

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik =
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 32 (1934)

Heft: 1

Artikel: Beitrag zum Schneidenplanimeter

Autor: Berroth, A.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-194668>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SCHWEIZERISCHE Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik

ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS

Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Kulturtechnik / Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Organe officiel de l'Association Suisse du Génie rural / Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie

Redaktion: Dr. h. c. C. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständ. Mitarbeiter f. Kulturtechnik: Dr. H. FLUCK, Dipl. Kulturing., Villa Leontia, Bellinzona-Ravecchia

Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme:

BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORMALS G. BINKERT, A.-G., WINTERTHUR

No 1 • XXXII. Jahrgang der „Schweizerischen Geometer-Zeitung“ Erscheinend am zweiten Dienstag jeden Monats 9. Januar 1934 Inserate: 50 Cts. per einspaltige Nonp.-Zeile	Abonnemente: Schweiz Fr. 12. —, Ausland Fr. 15. — jährlich Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaften für Kulturtechnik u. Photogrammetrie Fr. 9. — jährl. Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz. Geometervereins
---	---

Beitrag zum Schneidenplanimeter.

von A. Berroth, in Aachen.

Allgemeinstes Prinzip aller Umfahrungsplanimeter:

Die einfachste und zugleich allgemeinste Theorie aller Umfahrungsplanimeter geht auf den Ingenieur der französischen Marine, *M. Andrade*¹ (1874) zurück, nach dem die Beziehung gilt (die am besten auch in den Lehrbüchern der Theorie aller Umfahrungsplanimeter vorangestellt würde):

$$A = F + B.$$

Hierin bezeichnet *A* die vom einen Ende des Fahrarms konstanter Länge umfahrene (gesuchte), *B* die vom andern Ende umfahrene und *F* die vom Fahrstab in algebraischem Sinne überstrichene Fläche.

Für diesen Satz hat *C. Runge*² neben einem einfachen analytischen einen anschaulichen geometrischen Beweis gegeben, welcher in Kürze hier folgt:

Nach Abbildung 1 gilt für zwei ∞ nahe Folgen des Fahrarms mit $Q(x, y)$, $Q'(x + dx, y + dy)$, $P(\xi, \eta)$, $P'(\xi + d\xi, \eta + d\eta)$, $O(o, o)$ aus der Dreiecksformel folgend:

$$OQQ' = \frac{1}{2} (xdy - ydx)$$

$$OPP' = \frac{1}{2} (\xi d\eta - \eta d\xi)$$

$$OQ'P' - OQP = \frac{1}{2} d(x\eta - y\xi)$$

$$dF = OQ'P' - OQP = OQQ' + OPP'$$

$$F = \frac{1}{2} [x\eta - y\xi] - \frac{1}{2} \int (xdy - ydx) + \frac{1}{2} \int (\xi d\eta - \eta d\xi).$$

¹ M. Andrade, Mémorial du Génie Maritime 1874.

² C. Runge, Das Stangenplanimeter, Z. f. Verm. 1895, 321.

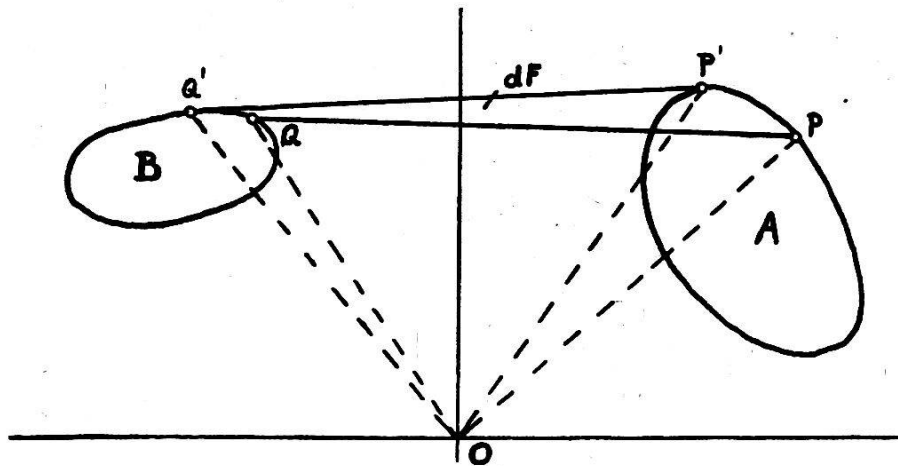


Fig. 1. Grundbeziehung.

