

# Die Beziehungen zwischen schweizerischen und italienischen geographischen Koordinaten [Schluss]

Autor(en): **Kobold, F. v.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **36 (1938)**

Heft 8

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-197309>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SCHWEIZERISCHE

# Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik

ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS

Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Kulturtechnik / Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

## Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Organe officiel de l'Association Suisse du Génie rural / Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie

Redaktion: Dr. h. c. C. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständ. Mitarbeiter f. Kulturtechnik: Dr. H. FLUCK, Dipl. Kulturing., Villa Lepontia, Bellinzona-Ravecchia

Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme:

BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORMALS G. BINKERT, A.-G., WINTERTHUR

<p><b>No. 8 • XXXVI. Jahrgang</b> der „Schweizerischen Geometer-Zeitung“ Erscheinend am zweiten Dienstag jeden Monats <b>9. August 1938</b> Inserate: 50 Cts. per einspaltige Nonp.-Zeile</p>	<p><b>Abonnemente:</b> Schweiz Fr. 12.—, Ausland Fr. 15.— jährlich Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaften für Kulturtechnik u. Photogrammetrie Fr. 9.— jährl. Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz. Geometervereins</p>
---	---

## Die Beziehungen zwischen schweizerischen und italienischen geographischen Koordinaten.

Von Dipl.-Ing. *F. v. Kobold*, Eidg. Landestopographie, Bern.

(Schluß.)

So folgt aus (2b)

$$d\Delta B = s \cdot \cos \alpha_m \frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{1}{M} \right) dB_m - \frac{1}{M} s \cdot \sin \alpha_m \frac{\Delta L}{2 \cos B} \cdot dB_0$$

oder mit Berücksichtigung von (2a) und (2b), und Gleichsetzung von  $B$  und  $B_m$  im zweiten Glied

$$(4a) \quad d\Delta B = M \cdot \Delta B \cdot \frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{1}{M} \right) dB_m - \frac{N}{M} \cdot \frac{\Delta L^2}{2} dB_0$$

Den Differentialquotienten des ersten Ausdrucks ermitteln wir aus

$$\frac{1}{M} = \frac{V^3}{c} \quad V = (1 + e'^2 \cdot \cos^2 B)$$

$$\frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{1}{M} \right) = \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{\partial V}{\partial B} \right)' \cdot \frac{V^3}{c} = \frac{3V^2}{c} \cdot \frac{1}{2} (1 + e'^2 \cdot \cos^2 B)^{-\frac{1}{2}} \cdot -e'^2 \cdot 2 \sin B \cdot \cos B$$

$$\underline{\underline{\frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{1}{M} \right) = - \frac{3Ve'^2}{2c} \cdot \sin 2B}}$$

Die Variation dieses Wertes ist sehr gering, da  $V$  und für mittlere Breiten auch  $\sin 2B$  ziemlich konstant sind. Aus den Tafeln in Jordan III folgt, daß eine Veränderung der Breite von mehr als 1" nötig ist, damit sich die letzte Stelle von  $\log\left(\frac{s}{M}\right)$  um eine Einheit ändert. Für mittlere Breiten zwischen  $37^\circ$  und  $55^\circ$  darf für  $\frac{\partial}{\partial B}\left(\frac{1}{M}\right)$  mit einem mittlern Koeffizienten, dessen Herleitung — weil offensichtlich einfach — übergangen werden kann,

$$(4b) \quad K_1 = -1.575 \cdot 10^{-9}$$

pro Bogensekunde in  $dB$  gerechnet werden, wobei  $M$  in Metern einzusetzen ist. Die Breite des Endpunktes, die sich berechnet zu

$$B = B_0 + \Delta B$$

wird also verändert um

$$dB = dB_0 - \frac{N}{M} \cdot \frac{\Delta L^2}{2} dB_0 + K_1 \cdot M \cdot \Delta B \cdot dB_m$$

Die zwei hintern Glieder sind sehr klein; sie erreichen für die maximalen  $\Delta L$ ,  $\Delta B$  und  $dB_0$  Werte von  $0''.015$  und  $0''.005$ , so daß  $\frac{N}{M}$  durch 1 und  $dB_m$  durch  $dB_0$  ersetzt werden darf; ferner führen wir an Stelle von  $M$  einen mittlern Erdradius  $R$  ein. Damit erhalten wir als Schlußausdruck

$$(4) \quad \underline{dB = dB_0 \left(1 - \frac{\Delta L^2}{2} + K_1 \cdot R \cdot \Delta B\right)}$$

Man erkennt ohne weiteres, daß die ersten zwei Glieder genau dem Kugelausdruck (3a) entsprechen; der Verlauf der Herleitung hat außerdem gezeigt, daß die Einführung der Näherungswerte für  $\frac{\partial B_m}{\partial B_0}$  und  $\frac{\partial \alpha_m}{\partial B_0}$  genügt, da diese als Faktoren kleiner Größen auftreten.

Zur Bestimmung des Einflusses von  $dB_0$  auf  $\Delta L$  gehen wir von Gleichung (2a) aus, die differenziert ergibt

$$d\Delta L = \frac{1}{N} \cdot \frac{s \cdot \cos \alpha_m}{\cos B_m} d\alpha_m + \frac{1}{N} \cdot s \cdot \sin \alpha_m \frac{\sin \alpha_m}{\cos^2 B_m} dB_m + \frac{s \cdot \sin \alpha_m}{\cos B_m} \frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{1}{N}\right) \cdot dB_m$$

Mit Hilfe der Gleichungen (2b) und (3b) formen wir den Ausdruck mit  $d\alpha_m$  wie folgt um

$$da_m \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{s \cdot \cos \alpha_m}{\cos B_m} = \frac{M}{N} \cdot \frac{\Delta B}{\cos B_m} \cdot \frac{\Delta L}{2 \cdot \cos B_m} \cdot dB_m \sim \frac{\Delta B \cdot \Delta L}{2 \cos^2 B_m} dB_m$$

Die Weglassung von  $\frac{M}{N}$  ist deshalb gerechtfertigt, weil dieser Quotient vor einem Faktor gleicher Größe wie der Ausdruck  $\frac{\Delta L^2}{2}$ , für den die Vereinfachung bei der Herleitung von  $d\Delta B$  nachgewiesen wurde, steht.

