

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik =  
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

**Herausgeber:** Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

**Band:** 36 (1938)

**Heft:** 4

  

**Artikel:** Das astasierte elastische Pendel als Schweremesser [Fortsetzung]

**Autor:** Baeschlin, C.F.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-197299>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 30.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

SCHWEIZERISCHE  
**Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik**

ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS

Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Kulturtechnik / Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

**Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Organe officiel de l'Association Suisse du Génie rural / Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie

Redaktion: Dr. h. c. C. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständ. Mitarbeiter f. Kulturtechnik: Dr. H. FLUCK, Dipl. Kulturing., Villa Lepontia, Bellinzona-Ravecchia

Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme:

BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORMALS G. BINKERT, A.-G., WINTERTHUR

<p style="text-align: center;"><b>No. 4 • XXXVI. Jahrgang</b> der „Schweizerischen Geometer-Zeitung“ Erscheinend am zweiten Dienstag jeden Monats <b>12. April 1938</b> Inserate: 50 Cts. per einspaltige Nonp.-Zeile</p>	<p style="text-align: center;"><b>Abonnemente:</b> Schweiz Fr. 12. —, Ausland Fr. 15. — jährlich Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaften für Kulturtechnik u. Photogrammetrie Fr. 9. — jährl. Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz. Geometervereins</p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

## Das astasierte elastische Pendel als Schweremesser.

Von Prof. Dr. C. F. Baeschlin, Zollikon.

(Fortsetzung.)

Wählen wir

$$N_0 = 1000 \qquad N_1 = 500$$

$$m_{N_0} = \pm 4.5 \qquad m_{N_1} = \pm 1.1$$

so erhalten wir

$$m \left( \frac{g_1 - g_0}{g_0} \right)_{N_0} = \pm 0.000 \ 00 \ 45$$

$$m \left( \frac{g_1 - g_0}{g_0} \right)_{N_1} = \pm 0.000 \ 00 \ 44$$

Damit wird

$$m \left( \frac{g_1 - g_0}{g_0} \right) = \pm 0.000 \ 00 \ 63$$

Mit

$$g_0 = 980 \text{ cm sec}^{-2}$$

erhalten wir so

$$m (g_1 - g_0) = 0.0062 \text{ cm sec}^{-2} = \pm 6.2 \text{ Milligal}$$

Ob der mittlere Fehler in der Bestimmung von  $\varphi$  noch wesentlich gesteigert werden könnte und das ist das Maßgebende, glaube ich nicht.

Ising hat sein astasiertes Pendel in der Weise praktisch ausgebaut, daß er wirklich einen längern Torsionsdraht verwendet hat. Um dessen Spannung konstant zu halten, verbrachte er die ganze Apparatur in eine gegen Temperaturstrahlung gut geschützte Hülle. Mit Hilfe von schmelzendem Eis hielt er die Temperatur des Innenraumes konstant.

Es würde hier zu weit führen, auf die Konstruktion näher einzugehen; sie ist aber reichlich sperrig und schwer. Wir verweisen auf die Veröffentlichungen von *Ising* a. a. O. und die dort zitierten Quellen.

Wirklich ausgeführte Beobachtungen gaben eine mittlere Abweichung der mit dem Instrument bestimmten Schwerewerte gegenüber nach der Methode der invariablen Pendel bestimmten Werten von  $\pm 0.0056 \text{ cm sec}^{-2}$ , d. h. von

$$\pm 5.6 \text{ Milligal.}$$

Der mittlere Fehler von Schwerebestimmungen nach der Methode der invariablen Pendel beträgt etwa

$$\pm 1.0 \text{ Milligal.}$$

Siehe z. B. astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz, Band 16. Schwerebestimmungen in den Jahren 1915–1918. Bern 1921. S. 141.

In der letzten Zeit hat man wenig von praktischen Resultaten gehört, die nach der statischen Methode für astasierte elastische Pendel gewonnen worden wären. Es scheint, daß auch *Ising* sich der dynamischen Methode zugewendet hat, die wir nun näher betrachten wollen.

#### *Dynamische Methode zur Bestimmung der Astasierung N.*

Die dynamische Methode zur Bestimmung der Astasierung  $N$  besteht darin, daß wir das astasierte Pendel um seine Gleichgewichtslage Schwingungen ausführen lassen und die Schwingungsdauer einer solchen Schwingung bestimmen.