Hierbei ist ersichtlich, daß der erste Ausdruck bei Rückkehr in die Anfangslage verschwindet, während die beiden folgenden die Flächen *B* und *A* darstellen.

Schneidenplanimeter:

Auch für das von dem dänischen Kapitän *Prytz* 1886 in der *Tekniske Forenings Tidsskrift* erstmals beschriebene Schneidenplanimeter gilt die obige Grundbeziehung und es sind in der Fachliteratur in der Folge eine ganze Anzahl von Regeln angegeben worden, wie man sich von der Bestimmung der Fläche der Schleppkurve *B* soll befreien können, um das Instrument praktisch brauchbar zu gestalten.

Wenn man jedoch nach diesen Regeln verfährt, so zeigt sich, daß man nur durch seltenen Zufall zu Ergebnissen von genügender Genauigkeit gelangt, andererseits überrascht bei stets gleichen Wiederholungen die innere Genauigkeit der ausgeführten Messungen.

Es ist somit zu vermuten, daß die Unstimmigkeiten nicht auf die Unsicherheit der Schneidenbewegung zurückzuführen sind, sondern daß dieselben ihren Grund in der Unvollständigkeit der in der Literatur angegebenen Verfahrensvorschriften haben müssen.

Aus dem angegebenen Grunde hat der Verf. im Geod. Institut der T.H. Aachen Umfahrungenproben auf allen möglichen Sorten von Papier vornehmen lassen, wobei sich zeigte, daß die Art und Feinheit der Faser von ausschlaggebendem Einfluß ist.

Die durch die Faserung hervorgerufenen systematischen Ablenkungen der Schneide verschwanden schließlich bei einem mit einer feinen *Gelatineschicht* überzogenen Papier vollkommen. Alle im folgenden mitgeteilten Ergebnisse sind deshalb auf einem von der Fabrik bereits ausfixierten *Bromsilberpapier*³ gewonnen worden.

Durch die als nahe kugelförmig anzunehmende feine Gelatinekörnung ist auch der zufällige Fehler bei der Umfahrung so außerordentlich klein, daß diese Methode erst gestattet, Fehlerbetrachtungen

³ Mimosa A.-G. Dresden, Papiersorte Bromosa B1 matt weiß glatt dünn Em Nr. 5824.

anzustellen und den oben erwähnten Unstimmigkeiten in der Berechnung auf die Spur zu kommen.

Genauigkeitsuntersuchung:

Um jeder systematischen Ablenkung durch bereits vorhandene Schleppkurven zu entgehen, wurden die Wiederholungen der Umfahrungen auf jedesmal erneuertem Bromsilberpapier vorgenommen. Durch Benützung von Schienen oder Schablonen war dafür gesorgt, daß stets auch wirklich ein und dieselbe Fläche zugrunde lag. Die Beillänge, die durch einen eingerissenen Strich markiert war, wurde am Anfang und Ende vorsichtig auf das Papier übertragen.

Die Sehnenlängen wurden auf einem Komparator bei 10facher Vergrößerung gemessen und auf die Bogenlängen reduziert. Die Meßgenauigkeit des Komparators betrug 0,01 mm, das Azimut des Mittels aus Anfangs- und Endlage betrug stets 0°.

Im folgenden ist eine von vielen Umfahrungsserien eines Kreises vom Radius 7,99 cm mit einer Fahrarmlänge von 30,0 cm wiedergegeben.

Sehnenlänge mm		Zufällige Fehler mm	
91.04	90.95	—0.022	+0.066
.00	91.04	+0.018	—0.024
.07	.01	—0.052	+0.006
.00	.10	+0.018	—0.084
.08	.00	—0.062	+0.016
.02	.02	—0.002	—0.004
90.96	.97	+0.058	+0.046
.96	.05	+0.058	—0.034
.98	.07	+0.038	—0.054
.06	.98	—0.042	+0.036
.97	.00	+0.048	+0.016
.07	.02	—0.052	—0.004
.99	.96	+0.028	+0.056
.05	.07	—0.032	—0.054
.02	.00	—0.002	+0.016
91.018	91.016		

Der m. Fehler einer einzigen Umfahrung auf Bromsilberpapier betrug 1 : 2000. Dies berechtigt zu folgendem Schluß:

Wenn man weder bei der Messung noch in der Berechnung sich Vernachlässigungen erlaubt, so kann man mit dem Schneidenplanimeter bessere Resultate erzielen als mit allen anderen Planimetern.

Dies ist physikalisch ohne weiteres dadurch begründet, daß durch die leichte Einkerbung der äußerst scharfen Schneide eine viel innigere Verbindung mit der Unterlage hergestellt ist als durch das bloße Rollen und Gleiten der Rollenplanimeter.