Die Bildung von  $\frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{1}{N} \right)$  geschieht in ähnlicher Weise wie die von  $\frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{1}{M} \right)$ . Sie wird hier übergangen, da die Tafeln in Jordan III zeigen, daß  $\frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{1}{N} \right)$  kleiner und konstanter ist als  $\frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{1}{M} \right)$ , so daß wir analog setzen dürfen

$$1'' \cdot \frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{1}{N} \right) = K_2 = -5.24 \cdot 10^{-10}$$

und

$$\frac{s \cdot \sin \alpha_m}{\cos B_m} \frac{\partial}{\partial B} \left( \frac{1}{N} \right) dB_m = K_2 \cdot R \cdot \Delta L \cdot dB_m$$

Damit wird, unter Berücksichtigung von (2a) im  $dB_m$ -Glied

$$d\Delta L = \Delta L \left( \operatorname{tg} B_m + \frac{\Delta B}{2 \cos^2 B_m} \right) \cdot dB_m + K_2 \cdot R \cdot \Delta L \cdot dB_m$$

Hier bedeutet der Klammerausdruck nichts anderes als  $\operatorname{tg} B$ . Ersetzt man  $dB_m$  gemäß dem Ausdruck (4), so wird

$$d\Delta L = \Delta L (\operatorname{tg} B + K_2 \cdot R) \cdot \left( 1 - \frac{\Delta L^2}{8} + K_1 \cdot R \cdot \frac{\Delta B}{2} \right) dB_0$$

Das einflußreichste Glied höherer Ordnung ist unzweifelhaft

$$\frac{\Delta L^3}{8} \cdot \operatorname{tg} B \cdot dB_0$$

das bei maximalen  $\Delta L$  und  $dB_0$  und mittlerer Breite den Betrag von 0".0001 erreicht, also praktisch keine Rolle spielt. Man darf daher setzen

$$(5a) \quad d\Delta L = \Delta L (\operatorname{tg} B + K_2 \cdot R) dB_0$$

Für die praktische Rechnung ist ein Ausdruck vorzuziehen, der an Stelle der Breite  $B$  die Nullpunktsbreite  $B_0$  enthält. Führt man daher

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} B_0 + \frac{\Delta B}{\cos^2 B_0} \dots$$

ein, so wird

$$(5) \quad \underline{d\Delta L = \Delta L \left( \operatorname{tg} B_0 + \frac{\Delta B}{\cos^2 B_0} + K_2 \cdot R \right) dB_0}$$

b) *Der Einfluß einer Veränderung der Länge des Nullpunktes.*

Aus der geometrischen Anschauung und aus den Fundamentalformeln folgt ohne weiteres, daß bei einer Veränderung der Länge des Nullpunktes um  $\Delta L_0$  die Breitendifferenz  $\Delta B$  erhalten bleibt, während alle Längen um  $\Delta L_0$  verändert werden; d. h. die Änderung der Länge  $DL$ , die nicht klein zu sein braucht, beträgt

$$(6) \quad \underline{DL = \Delta L_0}$$

c) *Der Einfluß einer Verdrehung der Ausgangsseite.*

Denkt man sich das Anfangsazimut  $\alpha_0$  um den kleinen Betrag  $d\alpha_0$  verändert, so tritt auch in  $\alpha_m$  und  $B_m$  und in dessen Funktionen  $N$  und  $M$  eine Änderung ein. Die geometrische Anschauung läßt vermuten, daß  $dB_m$  nur klein sein kann, so daß an Stelle des Ausdrucks  $\frac{\partial B_m}{\partial \alpha_0}$ , der sich aus den Gleichungen (2) nicht unmittelbar bilden läßt,

der Differentialquotient  $\frac{\partial \varphi_m}{\partial \alpha_0}$  für die Kugel als Näherung gesetzt werden kann. Differenziert man in dem aus Figur 1 folgenden Cosinussatz

$$\sin \varphi_1 = \cos s \cdot \sin \varphi_0 + \sin s \cdot \cos \varphi_0 \cdot \cos \alpha_0$$

$\varphi_1$  nach  $\alpha_0$ , so wird

$$\cos \varphi_1 d\varphi_1 = -\sin s \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sin \alpha_0 d\alpha_0$$

oder durch Anwendung des Sinussatzes

$$d\varphi_1 = -\sin \Delta\lambda \cdot \cos \varphi_0 \cdot d\alpha_0 \sim -\Delta\lambda \cdot \cos \varphi_0 d\alpha_0$$

und

$$(7a) \quad d\varphi_m = -\frac{\Delta\lambda}{2} \cdot \cos \varphi_0 \cdot d\alpha_0$$

Für  $\Delta L_{\max} 4''$  und  $d\alpha_{0\max} = 10''$  beträgt danach  $d\varphi_m \sim dB_{m\max} \sim 0''.35$ . Die  $M$  und  $N$  ändern daher, wie unter a) gezeigt wurde, praktisch nicht.

Zur Untersuchung der Abhängigkeit zwischen  $d\alpha_0$  und  $da_m$  gehen wir aus von

$$\alpha_0 = \alpha_m - \frac{\Delta\alpha}{2}$$

daher wird

$$d\alpha_0 = da_m - \frac{\partial}{\partial\alpha} \left( \frac{\Delta\alpha}{2} \right) da_m$$

oder in guter Näherung

$$da_m = d\alpha_0 \left\{ 1 + \frac{\partial}{\partial\alpha} \left( \frac{\Delta\alpha}{2} \right) + \left[ \frac{\partial}{\partial\alpha} \left( \frac{\Delta\alpha}{2} \right) \right]^2 \right\}$$

Aus (2c) und (7a) folgt nun

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \left( \frac{\Delta\alpha}{2} \right) = \frac{1}{2N} \operatorname{tg} B_m \cdot s \cdot \cos \alpha_m - \frac{1}{2N} \cdot s \cdot \sin \alpha \frac{\cos B_0 \cdot \Delta L}{\cos^2 B_m}$$

Der zweite Ausdruck ist viel kleiner als der erste, da er neben  $s$  auch  $\Delta L$  enthält. Die Verwendung des Kugelausdrucks  $\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha_0}$  war also gerechtfertigt. Praktisch genau genug darf  $\cos B_0 = \cos B_m$  gesetzt werden, und damit wird unter Berücksichtigung von (2a) und (2b)

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \left( \frac{\Delta\alpha}{2} \right) = \frac{M}{N} \cdot \operatorname{tg} B_m \frac{\Delta B}{2} - \frac{\Delta L^2}{2}$$

