

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik =
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 36 (1938)

Heft: 3

Artikel: Das astasierte elastische Pendel als Schweremesser [Fortsetzung]

Autor: Baeschlin, C.F.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-197296>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 30.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SCHWEIZERISCHE
Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik

ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS

Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Kulturtechnik / Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Organe officiel de l'Association Suisse du Génie rural / Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie

Redaktion: Dr. h. c. C. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständ. Mitarbeiter f. Kulturtechnik: Dr. H. FLUCK, Dipl. Kulturing., Villa Lepontia, Bellinzona-Ravecchia

Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme:

BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORMALS G. BINKERT, A.-G., WINTERTHUR

| | |
|---|--|
| <p style="text-align: center;">No. 3 • XXXVI. Jahrgang der „Schweizerischen Geometer-Zeitung“ Erscheinend am zweiten Dienstag jeden Monats 8. März 1938 Inserate: 50 Cts. per einspaltige Nonp.-Zeile</p> | <p style="text-align: center;">Abonnements: Schweiz Fr. 12. —, Ausland Fr. 15. — jährlich Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaften für Kulturtechnik u. Photogrammetrie Fr. 9. — jährl. Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz. Geometervereins</p> |
|---|--|

Das astasierte elastische Pendel als Schweremesser.

Von Prof. Dr. C. F. Baeschlin, Zollikon.

(Fortsetzung.)

Die resultierende Richtkraft A erleidet bei einer Aenderung von g um Δg eine große Relativänderung, da τ und γ nahezu gleich sind.

Da

$$A = \tau - \gamma$$

so ist

$$\Delta A = \Delta (\tau - \gamma) = -\Delta \gamma$$

da ja $\Delta \tau$ gleich Null angenommen worden ist ($\tau = \text{konstant}$).

Damit wird

$$(5) \quad \frac{\Delta A}{A} = - \frac{\Delta \gamma}{\tau - \gamma} = - \frac{\Delta \gamma}{\gamma} \frac{\gamma}{\tau - \gamma} = - N \frac{\Delta \gamma}{\gamma}$$

Nun ist aber

$$\gamma = \rho m g$$

und daher

$$\Delta \gamma = \rho m \Delta g = \rho m g \frac{\Delta g}{g} = \gamma \frac{\Delta g}{g}$$

wenn wir ρ und m konstant annehmen.

Somit wird

$$(6) \quad \frac{\Delta \gamma}{\gamma} = \frac{\Delta g}{g}$$

Durch Einsetzen in die Gleichung (5) folgt:

$$(7) \quad \underline{\underline{\frac{\Delta A}{A} = - N \frac{\Delta g}{g}}}$$

Die relative Aenderung der Richtkraft A ist abgesehen vom Vorzeichen das N -fache der relativen Aenderung der Schwerkraft g . Wenn wir daher N groß wählen, so brauchen wir $\frac{\Delta A}{A}$ nur ziemlich grob zu messen, um daraus $\frac{\Delta g}{g}$ mit großer Genauigkeit zu bestimmen.

Wir wollen nun unser Instrument zunächst auf eine Ausgangsstation stellen, auf der $g = g_0$ sei, das wir anderweitig bestimmt haben. Die Richtkraft auf dieser Station bezeichnen wir mit A_0 , die Astasierung N mit N_0 .

Es ist nun

$$(8) \quad A_0 = \tau - \gamma_0 = \tau - m \rho g_0$$

und

$$(9) \quad N_0 = \frac{\gamma_0}{\tau - \gamma_0} = \frac{m \rho g_0}{\tau - m \rho g_0} = \frac{\gamma_0}{A_0}$$

Wir bringen jetzt unsern Apparat auf eine andere Station und setzen voraus, daß τ , ρ und m unverändert bleiben.

Die Schwerebeschleunigung auf dieser Station dagegen sei $g_1 \neq g_0$.

Wir haben

$$(10) \quad A_1 = \tau - \gamma_1 = \tau - m \rho g_1$$

$$(11) \quad N_1 = \frac{\gamma_1}{\tau - \gamma_1} = \frac{m \rho g_1}{\tau - m \rho g_1} = \frac{\gamma_1}{A_1}$$

Die Gleichung (11) können wir als Proportion schreiben

$$\frac{N_1}{1} = \frac{m \rho g_1}{\tau - m \rho g_1}$$

Daraus folgt nach einem bekannten Satz der Proportionslehre

$$\frac{N_1 + 1}{1} = \frac{m \rho g_1 + (\tau - m \rho g_1)}{\tau - m \rho g_1} = \frac{\tau}{\tau - m \rho g_1}$$

$$(12) \quad N_1 + 1 = \frac{\tau}{\tau - m \rho g_1} = \frac{\tau}{\tau - \gamma_1} = \frac{\tau}{A_1}$$