Außerdem hat das Schneidenplanimeter keinerlei Zählmechanismus und ist schon aus dem Grunde seiner mechanischen Einfachheit im Vorteil.

Bedeutung des Inhalts der Schleppkurve:

Die vom Fahrarm überstrichene Fläche setzt sich aus Parallelverschiebungen und Drehungen zusammen:

$$F = l \int dp + \frac{1}{2} l^2 \int d\varphi,$$

von denen die letzteren wegen Rückkehr in die Ausgangslage verschwinden. Die Summe aller Parallelverschiebungen auf dem ganzen Weg der Schleppkurve ist ebenfalls = 0, weil der Fahrarm stets Tangente an die Schleppkurve ist und nur auf dem Kreisbogenstück wird eine Parallelverschiebung = dem Bogen g erhalten, so daß $F = gl$ ist.

Es bleibt somit als Unbekannte die Fläche der Schleppkurve B , die man praktisch dadurch möglichst klein zu machen sucht, daß man die Umfahrung etwa im Schwerpunkt der Fläche A beginnt, um sie dann möglichst vollends ganz zu vernachlässigen.

Es ist die Frage, ob es einen Weg gibt, die Fläche B zu eliminieren, so daß dadurch das strenge Verfahren wiederhergestellt wäre.

Nach C. Runge¹ enthält die Fläche der Schleppkurve B gewisse Ausdrücke, die das polare Trägheitsmoment und Momente höherer Ordnung der gegebenen Fläche A in bezug auf den gewählten Anfangspunkt der Umfahrung darstellen:

$$(I) \quad \frac{1}{4l^2} \int r^2 dA, \frac{1}{72l^4} \int r^4 dA, \text{ usw.}$$

und Ausdrücke für das statische Moment und höhere Momente solcher Art

$$(II) \quad \frac{2}{3l} \int r \cos(\phi - \vartheta) dA, \frac{1}{15l^3} \int r^3 \cos(\phi - \vartheta) dA, \text{ usw.}$$

mit ϑ = Azimut des Fahrstrahls, ϕ = Azimut des Fahrarms.

Wenn man wegen der Kleinheit der höheren Glieder (II) von diesen zunächst absieht, so ist das einzige Glied, das einer Vereinfachung im Wege steht, das Glied

$$\frac{2}{3l} \int r \cos(\phi - \vartheta) dA,$$

weil zu dessen Integration neben dem veränderlichen Azimut des Fahrarms der Wert des Azimuts des Fahrstrahls in stetiger Folge bekannt sein muß, wofür bei beliebig gestalteter Fläche A allgemein gültige Regeln nicht existieren.

Insbesondere ergibt die in Lehrbüchern zu findende Vorschrift, in zwei um 180° verschiedenen Stellungen zu arbeiten, keine strenge Elimination dieser Glieder.

Entwicklung der Kreisbogenlänge der Schleppkurve in eine Fouriersche Reihe:

Aus der Theorie ist ersichtlich, daß der Kreisbogen g , der die Schleppkurve schließt, = $A/l + I/l + II/l$ ist, wovon die rechte Seite

¹ Vergl. A. Galle, Mathematische Instrumente, Leipzig 1912, 126. Hierbei ist zu beachten, daß in den Formeln r sich auf die Kurve A bezieht und man sich die Flächenteile dA in Kurvenstücke zusammengezogen denken muß.

in eine Fouriersche Reihe entwickelt werden kann unter Einführung des arithmetischen Mittels aus Anfangs- und Endlage des Azimuts des Fahrarms φ als Argument:

$$g = a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2 \varphi + a_3 \cos 3 \varphi + a_4 \cos 4 \varphi + \dots \\ + b_1 \sin \varphi + b_2 \sin 2 \varphi + b_3 \sin 3 \varphi + b_4 \sin 4 \varphi + \dots$$

Aus dem Vergleich mit der kinematischen Theorie ergibt sich alsdann, daß das unperiodische Glied:

$$a_0 = \frac{A}{l} + \frac{1}{4 l^3} \int r^2 dA + \frac{1}{72 l^5} \int r^4 dA + \dots$$

und die periodischen Glieder:

$$a_1 \cos \varphi + \dots + b_1 \sin \varphi + \dots = \frac{2}{3 l^2} \int r \cos (\varphi - \vartheta) dA + \dots$$

sein müssen.