Das gesuchte  $da_m$  erhält daher den Wert

$$da_m = d\alpha_0 \left( 1 + \frac{M}{N} \cdot \operatorname{tg} B_m \frac{\Delta B}{2} - \frac{\Delta L^2}{2} + \left( \frac{M}{N} \right)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 B_m \frac{\Delta B^2}{4} \right)$$

Differenziert man jetzt (2b) und setzt  $da_m$  ein, so ergibt sich

$$d\Delta B = - \frac{1}{M} \cdot s \cdot \sin \alpha_m \left( 1 + \frac{M}{N} \cdot \operatorname{tg} B_m \cdot \frac{\Delta B}{2} - \frac{\Delta L^2}{2} \right. \\ \left. + \left( \frac{M}{N} \right)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 B_m \cdot \frac{\Delta B^2}{4} \right) d\alpha_0$$

wo das Glied vor der Klammer nach (2a) gleich  $\frac{N}{M} \cdot \Delta L \cdot \cos B_m$  gesetzt werden darf. Durch Ausmultiplizieren entsteht als größter Ausdruck dritter Ordnung  $\frac{1}{2} \cdot \Delta L^3 \cdot d\alpha_0$ , das, wie bei a) nachgewiesen wurde, ohne Einfluß ist, wenn wir  $d\alpha_{0\max}$  gleich  $10''$  annehmen. Damit fallen alle quadratischen Ausdrücke in der Klammer außer Betracht.

Setzt man ferner  $\frac{M}{N}$  vor kleinen Gliedern gleich eins — analog zum Abschnitt a) — so bleibt

$$d\Delta B = - \frac{N}{M} \cdot \Delta L \cdot \cos B_m \left( 1 + \operatorname{tg} B_m \frac{\Delta B}{2} \right) d\alpha_0$$

oder

$$(7) \quad \underline{d\Delta B = - \frac{N}{M} \cdot \Delta L \cdot \cos B_0 \cdot d\alpha_0}$$

Differenziert man in analoger Weise (2a) und führt wieder den Kugelausdruck  $\frac{\partial \varphi_m}{\partial \alpha_0}$  ein, so wird

$$d\Delta L = \frac{1}{N} \cdot \frac{s \cdot \cos \alpha_m}{\cos B_m} \left( 1 + \frac{M}{N} \operatorname{tg} B_m \frac{\Delta B}{2} - \frac{\Delta L^2}{2} + \left( \frac{M}{N} \right)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 B_m \right. \\ \left. \cdot \frac{\Delta B^2}{4} \right) d\alpha_0 - \frac{1}{N} s \sin \alpha_m \cdot \frac{\sin B_m \cdot \Delta L}{2 \cdot \cos^2 B_m} \cdot \cos B_0 d\alpha_0$$

was bei Vernachlässigung von  $\frac{M}{N}$  und von Gliedern dritter Ordnung und unter Berücksichtigung von (2b) übergeht in

$$d\Delta L = \frac{M}{N} \cdot \frac{\Delta B}{\cos B_m} \left( 1 + \operatorname{tg} B_m \frac{\Delta B}{2} \right) \cdot d\alpha_0 - \frac{\Delta L^2}{2} \sin B_m d\alpha_0$$

wo zur Vereinfachung der Rechnung im quadratischen Glied an Stelle von  $\sin B_m$  genau genug  $\sin B_0$  gesetzt werden darf, so daß schließlich bleibt

$$(8) \quad d\Delta L = \left\{ \frac{M}{N} \cdot \frac{\Delta B}{\cos B_0} - \frac{\Delta L^2}{2} \sin B_0 \right\} d\alpha_0$$

Sowohl in (7) als auch in (8) darf für  $\frac{M}{N}$  ein der mittlern Breite aller Vergleichspunkte entsprechender Mittelwert verwendet werden.

d) *Einfluß einer Veränderung der Länge der Ausgangsseite.*

Läßt man in den Gleichungen (2a) und (2b)  $s$  zu  $ds = s \cdot d\sigma$  werden, so wird

$$(9) \quad d\Delta L = d\sigma \cdot \Delta L$$

$$(10) \quad d\Delta B = d\sigma \cdot \Delta B$$

e) Die Transformationsformeln für das Ellipsoid.

Summieren wir die Ausdrücke (4), (5), (6), (7), (8), (9) und (10), so erhalten wir die an der Länge  $L$  und an der Breite  $B$  entstehenden Fehler

$$(11) \quad dB = dB_0 \left( 1 - \frac{\Delta L^2}{2} + K_1 \cdot R \cdot \Delta B \right) - d\alpha_0 \cdot \frac{N}{M} \cdot \Delta L \cdot \cos B_0 \\ + d\sigma \cdot \Delta B$$

$$(12) \quad dL = dB_0 \left( \operatorname{tg} B_0 + \frac{\Delta B}{\cos^2 B_0} + K_2 R \right) \cdot \Delta L + d\alpha_0 \left( \frac{M}{N} \frac{\Delta B}{\cos B_0} \right. \\ \left. - \frac{\Delta L^2}{2} \cdot \sin B_m \right) + d\sigma \cdot \Delta L + \Delta L_0$$

Bezeichnen wir mit  $\delta B$  und  $\delta L$  die aus den gegebenen geographischen Koordinaten beider Systeme gerechneten Differenzen, so entstehen aus (11) und (12) die Fehlergleichungen

$$(13) \quad \underline{v_B} = \underline{dB_0} \left( 1 - \frac{\Delta L^2}{2} + K_1 \cdot R \cdot \Delta B \right) - \underline{d\alpha_0} \frac{N}{M} \Delta L \cdot \cos B_0 \\ + \underline{d\sigma} \cdot \Delta B - \delta B$$

$$(14) \quad \underline{v_L} = \underline{dB_0} \left( \operatorname{tg} B_0 + \frac{\Delta B}{\cos^2 B_0} + K_2 R \right) \Delta L + \underline{d\alpha_0} \left( \frac{M}{N} \frac{\Delta B}{\cos B_0} \right. \\ \left. - \frac{\Delta L^2}{2} \sin B_m \right) + \underline{d\sigma} \cdot \Delta L + \underline{\Delta L_0} - \delta L$$

Hier stellt sich die Frage nach den Gewichten der  $v_B$ - und  $v_L$ -Gleichungen. Für die Gesamtheit aller Punkte werden die linearen mittlern Fehler in Richtung des Meridians und des Parallelkreises einander gleich sein. Führt man sie in mittlere Fehler der geographischen Koordinaten über, so wird der Wert für die Breite  $\cos B$  — mal den Wert für die Länge, wenn vom Einfluß der Exzentrizität abgesehen wird. Daraus folgt, daß die Gewichte der  $v_B$ - und  $v_L$ -Gleichungen sich zueinander verhalten wie  $1 : \cos^2 B$ .