Dividieren wir die Gleichung (12) durch die Gleichung (11), so erhalten wir:

$$(13) \quad \frac{N_1 + 1}{N_1} = \frac{\tau}{\gamma_1}$$

Lösen wir Gleichung (8) nach g_0 auf, so folgt

$$g_0 = \frac{\tau - A_0}{m \rho}$$

aus Gleichung (10) folgt analog

$$g_1 = \frac{\tau - A_1}{m \rho}$$

Daraus ergibt sich

$$g_1 - g_0 = \frac{A_0 - A_1}{m \rho}$$

und weiter

$$\frac{g_1 - g_0}{g_0} = \frac{A_0 - A_1}{m \rho g_0} = \frac{A_0 - A_1}{\gamma_0}$$

Nun ist aber nach Gleichung (9)

$$(14) \quad \gamma_0 = N_0 A_0$$

und analog nach Gleichung (11)

$$(15) \quad \gamma_1 = N_1 A_1$$

Damit erhalten wir die wichtige Gleichung

$$(16) \quad \underline{\underline{\frac{g_1 - g_0}{g_0} = \frac{1}{N_0} \frac{A_0 - A_1}{A_0}}}$$

Diese Gleichung kann noch auf eine andere Form gebracht werden, die für den praktischen Gebrauch meist bequemer ist.

Es ist

$$\gamma_0 = \tau - A_0; \quad \gamma_1 = \tau - A_1$$

gemäß der Definitionsgleichung für A [Gl. (3)]. Andererseits ist nach den Gleichungen (14) und (15)

$$N_0 A_0 = \gamma_0 \quad N_1 A_1 = \gamma_1$$

Damit finden wir

$$N_0 = \frac{\tau - A_0}{A_0} = \frac{\tau}{A_0} - 1$$

$$N_1 = \frac{\tau - A_1}{A_1} = \frac{\tau}{A_1} - 1$$

und daraus

$$N_1 - N_0 = \frac{\tau}{A_1} - \frac{\tau}{A_0} = \tau \frac{A_0 - A_1}{A_1 A_0}$$

Nach Gleichung (12) ist aber

$$\frac{\tau}{A_1} = N_1 + 1$$

und es folgt daher

$$N_1 - N_0 = \frac{A_0 - A_1}{A_0} (N_1 + 1)$$

Somit wird

$$(17) \quad \frac{A_0 - A_1}{A_0} = \frac{N_1 - N_0}{N_1 + 1}$$

Setzen wir dies in Gleichung (16) ein, so erhalten wir:

$$(18) \quad \underline{\underline{\frac{g_1 - g_0}{g_0} = \frac{1}{N_0} \frac{N_1 - N_0}{N_1 + 1}}}$$

Aus dieser Gleichung (18) erkennen wir, daß wir g_1 aus g_0 bestimmen können, wenn es uns gelingt die Astasierungen N_1 und N_0 unseres Instrumentes zu ermitteln.

Diese Bestimmung der Astasierung N auf einer beliebigen Station kann sowohl nach einer *statischen*, wie nach einer *dynamischen* Methode erfolgen.

Statische Methode zur Bestimmung der Astasierung N.

Die statische Methode besteht darin, daß wir den Ausschlag aus der Gleichgewichtslage bestimmen, den ein bestimmtes ablenkendes Drehmoment hervorruft.

Ein solches ablenkendes Drehmoment kann der Beobachter in einfacher Weise an dem System anbringen, indem er den Pendelfuß um einen kleinen, möglichst genau bestimmten Winkel φ neigt.

Das System werde um eine horizontale Achse parallel zur Drahtachse um einen Winkel φ gedreht.

Während vor der Drehung die Gleichgewichtslage durch einen Winkel $\vartheta = 0$ gekennzeichnet war, in Uebereinstimmung mit Gleichung (1), so tritt jetzt die Gleichgewichtslage für einen von Null verschiedenen Winkel ϑ ein.

Da der Torsionsdraht die Drehung um den Winkel φ mitmacht, so ist der Drillungswinkel ϑ . Die Neigung der Stabachse gegen die Lotrichtung dagegen ist jetzt $(\vartheta + \varphi)$.