Im Zusammenhang mit vorliegender Aufgabe interessiert aber nur das unperiodische Glied, das den Mittelwert aus der Fourierschen Reihe darstellt. Dieser Mittelwert kann aber in Strenge nicht aus 2 um 180° verschiedenen Stellungen des Fahrarms gewonnen werden, sondern verlangt die Messung in mindestens 4 Stellungen.

Um aus dem Mittelwert ferner die Fläche herauszuschälen, muß man mit zwei verschiedenen Fahrarmlängen l und l' arbeiten, es ergibt sich alsdann die Fläche aus:

$$A = \frac{a_0 l^3 - a'_0 l'^3}{l^2 - l'^2}$$

Die Bestimmung des polaren Trägheitsmoments der Fläche, die damit ebenfalls verbunden sein könnte, führt jedoch wegen der auftretenden kleinen Koeffizienten zu keinen sicheren Ergebnissen.

Das Instrument und Beobachtungen mit demselben:

Von der Firma *Max Hildebrand* in Freiberg i. Sa. hat der Verf. ein in der Fahrarmlänge verstellbares Schneidenplanimeter mit folgenden Abmessungen herstellen lassen:

$$\begin{aligned} \text{Gesamtgewicht} &= 367 \text{ g} \\ \text{Höhe} &= 5,2 \text{ cm} \\ \text{Fahrarmlänge} &= \text{bis } 30 \text{ cm} \\ \text{Schneidenradius} &= 0,28 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Die Fahrarmlänge ist durch einen eingravierten Strich abmeßbar (der aber die tatsächliche Länge nicht anzugeben braucht), der Fahrstift durch einen mit Rillen versehenen Zylinder frei drehbar. Die Schärfe der Schneide war zunächst viel zu groß, sie wurde soweit vermindert, daß die Gelatineschicht des Papiers nicht ganz durchschnitten wurde.

Um den zufälligen Fehler beim Nachfahren möglichst klein zu machen, wurden benützt:

Eine *Kreisschiene* vom Radius 7,99 cm und zwei Schablonen aus Messing mit eingeritztem nahezu *gleichseitigem Dreieck* von Seitenlänge 15,22 cm und Höhe 13,17 cm und *einem Rechteck* mit den Seiten 18,055 und 2,85 cm.

Es wurde zunächst eine Nulllinie auf dem Papier gezogen und sämtliche Umfahrungen stets rechtsläufig ausgeführt, die Azimute mit einem Transporteur, die Sehnen mit Maßstab (ohne Komparator) abgelesen und auf die Bogenlänge reduziert.

Als Fahrarmlängen wurden ab Marke genau 20,00 und 30,00 cm eingestellt. Jede Figur wurde mit beiden Fahrarmlängen in je 24 Azimuten umfahren.

Die angegebenen Koeffizienten sind aus einer rechnerischen Ausgleichung nach der M. d. kl. Qu. erhalten worden, jedoch nur aus den Stellungen $n \cdot 30^\circ$, während die Stellungen $15^\circ + n \cdot 30^\circ$ nur zur Kontrolle der Mittelwerte herangezogen wurden. Aus den letzteren ergeben sich die in Klammer gesetzten Werte.

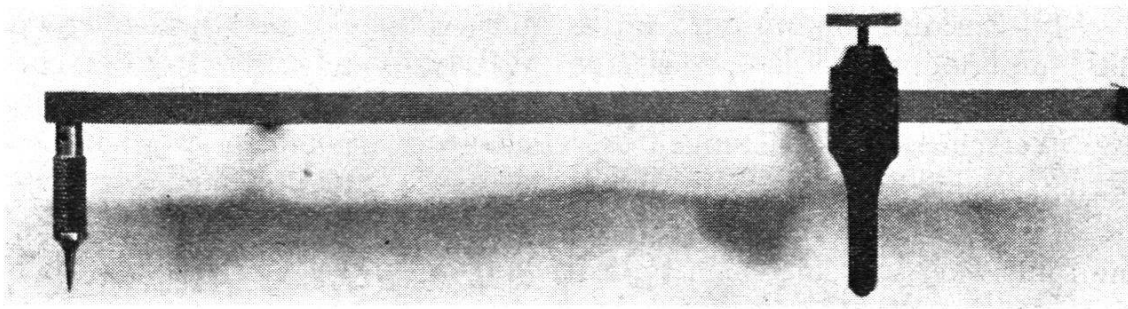
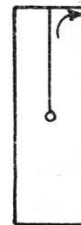
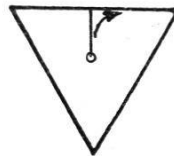
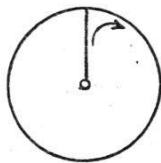


Fig. 2. Schneidenplanimeter von M. Hildebrand.