Die Transformationsformeln (13) und (14) sind in erster Näherung lineare Funktionen der Längen- und Breitendifferenz in bezug auf den Nullpunkt; denn auch für die äußersten Punkte sind die hintern Glieder der Klammern klein.

Soll die Transformation nur für einen ganz kleinen Raum durchgeführt werden, so können sie außer acht gelassen werden, und ferner



darf  $\frac{M}{N}$  gleich eins angenommen werden. Die Gleichungen (13) und (14) nehmen dadurch die stark vereinfachte Gestalt an

$$(15) \quad v_B = \underline{dB_0} - \underline{d\alpha_0} \cdot \Delta L \cdot \cos B_0 + \underline{d\sigma} \cdot \Delta B - \delta B$$

$$(16) \quad v_L = \underline{dB_0} \cdot \operatorname{tg} B_0 \cdot \Delta L + \underline{d\alpha_0} \frac{\Delta B}{\cos B_0} + \underline{d\sigma} \cdot \Delta L + \underline{\Delta L_0} - \delta L$$

Sowohl hier, als auch in den Gleichungen (13) und (14) kann  $\Delta L_0$  vorgängig eliminiert werden, so daß nur drei Normalgleichungen aufzustellen und zu lösen sind.

Die Transformation geographischer Koordinaten eines nicht zu großen Gebietes ist der ebenen Umformung sehr ähnlich. Während aber in der Ebene Nullpunktsfehler und Verdrehung beliebige endliche Beträge annehmen können, beruhen die Gleichungen (13) bis (16) auf der Voraussetzung kleiner  $dB_0$  und  $d\alpha_0$ , was in Landesvermessungssystemen immer erfüllt ist.

Ähnliche Differentialformeln für die geodätische Linie finden sich in Helmert, Höhere Geodäsie, Band I und in Jordan III. Die Herleitung bei Helmert ist von äußerster Strenge und berücksichtigt auch Fehlereinflüsse, die ihres geringen Betrages wegen in der praktischen Transformationsrechnung keine Rolle spielen. Die Schlußformeln müßten daher für unsern Zweck wesentlich vereinfacht und umgeformt werden. Auch die Ausdrücke in Jordan III, die im Abschnitt über Lotabweichungen hergeleitet werden, lassen sich nicht ohne weiteres verwenden, da sie nicht nur  $\Delta L$  und  $\Delta B$ , sondern auch  $\alpha$  als Argumente enthalten. In der dritten Auflage ist der Gedankengang der Entwicklungen dem unsrigen ähnlich; in den spätern Ausgaben sind die Grundlagen wesentlich erweitert worden, um allgemeiner gültige Ausdrücke zu erhalten.

### III. Transformationsbeträge zwischen schweizerischen und italienischen Koordinaten.

Von den beiden Ländern wurde vereinbart, daß ihre um die Transformationsbeträge verbesserten geographischen Koordinaten nicht mehr als 0".01 voneinander abweichen sollten. Ganz ausnahmsweise mußte die Toleranz etwas erweitert werden. Die Transformationsgrößen waren aus einer Reihe günstig gelegener Triangulationspunkte zu bestimmen.

Es wäre nahe gelegen, hierfür das dargelegte Verfahren zu verwenden; doch wurde davon abgesehen, weil die Differenzen  $\delta L$  und  $\delta B$  in einzelnen Abschnitten der Grenze in keiner Weise mit den Werten benachbarter Gebiete zusammenzuhängen schienen. Es wurde daher

vermutet, daß die Dreiecksnetze systematische Fehler enthielten, die von den Transformationsgleichungen nicht erfaßt würden, so daß eine über große Teile der Grenze sich erstreckende gesetzmäßige Umformung Verbesserungen  $dL$  und  $dB$  liefern würde, die nicht innerhalb der festgelegten Toleranzen blieben. Man behalf sich dadurch, daß man aus beidseitig der Grenze und auf ihr gelegenen, gemeinsamen Punkten Dreiecke zeichnete, und in diese entsprechend den  $\delta L$  und  $\delta B$  der Dreiecksspitzen Transformationsgerade konstruierte<sup>1</sup>. Dieses Verfahren hatte natürlich den Vorteil, daß sich im allgemeinen die Transformationsbeträge für Grenzpunkte im Dreiecksinnern den  $\delta L$  und  $\delta B$  sehr gut anpaßten, weil diese Punkte meist irgendwie aus den Dreiecksspitzen bestimmt worden waren. Ein Nachteil dieser lokalen Transformationen ist dagegen die Tatsache, daß Gesetzmäßigkeiten, die sich über größere Gebiete erstrecken, nicht zum Ausdruck kommen.

Es mußte daher auch nach Vollendung der Grenzberechnungen noch reizvoll sein, Transformationsformeln zu suchen, die für größere Bereiche der Grenze gültig sind.

Die Ergebnisse solcher Umformungen für drei verschiedene Abschnitte sind folgende.

### 1. Transformationsformeln für das Gebiet des Kantons Tessin.

Als Grundlage dienen die 23, in Spalte 1 der Tabelle aufgeführten und in Figur 2 eingetragenen Triangulationspunkte, die, von wenigen Ausnahmen abgesehen, in beiden Ländern den Netzen höherer Ordnung angehören. In den Spalten 2 und 8 befinden sich die schweizerischen, in 3 und 9 die italienischen geographischen Koordinaten. Aus ihnen werden die  $\delta B$  in Kolonne 4 und die  $\delta L$  in 10 gebildet. Diese Werte sind so groß, daß sie, um die Berechnung der Normalgleichungen zu erleichtern, irgendwie reduziert werden müssen. Durch die Elimination nach Gauß wird der Wert  $\delta L_{\text{red}}$  in Spalte 13 ohne weiteres klein. Um die  $\delta B$  zu reduzieren, wählt man einen Näherungswert  $\delta B_m$ , der im Beispiel als Mittelwert aller  $\delta B$  gebildet wurde, und rechnet die kleinen Größen

$$fB = \delta B_m - \delta B$$

in Spalte 7. Als Einheit der  $\delta L_{\text{red}}$  und der  $fB$  gilt die Tausendstel-Sekunde. Die  $\Delta B$  und  $\Delta L$  stellen Breiten- und Längendifferenz in Minuten bezüglich des Nullpunktes Bern dar; in den Spalten 6 und 12 sind sie nach dem Gauß'schen Verfahren zur Elimination von  $\Delta L_0$  reduziert. Die mittlere Breite aller Punkte beträgt  $B_m = 46^\circ 08' 50''$ ; das Gewicht der Fehlergleichungen für die Länge wird daher  $\cos^2 B_m = 0.4800$ .