Um diese Schwingungen theoretisch untersuchen zu können, müssen wir die Differentialgleichung der Bewegung des astasierten Pendels aufstellen.

Wir wollen zunächst annehmen, daß die vertikale Lage der Stabachse die Gleichgewichtslage des Systemes sei. Dies ist, wie wir im vorangehenden Abschnitt erkannt haben, der Fall, wenn der Torsionsdraht bei lotrechter Stellung der Stabachse in ungedrilltem Zustande sich befindet.

Sei

$J$  = Massenträgheitsmoment des Systemes für die Drehachse (Achse des Torsionsdrahtes).

$\rho$  = Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse.

$m$  = Masse des Stabes.

$\tau$  = Torsionskonstante des Torsionsdrahtes

$g$  = Schwerebeschleunigung am Beobachtungsort

$\gamma$  =  $m \rho g$

$\vartheta$  = Elongation der Stabachse gegenüber der lotrechten Lage derselben zur Zeit  $t$

Dann lautet die Differentialgleichung der ebenen Bewegung um die Drehachse

$$(26) \quad J \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \tau \vartheta - \gamma \sin \vartheta = 0$$

Nehmen wir dagegen an, daß die ungedrillte Lage des Torsionsdrahtes mit derjenigen Stellung der Stabachse zusammenfalle, welche gegenüber der Zenitrichtung den Winkel  $\varphi$  bildet, so lautet die Differentialgleichung der Bewegung, wenn  $\Theta$  wieder den Winkel der Stabachse mit der Zenitrichtung zur Zeit  $t$  bedeutet

$$(27) \quad J \frac{d^2\Theta}{dt^2} + \tau (\Theta - \varphi) - \gamma \sin \Theta = 0$$

Es muß darauf hingewiesen werden, daß  $\Theta$  hier nicht denselben Winkel bedeutet, den wir bei der statischen Betrachtung mit  $\vartheta$  bezeichnet haben, da dort  $\vartheta$  den Winkel von der mit der ungedrillten Lage des Torsionsdrahtes zusammenfallenden Lage der Stabachse bedeutete. Aus diesem Grunde haben wir hier einen andern Buchstaben gewählt.

Es ist

$$\vartheta = \Theta - \varphi \text{ oder } \Theta = \vartheta + \varphi$$

Die strenge Lösung der beiden Differentialgleichungen 2. Ordnung ist nicht bekannt, weil beide nicht linear sind, wegen der auftretenden Sinusfunktion. Man kann aber Näherungslösungen erhalten, indem man  $\sin \vartheta$  resp.  $\sin \Theta$  in Reihe entwickelt.

Wir wollen zunächst die einfachere Differentialgleichung (26) behandeln.

Wir multiplizieren die Gleichung (26) mit  $\frac{2}{J} \frac{d\vartheta}{dt}$  und erhalten:

$$2 \frac{d\vartheta}{dt} \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right) + 2 \frac{\tau}{J} \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} - 2 \frac{\gamma}{J} \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} = 0$$

Multiplizieren wir sie jetzt mit  $dt$  und beachten, daß

$$2 \frac{d\vartheta}{dt} d \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right) = d \left[ \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \right]$$

$$2 \vartheta d \vartheta = d (\vartheta^2)$$

$$- \sin \vartheta d \vartheta = d (\cos \vartheta)$$

o finden wir

$$d \left[ \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \right] + \frac{\tau}{J} d (\vartheta^2) + 2 \frac{\gamma}{J} d (\cos \vartheta) = 0$$

Durch Integration erhalten wir daraus

$$(28) \quad \left( \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 = - \frac{\tau}{J} \vartheta^2 - 2 \frac{\gamma}{J} \cos \vartheta + K$$

wo  $K$  eine Integrationskonstante ist. Diese Integrationskonstante  $K$  kann in folgender Weise bestimmt werden.