Da das Torsionsmoment und das Drehmoment, das durch die Schwerkraft erzeugt wird, für den Winkel ϑ im Gleichgewicht sein müssen, das resultierende Drehmoment also verschwinden muß, so erhalten wir jetzt die Gleichung:

$$(19) \quad -\tau\vartheta + \gamma \sin (\vartheta + \varphi) = 0$$

Daraus folgt:

$$\frac{\sin (\vartheta + \varphi)}{\vartheta} = \frac{\tau}{\gamma}$$

nach Gleichung (13) ist aber

$$\frac{\tau}{\gamma} = \frac{N + 1}{N} = 1 + \frac{1}{N}$$

Somit erhalten wir die Gleichung

$$(20) \quad 1 + \frac{1}{N} = \frac{\sin (\vartheta + \varphi)}{\vartheta}$$

und daraus

$$(21) \quad \underline{\underline{N = \frac{\vartheta}{\sin (\vartheta + \varphi) - \vartheta}}}$$

Wenn ϑ und φ so klein sind, daß

$$\sin \vartheta = \vartheta; \quad \cos \vartheta = 1$$

$$\sin \varphi = \varphi; \quad \cos \varphi = 1$$

gesetzt werden können, so geht die Gleichung (21) über in

$$(21a) \quad \underline{\underline{N = \frac{\vartheta}{\varphi}}}$$

Da die Astasierung N im Interesse einer hohen Empfindlichkeit des Apparates groß gewählt wird, (einige Hundert bis Tausend), so ist ϑ im allgemeinen ziemlich groß (mehrere Grade), so daß die strenge Gleichung (21) verwendet werden muß. Deren Auswertung bietet ja aber keine besondern Schwierigkeiten, da ja φ und ϑ aus Beobachtungen vorliegen.

Schwieriger ist die Auflösung der Gleichung (21) nach ϑ , wenn N und φ gegeben sind.

Wir können dies in folgender Weise durchführen. Wir berechnen aus N , $\frac{\tau}{\gamma}$ mit Hilfe der Gleichung (13)

$$\frac{\tau}{\gamma} = 1 + \frac{1}{N}$$

Damit erhalten wir die Gleichung

$$1 + \frac{1}{N} = \frac{\sin (\vartheta + \varphi)}{\vartheta} = \frac{\sin \vartheta \cos \varphi + \cos \vartheta \sin \varphi}{\vartheta}$$

Wir entwickeln nun $\sin \vartheta$ und $\cos \vartheta$, resp. $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ in Reihen nach ϑ resp. φ . φ ist im allgemeinen einige hundertmal kleiner als ϑ . Es genügt daher für eine erste Näherung die Entwicklung für ϑ bis zur 3. Ordnung, diejenige von φ nur bis zur 1. Ordnung zu treiben. Das letztere heißt, daß

$$\cos \varphi = 1; \quad \sin \varphi = \varphi$$

gesetzt werden kann.

Damit erhalten wir

$$1 + \frac{1}{N} = \frac{\vartheta \left(1 - \frac{\vartheta^2}{3!}\right)}{\vartheta} + \frac{\left(1 - \frac{\vartheta^2}{2!}\right) \varphi}{\vartheta}$$

Das Glied $\frac{\vartheta^2}{2} \varphi$ können wir noch vernachlässigen, weil es von höherer als der 3. Ordnung ist; damit erhalten wir:

$$1 + \frac{1}{N} = 1 - \frac{\vartheta^2}{3!} + \frac{\varphi}{\vartheta}$$

oder vereinfacht:

$$(22) \quad \vartheta^3 + \frac{6}{N} \vartheta - 6 \varphi = 0$$

Das ist eine in ϑ kubische Gleichung ohne quadratisches Glied, in Normalform geschrieben. Sie ist für ϑ und φ in Arcus-Maß verstanden. Gehen wir zu Winkelmaß über, so erhalten wir:

$$\vartheta''^3 + \frac{6 \rho'^2}{N} \vartheta'' - 6 \rho'^2 \varphi'' = 0$$

Somit wird:

$$\begin{aligned} \vartheta'' &= \sqrt[3]{3 \rho^2 \varphi'' + \sqrt{(3 \rho^2 \varphi'')^2 + \left(\frac{2 \rho^2}{N}\right)^3}} \\ &+ \sqrt[3]{3 \rho^2 \varphi'' - \sqrt{(3 \rho^2 \varphi'')^2 + \left(\frac{2 \rho^2}{N}\right)^3}} \end{aligned}$$

Für $\varphi = 30''.00$, $N = 1000.00$ erhalten wir nach dieser Näherungsformel (es sind alle Glieder von höherer als der 3. Ordnung vernachlässigt worden)

$$\vartheta'' \cong 15476$$

Wenn man einmal eine solche Näherungslösung hat, so findet man ständig bessere Lösungen, indem man die Newton'sche Methode oder die Regula falsi anwendet.