<sup>1</sup> Diese Methoden sind in der Einleitung des demnächst erscheinenden Bandes über die trigonometrischen Ergebnisse der Grenzvermessung eingehend beschrieben.

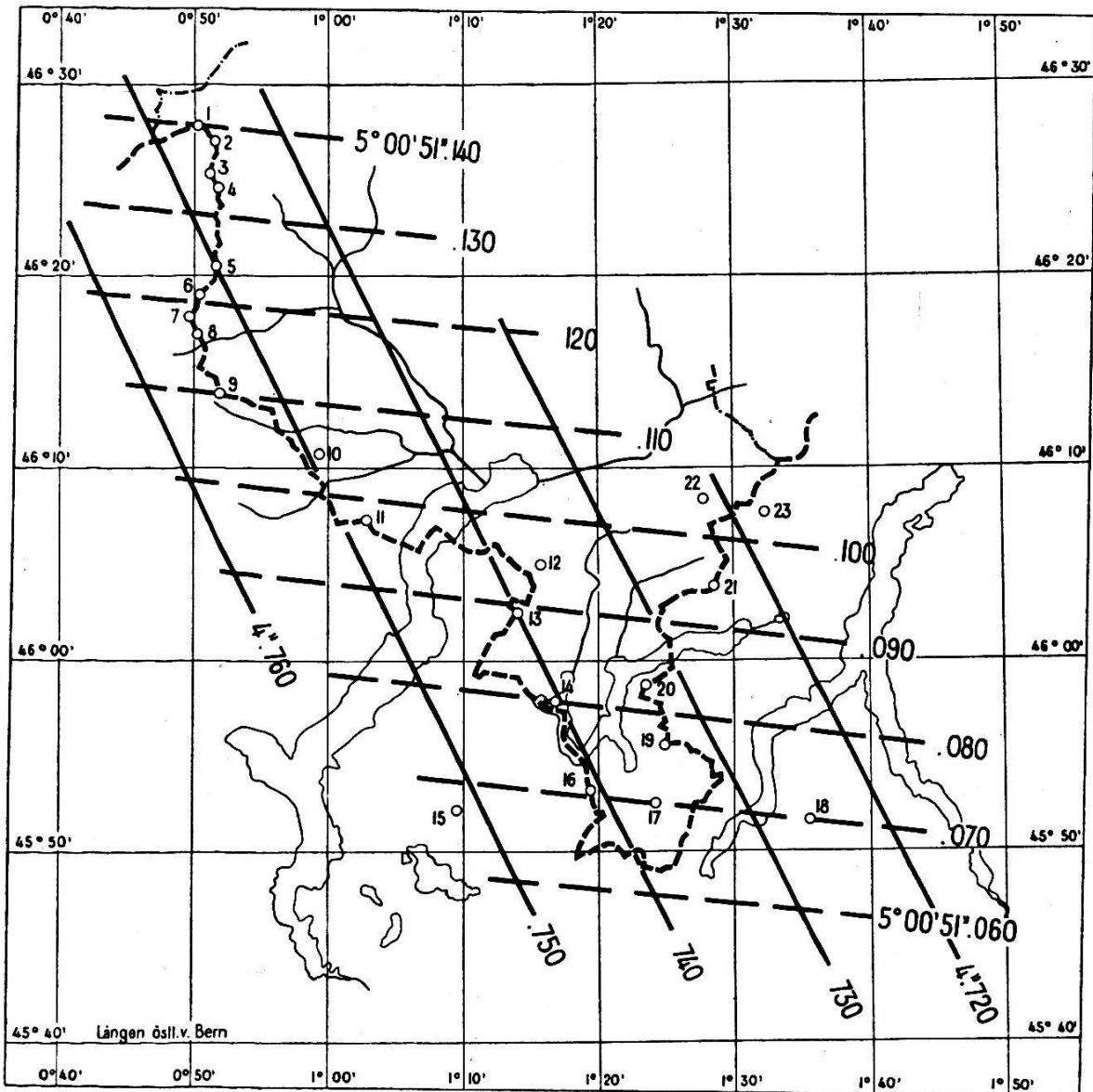


Fig. 2.

Mit diesen Koeffizienten werden die Normalgleichungen gebildet, aus deren Auflösung als Unbekannte

$$dB_0 = -4''.789$$

$$d\alpha_0 = +1.51 \pm 0.12$$

$$d\sigma = +0.74 \pm 0.14$$

$$\Delta L_0 = 5^\circ 00' 51''.185$$

hervorgehen, die folgende Transformationsgleichungen liefern

$$I \quad \delta B = +0.74 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta B + 1.05 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta L - 4''.789$$

$$\delta L = -2.18 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta B - 0.21 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta L - 5^\circ 00' 51''.185$$