Wenn  $\vartheta_1$  die maximale Elongation darstellt, die sogenannte Amplitude, so kehrt dort die Bewegung bekanntlich um. Für  $\vartheta = \vartheta_1$  ist daher die Winkelgeschwindigkeit  $\frac{d\vartheta}{dt}$  gleich Null. Wir erhalten daher die Gleichung

$$-\frac{\tau}{J} \vartheta_1^2 - 2 \frac{\gamma}{J} \cos \vartheta_1 + K = 0$$

oder

$$(29) \quad K = \frac{\tau}{J} \vartheta_1^2 + 2 \frac{\gamma}{J} \cos \vartheta_1$$

Damit erhalten wir aus Gleichung (28)

$$(30) \quad \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{\tau}{J} (\vartheta_1^2 - \vartheta^2) + 2 \frac{\gamma}{J} (\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta)$$

Wir entwickeln nun  $\cos \vartheta_1$  und  $\cos \vartheta$  in Reihe

$$\cos \vartheta_1 = 1 - \frac{\vartheta_1^2}{2} + \frac{\vartheta_1^4}{24} - \frac{\vartheta_1^6}{720}$$

$$\cos \vartheta = 1 - \frac{\vartheta^2}{2} + \frac{\vartheta^4}{24} - \frac{\vartheta^6}{720}$$

$$2 (\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta) = - (\vartheta_1^2 - \vartheta^2) + \frac{1}{12} (\vartheta_1^4 - \vartheta^4) - \frac{1}{360} (\vartheta_1^6 - \vartheta^6)$$

Damit erhalten wir, unter Weglassung der Glieder 6. Ordnung

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{\tau - \gamma}{J} (\vartheta_1^2 - \vartheta^2) + \frac{\gamma}{12J} (\vartheta_1^4 - \vartheta^4)$$

und daraus durch Auflösung nach  $dt$  und Ausklammerung der Konstanten  $\frac{\tau - \gamma}{J}$

$$(31) \quad dt = \sqrt{\frac{J}{\tau - \gamma}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{(\vartheta_1^2 - \vartheta^2) + \frac{\gamma}{12(\tau - \gamma)} (\vartheta_1^4 - \vartheta^4)}}$$

Aus Gleichung (29) erkennt man, daß dieselbe auch durch

$$\vartheta_2 = -\vartheta_1$$

erfüllt wird. Für  $\vartheta = \vartheta_2 = -\vartheta_1$  findet also auch eine Umkehr des Bewegungssinnes statt. Aus Gleichung (30), die ja noch vollständig streng ist, erkennt man, daß die Winkelgeschwindigkeiten ihrem absoluten Betrage nach für symmetrische Stellen zur Vertikalen gleich groß sind. Aus Gleichung (26) erkennt man auch, daß dies auch für die Winkelbeschleunigungen zutrifft. Die Bewegung ist daher vollständig symmetrisch zur Lotrichtung, die ja auch die Gleichgewichtslage ist.

Die Zeit, die das Pendel braucht, um von der linken Extremstellung ( $\vartheta = -\vartheta_1$ ) bis zur rechten Extremstellung ( $\vartheta = +\vartheta_1$ ) zu gelangen, heißt die sogenannte „Schlagdauer“, die wir mit  $T$  bezeichnen wollen. Sie ist die Hälfte der sogenannten Periode oder Schwingungsdauer der Bewegung.

Durch Integration der Gleichung (31) zwischen den Grenzen  $\vartheta = -\vartheta_1$  und  $\vartheta = +\vartheta_1$  erhalten wir die Schlagdauer  $T$ .

$$(32) \quad T = \sqrt{\frac{J}{\tau - \gamma}} \int_{-\vartheta_1}^{+\vartheta_1} \frac{d\vartheta}{\sqrt{(\vartheta_1^2 - \vartheta^2) + \frac{\gamma}{12(\tau - \gamma)} (\vartheta_1^4 - \vartheta^4)}}$$

Das in (32) auftretende Integral ist ein sogenanntes elliptisches Integral.

Führen wir in das Integral die Astasierung  $N = \frac{\gamma}{\tau - \gamma}$  ein, so wird es:

$$(32a) \quad T = \sqrt{\frac{J}{\tau - \gamma}} \int_{-\vartheta_1}^{+\vartheta_1} \frac{d\vartheta}{\sqrt{(\vartheta_1^2 - \vartheta^2) + \frac{N}{12} (\vartheta_1^4 - \vartheta^4)}}$$

Da  $N$  verhältnismäßig groß gewählt wird, so ist das 2. Glied unter der Quadratwurzel durchaus nicht so klein, wie man nach der 4. Potenz der  $\vartheta$  zunächst vermuten möchte. Man darf also den 2. Ausdruck unter der Quadratwurzel für beträchtliches  $N$  und nicht zu kleine Amplitude  $\vartheta_1$  nicht vernachlässigen. Dagegen darf das Glied 6. Ordnung

$$- \frac{N}{360} (\vartheta_1^6 - \vartheta^6)$$

anstandslos weggelassen werden.