Beobachtungsergebnisse:



Kreisfläche $\sim 200 \text{ cm}^2$

Fahrarmlänge 200 mm		Fahrarmlänge 300 mm	
Azimut	Bogen	Azimut	Bogen
Grad	mm	Grad	mm
359,8	107,64	359,9	69,20
30,1	107,28	29,7	69,35
60,0	106,08	59,8	68,90
90,1	105,88	89,8	68,14
120,0	103,50	120,0	68,35
150,0	102,88	150,0	67,79
179,8	102,36	179,9	67,69
210,1	103,14	209,7	67,79
239,9	103,76	239,8	68,19
270,0	104,64	270,0	68,14
300,1	105,67	300,0	68,45
330,0	106,66	330,0	69,10

Dreiecksfläche $\sim 100 \text{ cm}^2$

359,8	51,64	0,0	35,22
29,8	51,49	30,1	34,72
59,8	51,59	59,7	33,87
90,2	51,24	89,9	33,72
120,0	51,14	120,0	33,22
149,8	50,89	149,9	32,67
179,8	51,14	179,8	32,57
210,1	51,54	209,8	33,32
240,1	51,64	240,0	33,92
270,0	51,69	270,0	34,42
300,0	52,00	300,1	34,62
330,1	52,15	330,1	35,37

Rechtecksfläche $\sim 50 \text{ cm}^2$

0,1	28,27	0,0	19,80
30,0	27,67	30,4	19,40
60,2	26,77	59,8	17,45
89,9	25,97	89,8	17,00
119,7	25,77	119,8	16,70
149,7	24,92	149,7	15,40
179,6	25,02	179,7	15,50
210,1	25,67	209,8	16,75
240,3	26,17	240,0	17,25
269,8	26,57	270,0	17,50
300,2	27,57	300,2	18,65
330,2	28,42	330,4	19,95

Harmonische Analyse der Beobachtungen:

Kreisfläche

Fahrarmlänge 200 mm

α_0	$\cos \varphi$ $\sin \varphi$	$\cos 2 \varphi$ $\sin 2 \varphi$	$\cos 3 \varphi$ $\sin 3 \varphi$	$\cos 4 \varphi$ $\sin 4 \varphi$	$\cos 5 \varphi$ $\sin 5 \varphi$	$\cos 6 \varphi$
104,96	+2,39 +0,26	—0,01 +0,22	+0,13 +0,03	+0,17 +0,03	+0,11 +0,21	—0,12

Fahrarmlänge 300 mm

68,42	+0,73 +0,11	+0,11 +0,08	+0,12 +0,04	—0,13 —0,01	—0,10 —0,07	+0,04
-------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	-------

Dreiecksfläche

Fahrarmlänge 200 mm

51,51 (51,44)	+0,33 —0,32	—0,05 +0,02	—0,05 —0,14	—0,09 —0,01	—0,02 —0,05	+0,03
------------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	-------