1.	2. B schw		3. B ital.	4. SB ital.-schw	5. ΔB B-B Bern	6. ΔB SB-SS red.	7. f <sub>m</sub> 10 <sup>-3</sup>	8. L schw.		9. L ital.		10. SL ital.-schw.	11. ΔL L-Bern	12. ΔL red.	13. SL red.	14. V <sub>B</sub>	15. SB ausgeg.	16. V <sub>L</sub>	17. SL ausgeg.																			
	0	1						0	1	0	1									0	1																	
Bern																																						
	46	54	28																																			
1	San Giacomo	46	27	53	709	48.964	-4.745	-26.58	+19.07	-4	+1	00	27	397	-4	00	23	734	51.131	+60.45	-17.83	-29	+1	-4.746	+9	51.140												
2	P. del Termine	46	26	58	953	54.207	-4.746	-27.48	+18.17	-5	+1	01	26	464	-3	59	24	666	51.130	+61.43	-16.85	-28	-1	-4.745	+8	51.138												
3	Kastelhorn	46	25	25	957	21.204	-4.753	-29.03	+16.62	-12	+1	01	08	246	-3	59	42	887	51.133	+61.13	-17.15	-31	-6	-4.747	+2	51.135												
4	Basodino	46	24	46	203	41.451	-4.752	-29.70	+15.95	-11	+1	01	47	802	-3	59	03	315	51.117	+61.80	-16.48	-15	-5	-4.747	+16	51.133												
5	Wandfluhhorn	46	20	42	756	37.994	-4.762	-33.75	+11.90	-21	+1	01	33	220	-3	59	17	905	51.125	+61.55	-16.73	-23	-12	-4.750	-1	51.124												
6	Monte Rizo	46	19	14	660	09.912	-4.748	-35.22	+10.43	-7	+1	00	18	833	-4	00	32	291	51.124	+60.32	-17.96	-22	+4	-4.752	-3	51.121												
7	Sonnenhorn	46	17	58	282	53.525	-4.757	-36.50	+9.15	-16	+0	59	21	253	-4	01	29	878	51.131	+59.35	-18.93	-29	-3	-4.754	-13	51.118												
8	Cma-di Mantegna	46	17	17	289	12.541	-4.748	-37.18	+8.47	-7	+0	59	50	452	-4	01	00	668	51.120	+59.83	-18.45	-18	+6	-4.754	-3	51.117												
9	P. Medaro	46	14	03	343	58.598	-4.745	-40.42	+5.23	-4	+1	01	48	313	-3	59	02	804	51.117	+61.80	-16.48	-15	+10	-4.755	-7	51.110												
10	P. di Ruscada	46	10	42	981	38.228	-4.753	-43.75	+1.90	-12	+1	09	15	427	-3	51	35	683	51.110	+69.25	-9.03	-8	-4	-4.749	-6	51.104												
11	Gridone	46	07	28	477	23.726	-4.751	-47.00	-1.35	-10	+1	12	34	418	-3	48	16	680	51.098	+72.57	-5.71	+4	-3	-4.748	±0	51.098												
12	Mte Gradicioli	46	05	07	774	03.041	-4.733	-49.33	-3.68	+8	+1	25	38	567	-3	35	12	531	51.098	+85.65	+7.37	+4	+3	-4.736	-2	51.096												
13	Lema	46	02	30	393	25.653	-4.740	-51.97	-6.32	+1	+1	23	39	308	-3	37	11	778	51.086	+83.65	+5.37	+16	±0	-4.740	+3	51.089												
14	Monte Caslano	45	57	53	062	48.319	-4.743	-56.58	-10.93	-2	+1	26	37	333	-3	34	13	764	51.087	+86.62	+8.34	+15	-3	-4.740	-7	51.080												
15	Campo dei Fiori	45	52	12	216	07.459	-4.757	-62.27	-16.62	-16	+1	19	25	885	-3	41	25	173	51.058	+79.43	+1.15	+44	-5	-4.752	+8	51.066												
16	Pravello	45	53	35	209	30.468	-4.741	-60.88	-15.23	±0	+1	29	19	983	-3	31	31	092	51.075	+89.33	+11.05	+27	±0	-4.741	-4	51.071												
17	Caviano	45	52	43	971	39.231	-4.740	-61.73	-16.08	+1	+1	34	15	794	-3	26	35	280	51.074	+94.27	+15.99	+28	-4	-4.736	-4	51.070												
18	M. Palanzuolo	45	51	48	012	43.282	-4.730	-62.67	-17.02	+11	+1	45	47	865	-3	15	03	204	51.069	+105.80	+27.52	+33	-5	-4.725	+2	51.071												
19	Mte. Generoso	45	55	56	932	52.195	-4.737	-58.52	-12.87	+4	+1	34	53	537	-3	25	57	539	51.076	+94.90	+16.62	+26	-4	-4.733	+1	51.077												
20	Caprino	45	58	54	173	49.442	-4.731	-55.57	-9.92	+10	+1	33	24	856	-3	27	26	231	51.087	+93.42	+15.14	+15	+2	-4.733	-3	51.084												
21	Torrione	46	03	49	887	45.171	-4.716	-50.63	-4.98	+25	+1	38	03	918	-3	22	47	179	51.097	+98.07	+19.97	+5	+8	-4.724	-2	51.095												
22	Camoghè	46	08	09	974	05.264	-4.710	-46.30	-0.65	+31	+1	37	32	808	-3	23	18	293	51.101	+97.55	+19.27	+1	+11	-4.721	+4	51.105												
23	Menone	46	07	29	230	24.518	-4.712	-46.98	-1.33	+29	+1	42	22	651	-3	18	28	448	51.099	+102.38	+24.10	+3	+5	-4.717	+5	51.104												

SL<sub>m</sub> = 5° 00' 51.102

SB<sub>m</sub> = 4.741

$\Delta B$  und  $\Delta L$ , die Breiten- bzw. Längendifferenz gegenüber dem Nullpunkt Bern, sind in Minuten einzusetzen. Die Produkte geben als Einheit die Bogensekunde.

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit, die als Tausendstel-Sekunde eingeführt worden war, ergibt sich zu

$$\pm 5.24$$

was linear  $\pm 16$  cm beträgt. Mit diesem mittlern Fehler wird also zu rechnen sein, wenn Transformationsbeträge aus I berechnet oder der Figur 2 entnommen werden. In dieser Kartenskizze sind die Kurven gleicher Transformationsbeträge mit  $0''.010$  Intervall eingetragen. Die Genauigkeit der Entnahme aus dem Graphikon genügt in Anbetracht der mittlern Fehler vollständig. Geometrisch lassen sich die gefundenen Unbekannten wie folgt deuten: Die Verschiebung des Nullpunktes Bern beträgt für die Breite  $4''.789$  in südlicher Richtung; für die Längendifferenz der Nullpunkte ergibt sich ein Betrag von  $5^\circ 00' 51''.185$ . Als Netzverdrehung folgt aus der Breitengleichung eine Breitendifferenz von  $0''.00105$  pro Längenminute oder linear 3.25 cm, was als Oberflächenwinkel gerechnet  $5''.20$  ausmacht. Denselben Betrag gibt eine analoge Rechnung auf Grund der Längengleichung. Die lineare Netzverzerrung erhalten wir aus der Breitengleichung zu  $0''.00074$  oder 2.28 cm pro Breitenminute, oder 12 mm pro km. Diese Zahlen, sowie der mittlere Fehler der Gewichtseinheit geben ein Bild über die gegenseitige Genauigkeit der beiden Landesvermessungen.