Die strenge Lösung unter Verwendung 10stelliger Logarithmen wird:

$$\vartheta'' = 15455''.800 = 4^\circ 17' 35''.800$$

Man erkennt also an diesem Beispiel, daß die Näherungslösung nach (21a) gänzlich unbrauchbar ist, indem danach

$$\vartheta'' = 30\,000''$$

würde.

Um die nach dieser statischen Methode mögliche Genauigkeit für die Bestimmung von g_1 abzuschätzen, müssen wir uns über die Genauigkeit in der Bestimmung von ϑ und von φ orientieren.

Wenn wir zur Bestimmung der Neigungen φ einen Hebelarm von ca. 100 cm mit einer feinen Mikrometerschraube verwenden, so kann $m\varphi$ etwa zu $0''.05$ angesetzt werden.

Den Winkel ϑ werden wir am bequemsten mit Hilfe einer Poggen-dorf'schen Spiegelablesung bestimmen.

Wir schätzen den mittleren Fehler in der Bestimmung von ϑ etwa zu

$$m\vartheta = \pm 25''$$

Aus der Differenzierung der Formel (21) nach ϑ und φ erhalten wir:

$$(24) \quad dN = \frac{\sin(\vartheta + \varphi) - \vartheta \cos(\vartheta + \varphi)}{[\sin(\vartheta + \varphi) - \vartheta]^2} d\vartheta - \frac{N^2 \cos(\vartheta + \varphi)}{\vartheta} d\varphi$$

Für den oben behandelten Fall

$$\varphi = 30''; \quad \vartheta = 15455''.8; \quad N = 1000.00$$

erhalten wir

$$dN = 0.1267 d\vartheta'' - 64.52 d\varphi''$$

Mit $m_{\vartheta} = \pm 25''$; $m_{\varphi} = \pm 0''.05$
wird

$$m_{N\vartheta} = \pm 3.17 \quad m_{N\varphi} = \pm 3.23$$

Daraus folgt

$$m_N = \sqrt{(3.17)^2 + (3.23)^2} = \pm 4.53$$

Durch Differenzierung der Formel (18) erhalten wir:

$$(25) \quad d \left(\frac{g_1 - g_0}{g_0} \right) = - \frac{N_1}{N_1 + 1} \frac{1}{N_0^2} dN_0 + \frac{N_0 + 1}{N_0} \frac{1}{(N_1 + 1)^2} dN_1.$$

(Fortsetzung folgt.)

Principes pour la construction d'un nouveau planimètre.

Par *W. K. Bachmann*, géomètre officiel, Lausanne.

La précision des planimètres polaires, et souvent aussi celle des planimètres à disques, laisse à désirer pour le calcul de surfaces de plans cadastraux. Les principales causes d'erreurs sont les suivantes:

- 1° Le fonctionnement imparfait de la roulette. Le réglage de la roulette n'est souvent pas parfait, d'où il résulte des erreurs considérables. Son roulement dépend en outre de la surface du papier. Pour les planimètres à disques, les causes d'erreurs sont les mêmes; toutefois, l'erreur provenant de la surface de roulement est partiellement éliminée par l'emploi du disque. Cette erreur ne sera cependant jamais complètement supprimée, attendu que de petites irrégularités de la surface de roulement se présenteront toujours.
- 2° L'opérateur n'arrive jamais à suivre exactement les limites avec la pointe ou la loupe du planimètre. Pour les limites naturelles, (cours d'eau, etc.) cette erreur n'a certainement pas une grande importance, vu l'incertitude qui règne souvent sur la position exacte de pareilles limites. Pour les limites artificielles, courant en ligne droite d'une borne à l'autre, l'influence de cette erreur sera en général assez grande. Il serait par conséquent intéressant d'examiner la possibilité d'éliminer complètement cette erreur.

Le procédé le plus rationnel pour le calcul de grandes surfaces consiste dans l'emploi du coordinatographe. En choisissant une origine et une base arbitraires, les coordonnées des sommets de la parcelle seront mesurées, à l'aide desquelles, la surface sera ensuite calculée. Les parties restantes, comportant généralement des limites courbes, sont ensuite calculées au planimètre. Cette méthode excellente a malheureusement l'inconvénient d'être un peu longue. Il est donc intéressant d'étudier un autre procédé pour le calcul de surfaces, donnant une précision supérieure à celle du planimètre, et étant moins long que