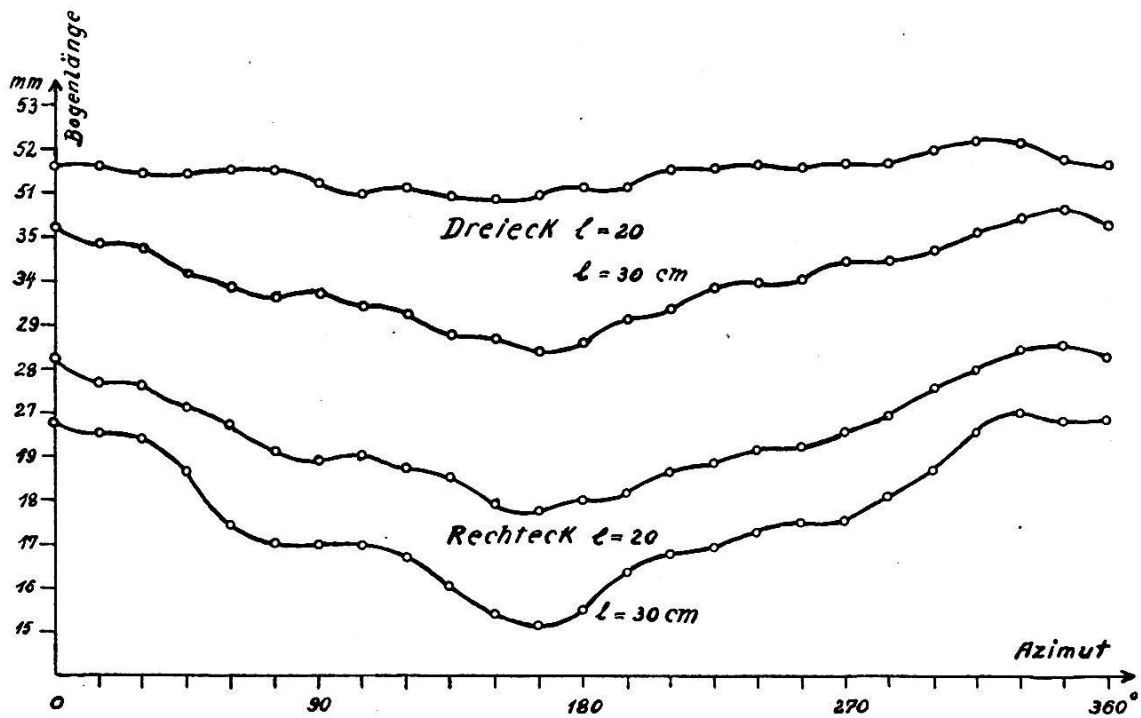
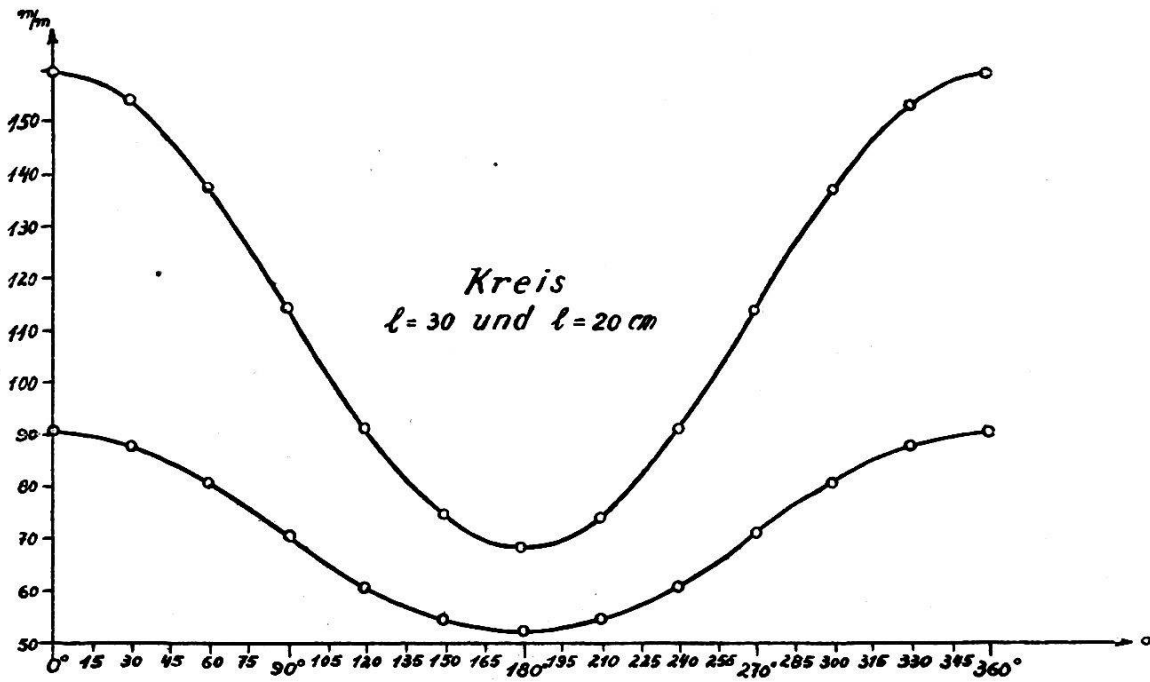


Fig. 3. Graphische Darstellung der Beobachtungen.

Fahrarmlänge 300 mm

33,97	+1,15	—0,02	+0,22	+0,01	—0,04	—0,07
(33,94)	—0,43	+0,01	—0,10	—0,01	—0,02	

Rechtecksfläche

Fahrarmlänge 200 mm

26,56	+1,54	+0,33	+0,14	—0,28	—0,05	+0,03
(26,51)	—0,40	—0,06	—0,15	+0,06	—0,05	

Fahrarmlänge 300 mm

17,60	+1,93	+0,24	—0,47	—0,01	—0,11	—0,06
(17,58)	—0,65	+0,02	—0,23	+0,21	—0,15	

Daraus ergeben sich nach der vorstehenden Formel folgende Flächen:

Kreis	=	201,53 cm ²	(200,80 = Soll)
Dreieck	=	101,00	(100,30)
Rechteck	=	52,53	(51,46)

Darnach ist die rechnerische Fahrarmlänge des Planimeters noch zu verbessern.