Vernachlässigen wir aber nun zunächst einmal das Glied 4. Ordnung doch, so erhalten wir, da

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x$$

$$\int \frac{d\vartheta}{\sqrt{\vartheta_1^2 - \vartheta^2}} = \int \frac{d\vartheta}{\vartheta_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_1}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_1}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\vartheta}{\vartheta_1}\right)^2}}$$

Setzen wir

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_1} = x$$

so wird

$$x \text{ für } \vartheta = \vartheta_1 = +1$$

$$x \text{ für } \vartheta = -\vartheta_1 = -1$$

Damit wird

$$(33) \quad T = \sqrt{\frac{J}{\tau - \gamma}} \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \pi \sqrt{\frac{J}{\tau - \gamma}}$$

Der Wert der Schlagdauer  $T$  nach (33) gilt für sehr kleine Amplituden. Wir wollen ihn mit  $T_0$  bezeichnen.

$$(33a) \quad T_0 = \pi \sqrt{\frac{J}{\tau - \gamma}} \quad \begin{array}{l} \text{Schlagdauer bei symmetrischer Schwingung} \\ \text{für sehr kleine Amplitude.} \end{array}$$

(Schluß folgt.)

---

## Papier.

Von *W. Fisler*, Adjunkt des städtischen Vermessungsamtes Zürich.

*Papier*, einer der am meisten verwendeten Grundstoffe; ob es sich lohnt, hierüber in unserer Fachzeitung einen Aufsatz zu schreiben? Papier ist so alt wie unsere Kulturgeschichte, es beherrscht unser ganzes Wirtschaftsleben. Tausendfach ist seine Verwendung, unzählig sind die Ansprüche, die an das Papier gestellt werden. Klar umrissen sind sie, sobald wir uns auf eine bestimmte Zweckbestimmung beschränken.

Auch der Geometer braucht Papier, sehr viel und sehr gutes, seine ganze Arbeit überträgt er darauf, demgemäß stellt er auch seine Anforderungen an dasselbe und das hat zur Folge, daß an der Vervollkommnung dieses so wichtigen Grundstoffes immer noch gearbeitet wird. Das veranlaßt mich, dieses Thema einmal aufzugreifen, vielleicht gibt dies die Anregung zu weiteren Beiträgen aus dem Leserkreis.

Vor mir liegt ein Aufsatz über die gleiche Materie aus der Zeitschrift „Mitteilungen aus dem Markscheidewesen“, welcher namentlich über die Fabrikation von Ersatzstoffen für Papier interessante Mitteilungen enthält.

Das Papier dient dazu, unsere Messungen und Beobachtungen aufzunehmen, in Zahl und Zeichnung festzuhalten für die weitere Verarbeitung sowohl, wie für die dokumentarische Niederlegung unserer Messungsergebnisse. Im letztern Moment liegt die wichtigste Verwendung dieses Materials und in dieser Richtung müssen wir auch besondere Ansprüche an dasselbe stellen.

Beginnen wir mit der Feldarbeit. Hier verwenden wir das Papier zur Aufnahme unserer Notizen und Zeichnungen. Wir und das Papier müssen dem Wetter standhalten, bei Sonne, Wind und Regen müssen wir arbeiten. Unsere Handrisse und Notizblätter dürfen trotzdem nicht vergilben an der Sonne, zerreißen am Wind oder verschmieren im Regen. Sehr oft werden im Bureau von den Notizblättern und Handrissen Lichtpausen hergestellt, was nur möglich ist, wenn das Papier die Notizen in schwarzer Zeichnung annimmt und trotz den Wettereinflüssen weiß, sauber und glatt bleibt. Diese Erfordernisse bedingen ein Papier, das wenig oder gar keinen Holzstoff enthält. Für Handrisse, von denen Lichtpausen hergestellt werden müssen, eignet sich nach unserer Erfahrung am besten das „Whatmann“-Handpapier. Es ist aus Hadern hergestellt, ist zähe, bleibt in der Bearbeitung weiß, ist schwach durchscheinend und gibt von schwarzer Zeichnung in direkter Kopie gute Vervielfältigungen.

Werden die Feldaufnahmen im Durchschreibeverfahren notiert, so