Durchgeht man in der Tabelle die in Spalten 14 und 16 angegebenen  $v_B$  und  $v_L$  anhand der Karte, so zeigt sich, daß mehrere der größten Verbesserungen den nördlichsten Punkten zukommen. Außerdem fällt auf, daß dort die übrigbleibenden Fehler benachbarter Punkte in bezug auf Größe und auf Vorzeichen stark voneinander abweichen. Diese Erscheinung kann nicht restlos auf Fehler in den Triangulationen zurückgeführt werden; vielmehr muß angenommen werden, daß einzelne Punkte im Laufe der Zeit, die zwischen den italienischen Triangulationsmessungen von 1880–1900 und den schweizerischen Bestimmungen von 1910–1920 liegt, ihre Lage änderten. Da es sich um Blockgipfel handelt, erscheinen kleine Verschiebungen, die auf Grund der Ausgleichung auf maximal 30–40 cm geschätzt werden können, nicht ausgeschlossen.

Die vorliegende Ausgleichung dürfte indessen auch in diesem Gebiet brauchbare Werte liefern, da sie zahlreiche, nahe beieinander gelegene Punkte enthält. Eine Bestätigung hiefür liegt in der Tatsache, daß dreißig nicht in die Ausgleichung einbezogene Punkte, auf die die Transformationsformeln angewendet wurden, einen mittlern Fehler von  $\pm 0''.006$  ergaben; d. h. gleich viel wie die Ausgleichung.

## 2. Transformationsformeln für den Süd-Tessin.

Es lag aus den soeben angeführten Gründen nahe, den südlichen Teil des Kantons Tessin für sich zu behandeln. Die Figur 3 zeigt die



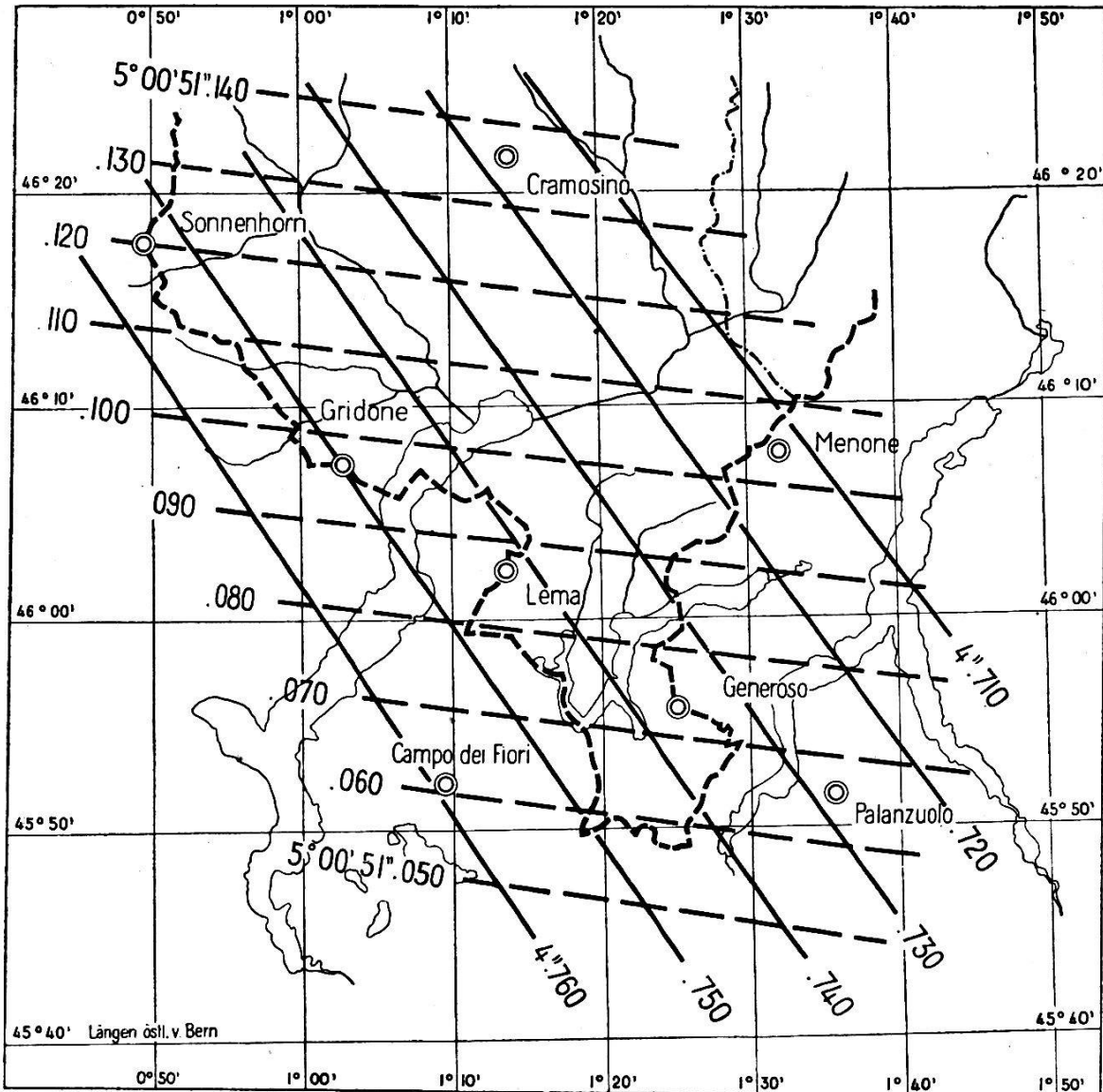


Fig. 3.

verwendeten Punkte erster und zweiter Ordnung, aus denen folgende Transformationsformeln folgen

$$\text{II} \quad dB = + 1.14 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta B + 1.20 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta L - 4''.783$$

$$dL = - 2.50 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta B - 0.23 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta L - 5^\circ 00' 51''.198$$

die ebenfalls in Figur 2 dargestellt sind. Der mittlere Fehler nach der Ausgleichung beträgt

$$\pm 0.0024 \text{ Breitensekunden}$$

oder  $\pm 7$  cm, ein bemerkenswert gutes Resultat. Ähnlich wie für den ganzen Kanton wird die Netzverdrehung  $5''.95$  und der Längenfehler pro km 19 mm.