Der Einfluß des Anfangspunkts der Umfahrung:

Meist wird empfohlen, die Umfahrung beim Schwerpunkt zu beginnen und zu beenden.

In diesem Punkt ist allerdings $\int R^2 dA$, $\int R^4 dA$ ein Minimum, aber nicht $= 0$, und sind ferner die Glieder

$$\int R \sin (\phi - \vartheta) dA, \int R \cos (\phi - \vartheta) dA$$

als statische Momente $= 0$, falls ϕ konstant wäre, was aber nicht der Fall ist.

Eine nähere Untersuchung zeigt, daß der Kreisbogen g der Schleppkurve fortlaufende Werte annimmt, wenn man bei konstantem Mittelazimut die Anfangspunkte auf einem den Schwerpunkt enthaltenden Durchmesser fortlaufend verändert, die sich einer Exponentialreihe:

$$g = c_1 + c_2 e^{\beta x} \sin \gamma x + c_3 e^{\beta x} \cos \gamma x + \dots$$

fügen, woraus sich ergibt, daß bei Bestimmung der Stelle x dem Schwerpunkt keinesfalls die Möglichkeit einer exakten Elimination innewohnt.

Sichtbarmachung der Schleppkurven:

Im Unterricht an der T.H. werden diese gewöhnlich durch Befahren auf Kopierpapier sichtbar gemacht.

Die besten Kurven erhält man jedoch durch Benützung von Bromsilberpapier als Unterlage für die Schneide. Der metallische Schnitt in Verbindung mit einem Metol-Hydrochinonentwickler ergibt hierbei Kurvenbilder von unübertrefflicher Feinheit. Zur Berücksichtigung des Papiereingangs kann man eine Strichtafel mitphotographieren.

Schneidenschiefe:

Es sei B die Schleppkurve, die mit der Schneidenschiefe Null und einer Fahrarmlänge $l \cos \epsilon$ ausgefahren wird, wenn mit dem Fahrstift die Fläche H umfahren wird.

Mit dem Fahrarm $l \cos \epsilon$ sei unter dem Winkel ϵ ein ideeller Fahrarm von der Länge l befestigt, der alsdann die Fläche A , die gesuchte Fläche, umfahre. Für den Fahrarm $l \cos \epsilon$ gilt dann die Beziehung:

$$A = l \cos \epsilon \int dp + \frac{1}{2} l^2 \cos^2 \epsilon \int d\varphi + B$$

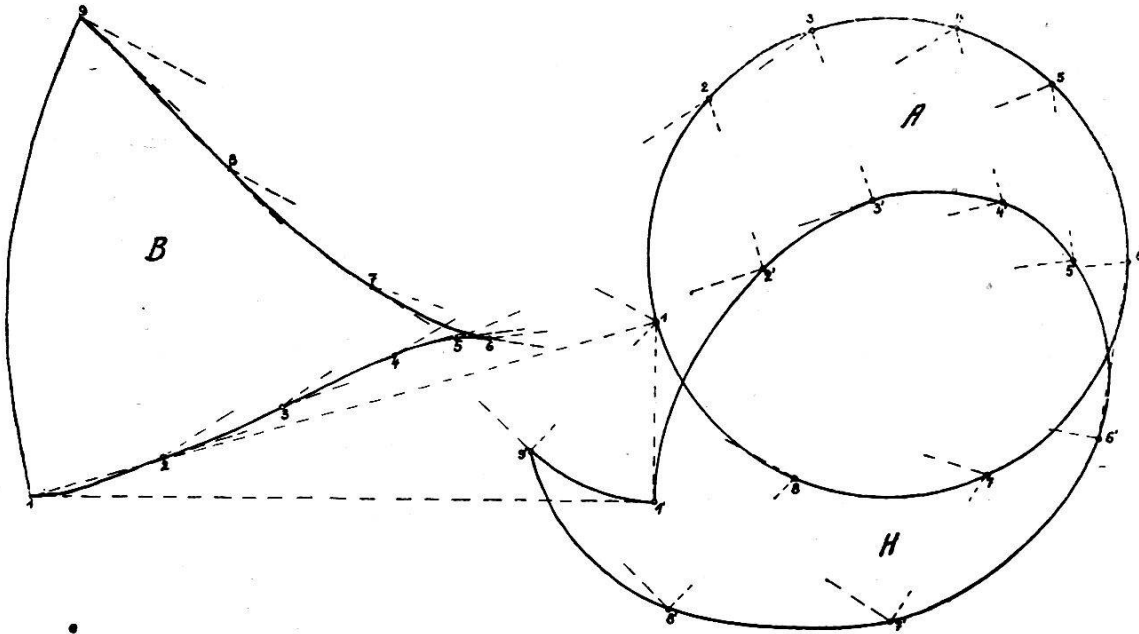


Fig. 4. Umfahrunghverhältnisse bei Schneidenschiefe.

