnung der Einstellelemente am Wild-Autographen bei terrestrischen Aufnahmen mit konvergenten und geneigten Achsen.

Wenn sich auch bis heute die Notwendigkeit, für die terrestrische Photogrammetrie konvergente Achsen zu verwenden, nicht zwingend ergeben hat, so mag doch hie und da aus Versehen Konvergenz auftreten. Daß für Aufnahmen im Gebirge die Neigung der Kammerachsen große Vorteile bietet, steht nach den Erfahrungen der Schweiz. Landestopographie in Bern fest.

Da für terrestrische Aufnahmen kein Grund vorliegt, für die Aufnahme links und rechts verschiedene Kippung anzuwenden, so werde ich bei der folgenden Ableitung der Formeln gleiche Kippung für beide Kammern annehmen.

Wie schon Herr Berchtold in seinem Aufsatz bemerkt hat, kommen die hier behandelten Formeln bei Luftaufnahmen nicht zur Verwendung, da dort die Einstellung des Autographen beim Einpassen empirisch erfolgt.

Entsprechend der Einrichtung des Wild-Autographen wird die Kippung durch Neigen des sogenannten kippbaren Teiles eingestellt. Die Konvergenz wird am Konvergenzprisma der linken Autographenkammer (rechter Feldstandpunkt) eingestellt. Der im Felde erhobene Konvergenzwinkel γ ist in einer Horizontalebene gemessen. Da aber das Konvergenzprisma durch die Kippung des kippbaren Teiles in eine geneigte Ebene gelangt, so wird ein anderer Betrag γ' eingestellt werden müssen. Auf die weiteren Konsequenzen werden wir im Laufe der Ableitung stoßen.

Um die nötigen Formeln abzuleiten, denken wir uns um den Schnittpunkt von Vertikal- und Horizontalachse der linken Autographenkammer (da diese dem Feldstandpunkt rechts entspricht, mit R bezeichnet) eine Kugel gelegt. (In der Figur 5 des Aufsatzes von Herrn Berchtold ist $B = R$; $A = L$.)

Vor Beginn der Einstelloperationen steht die Stehachse lotrecht. Der Schnitt mit der Kugel sei V . Die Drehachse ist horizontal und hat die Lage HH' . Der Lenker hat die horizontale Lage RO normal zu HH' .

Nun geben wir die allgemeine Kippung ω' , indem wir um die Achse HH' drehen. Die Stehachse kommt jetzt in die Lage RV' . Die frühere Horizontalebene kommt in die Lage $HO'H'$. V' ist der Pol zu dieser Ebene. Die Großkreise HOH' und $HO'H'$ bilden also den Winkel ω' . Nun drehen wir um die neue Stehachsenlage RV' das ganze System um den Drehwinkel γ' . Die Horizontalachse dreht sich also in der um ω' geneigten Ebene um γ' und kommt in die Lage RH_1 . Der Lenker, der nach der Kippung die Lage RO' angenommen hat, geht in die in der Ebene $HO'H'$ liegende Lage RO_1 über. Bogen $O'O_1 = \gamma'$. Ebenso ist der Winkel bei V' zwischen den 90° messenden Großkreisstücken $V'O'$ und $V'O_1$, die normal zur Ebene $HO'O_1H'$ stehen, gleich γ' . Die neue Lenkerlage RO_1 soll nun die Neigung ω haben und die Vertikalebene durch RO_1 muß mit dem Großkreis $VV'O'$ den Konvergenzwinkel γ bilden. Auf der Kugel wird die Vertikalebene durch RO_1 dargestellt durch den Großkreis VO_1 .

In dem sphärischen Dreieck $VV'O_1$ haben wir:

$$\begin{array}{rcl} \text{Winkel bei } V & = & \gamma \\ \text{„ „ } V' & = & 180 - \gamma' \\ \text{Seite } VV' & = & \omega' \\ \text{„ } VO_1 & = & 90 + \omega \\ \text{„ } V'O_1 & = & 90^\circ \end{array}$$

Das Dreieck ist also ein sogenanntes Quadrantendreieck.

(Schluß folgt.)

Streifzug durch die Geschichte des Vermessungswesens mit besonderer Berücksichtigung der Basler Verhältnisse.

Von *E. Keller*, Chef des Grundbuchgeometerbureaus Basel-Stadt.

(Schluß.)

Ad. 2. Es liegt uns bei unserer Anregung ferne, das Prinzip der eidg. Vermessungsinstruktion zu beanstanden, huldigen wir doch selber der Anschauung, daß *die natürliche Reihenfolge: Vermarkung, Vermessung, Berechnung und Ausfertigung des Mutationsplanes* das Ideal einer geordneten Nachführung bilden soll und daß namentlich dadurch die Forderung: die Vermessungswerke *polygonometrisch* statt linear-