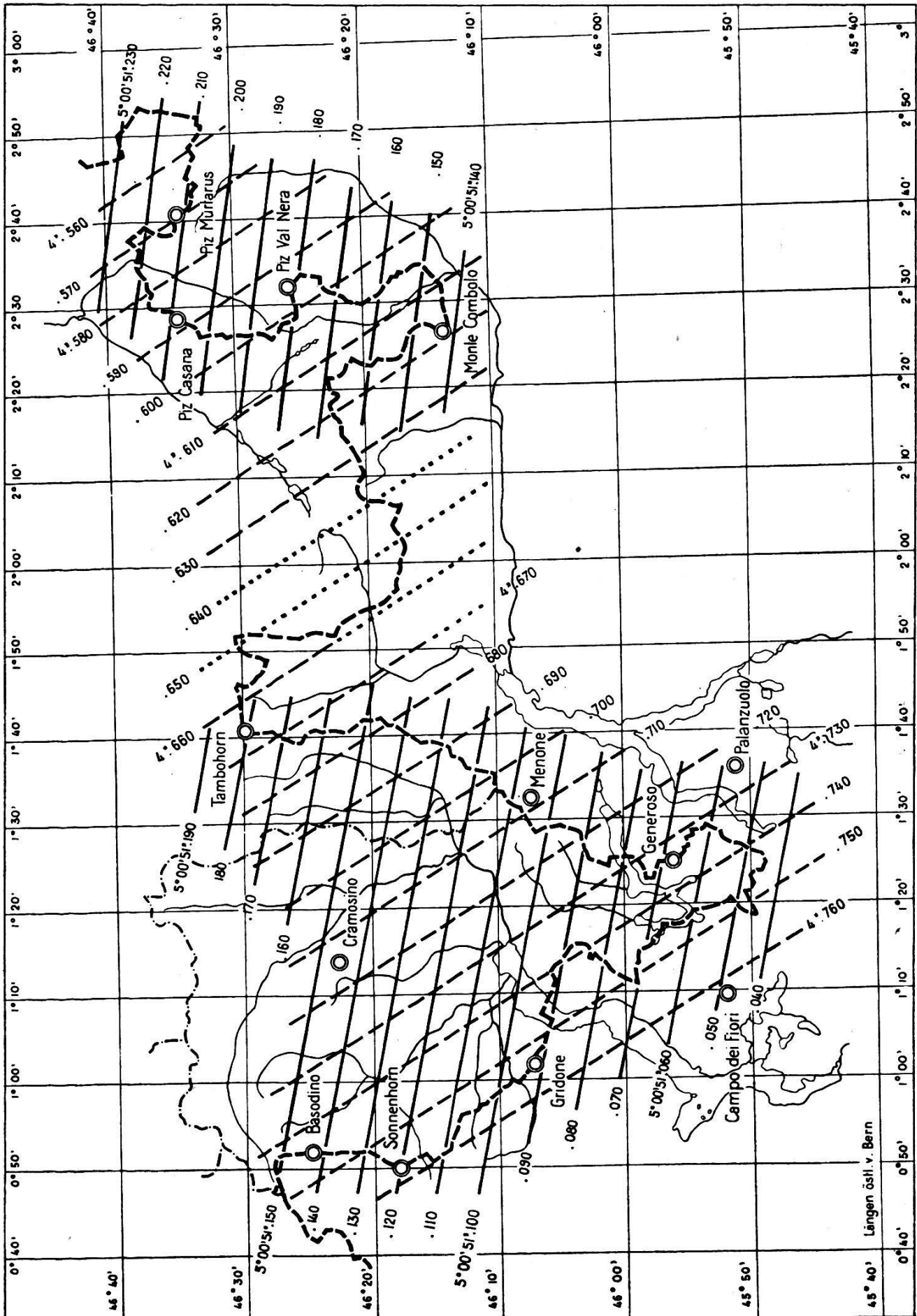


Fig. 4.

Im ganzen, in Figur 3 dargestellten Gebiet des Südtessins liefern die Formeln II Transformations-Beträge mit einer Genauigkeit, die weit innerhalb der Toleranz liegt. Bei den Formeln I für das ganze Kantonsgebiet trifft dies in beschränktem Maße auch zu. Vergleicht man nämlich die Transformationslinien in Figur 2 und Figur 3 miteinander, so beträgt ihre größte Differenz 6 Tausendstel-Sekunden, d. h. 20 cm. Für beide Formelsysteme I und II durfte von den vereinfachten Ausdrücken (15) und (16) ausgegangen werden.

### 3. Transformationsformeln für Graubünden-Tessin.

In der Figur 4 endlich sind Transformationsformeln zur Darstellung gelangt, mit denen versucht wurde, die ganze Grenze von der Dreisprachenspitze bis zum Passo di San Giacomo zu erfassen. Es fällt sofort auf, daß in der Zone zwischen dem Puschlav und dem Misox keine gemeinsamen Punkte verwendet wurden. Nicht daß solche gefehlt hätten; aber diese Zone paßt ganz und gar nicht in das allgemeine System; hier können nur lokale Transformationen ans Ziel führen.

Die Transformationsformeln, die in Figur 4 dargestellt sind, lauten

$$\text{III} \quad dB = + 1.37.10^{-3} \cdot \Delta B + 1.49.10^{-3} \cdot \Delta L - 4''.796$$

$$dL = - 3.11.10^{-3} \cdot \Delta B - 0.37.10^{-3} \cdot \Delta L - 5^{\circ} 00' 51''.212$$

Der mittlere Fehler beträgt  $\pm 0.0071$  Breitensekunden oder  $\pm 22$  cm; die Netzverdrehung wird  $7''.4$ , die Längenverzerrung pro km 23 mm. Im Gebiet des Kantons Tessin liefern die Formeln III Beträge, die von den aus II gerechneten durchschnittlich abweichen

$$\text{in Länge um } 5.3.10^{-3}'' \sim 11.2 \text{ cm}$$

$$\text{in Breite um } 4.0.10^{-3}'' \sim 12.3 \text{ cm}$$

während die maximalen Abweichungen für die Länge  $0''.013$  (27 cm) und für die Breite  $0''.006$  (18 cm) betragen.

---

## Bessere Reliefbilder in Karten.

Von *J. Bolliger*, Bern.

Die neuen Landeskarten 1 : 50 000 werden Ausgaben in Relief-tönung erhalten, womit dem weniger geübten Kartenleser die Geländeformen anschaulicher gestaltet werden. Die Ausstellung „100 Jahre Landestopographie“ in Bern, die soeben ihre Pforten geschlossen hat, zeigte, daß diese Tönung in einer violetten Farbe für das Gesamtbild und in einer blauen Farbe für die Gletschergebiete vorgesehen ist, wel-