worin $\int dp = g$ die Summe aller Parallelverschiebungen des Fahrarms $l \cos \epsilon$ und $\int d\varphi = 0$ ist, wegen der Rückkehr ins Ausgangsazimut ohne volle Umdrehung. Die Summe aller Parallelverschiebungen des Fahrarms l ist dann $= g \cos \epsilon + \int ds \sin \epsilon$, wo $\int ds$ die Kurvenlänge der reinen Schleppkurve in algebraischem Sinne darstellt.

Es gilt somit

$$\text{zwischen } B \text{ und } H: H = gl \cos \epsilon + B$$

$$\text{zwischen } A \text{ und } B: A = gl \cos \epsilon + \int ds l \sin \epsilon + B$$

$$\text{zwischen } A \text{ und } H: A = \int ds \sin \epsilon l + H.$$

$A - H = \int l \sin \epsilon ds$ ist der Flächenfehler, der bei einer Schneidenschiefe ϵ entsteht, wenn mit dem Fahrstift zwar die Fläche A umfahren wird, während in Wirklichkeit die Fläche H aus der Parallelverschiebung g und der Fahrarmlänge l berechnet wird, wodurch außerdem die Fläche H um den Betrag $2 gl \sin^2 \epsilon/2$ zu groß berechnet wird.

Um also die gesuchte Fläche A aus dem Umfahrunghergebnis mit Schneidenschiefe ϵ dennoch richtig zu erhalten, hat man zum Rechnungsergebnis $g \cdot l$ noch den Wert:

$$B - 2 gl \sin^2 \epsilon/2 + \int ds l \sin \epsilon$$

hinzuzufügen. Das Vorzeichen von ϵ ergibt sich aus der Vorstellung, ob sich eine an Stelle der Schneide senkrecht zum Fahrarm $l \cos \epsilon$ befestigte Rolle zwischen A und B im Endergebnis in oder entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gedreht hätte.

Probemessungen.

Es wurde ein Kreis vom Radius 7,99 cm von einem Peripheriepunkt aus mit der Schneidenschiefe = 0° , = $7,8^\circ$ und = $16,7^\circ$ umfahren und die Fläche der Schleppkurve zur Kontrolle mit einem Polarplanimeter bestimmt.

Schiefe	Länge l cm	Sehne cm	Mittel- azimut	Red. auf Bogen cm	Red. auf Mittelazi- mut, cm
0°	20,47	14,67	$21,0^\circ$	+0,36	0,00
7,8	20,47	14,92	21,3	+0,36	+0,02
0	21,54	13,70	18,5	+0,24	—0,03
16,7	21,54	15,12	20,6	+0,33	—0,01

Bogen g cm	Fläche gl cm ²	Red. auf A cm ²	Red. weg. un- symmetrischer Länge, cm ²	Schlepp- Kurve B cm ²	Fläche A cm ²
15,03	307,66	—	—	—	—
15,30	313,19	—3,0	0,0	—110,4	199,8
13,91	299,62	—	—	—	—
15,44	332,58	—14,0	+6,2	—123,0	201,8

Tabelle
zur Reduktion der gemessenen Sehnen auf den Bogen:

l = 20 cm				l = 30 cm	
s mm (Sehne)	Corr. $\frac{1}{100}$ mm	s mm (Sehne)	Corr. $\frac{1}{100}$ mm	s mm (Sehne)	Corr. $\frac{1}{100}$ mm
15	0	90	78	25	1
20	1	95	92	30	2
25	2	100	107	35	2
30	3	105	124	40	3
35	4	110	144	45	4
40	6	115	165	50	6
45	9	120	188	55	8
50	13	125	213	60	10
55	18	130	241	65	12
60	23	135	271	70	16
65	29	140	303	75	20
70	36	145	338	80	24
75	45	150	376	85	28
80	54	155	417	90	34
85	65	160	461	95	40
				100	46