

# L'adaptation d'n réseau trigonométrique au moyen de projections conformes

Autor(en): **Bachmann, W.K.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **36 (1938)**

Heft 12

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-197323>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

- (51) *Siegrist, R.* und *Gessner, A.*, Die Auenwälder des Tessin. (Festschr. f. Carl Schröter, Zürich 1925.)
- (52) *Schweiz. Wasserwirtschaftsamt*, Statistik der Wasserkräfte in der Schweiz: A. Ausnützbare Wasserkräfte (1916). B. Ausgenützte Wasserkräfte (1928).
- (53) *Staub, R.*, Zur Tektonik der südöstlichen Schweizeralpen. Beiträge zur geol. Karte der Schweiz. Bern 1916.
- (54) *Derselbe*, Der Bau der Schweizeralpen. (B. N. F. G. Lief. 1924.)
- (55) *Straßer, E.*, Geologie der Pizzo di Claro-Torrone-Alto-Kette. Diss. Zürich 1928.
- (56) *Trezzinis, C.*, Artikel im Historisch-Biographischen Lexikon der Schweiz, 7 Bände. Neuenburg 1920/34.
- (57) *Ulrich, R.*, Die Gräberfelder in der Umgebung von Bellinzona. 2 Bde. Zürich 1914.
- (58) *Viollier, D.*, Il Cantone Ticino nelle epoche preistoriche. Rivista archeol. della Prov. et antica diocesi di Como, 1927, p. 8 ecc.
- (59) *Wanner, M.*, Geschichte des Baues der Gotthardbahn. Nach den Quellen dargestellt. Luzern 1885.
- (60) *Winkler, E.*, Skizze zu einer Landschaftskunde der tessinischen Riviera. (Schweizer Geograph, IX. Jg. 1932, S. 120 ff.)
- (61) *Wirth, W.*, Zur Anthropogeographie von Stadt und Landschaft Schaffhausen. Diss. Zürich. Zürich 1918.
- (62) *Zaugg*, Die schweizerische Glasindustrie. Diss. Zürich 1930.
- (63) *Zschokke, Fr.*, Die Tierwelt des Cantone Ticino. Basel 1928.

### Karten.

- (1) Die Blätter des *Topographischen Atlases* der Schweiz in 1 : 50 000. und zur Übersicht die
- (2) „Reliefkarte des Kantons Tessin und des Gebietes der oberitalienischen Seen“ (i. M. 1 : 200 000), von *Jul. Frey* (Kümmerly & Frey, Bern).

---

## L'adaptation d'un réseau trigonométrique au moyen de projections conformes.

Par *W. K. Bachmann*, Lausanne.

### 1° Généralités.

Le problème de l'adaptation d'un réseau trigonométrique a été traité dans l'un des derniers numéros de la « Revue Suisse des Mensurations Cadastrales ». Dans cet exposé, l'auteur nous fait remarquer que l'adaptation conforme d'un réseau conduit à des calculs laborieux, et que les côtés transformés apparaissent courbes. Nous trouvons cette même remarque dans les « Allg. Vermessungsnachrichten 1932 ». En examinant l'étude de Krüger traitant cette question, qui a été publiée dans la « Zeitschrift für Vermessungswesen 1896 », nous constatons que la remarque faite par Mr. Ansermet, dans son article, est absolument fondée. Jordan examine dans la « Zeitschrift für Vermessungswesen 1898 » cette même question au point de vue pratique, en se servant des for-

mules développées par Krüger et Schols. Dans cet exposé, les calculs sont seulement esquissés, de sorte que l'on ne voit pas immédiatement le travail, assez considérable du reste, qu'ils occasionnent. Jordan arrive cependant à la conclusion que la projection conforme pourrait être appliquée pratiquement dans beaucoup de cas.

En conséquence, il semble intéressant d'examiner si les calculs numériques sont aussi laborieux que certains auteurs le prétendent. Pour ce qui concerne la courbure des côtés transformés, nous devons avouer qu'elle est gênante dans certains cas, mais nous ne pouvons demander l'impossible. Si l'ensemble des droites doit être transformé en un ensemble de droites, la projection ne peut être conforme, exception faite des transformations linéaires. Il est cependant toujours possible d'établir une correspondance conforme entre deux triangles arbitrairement donnés. Mais cette méthode, très intéressante au point de vue théorie, ne peut malheureusement pas s'appliquer au problème qui nous occupe ici, attendu qu'elle nous conduit à des expressions que nous ne savons intégrer. Nous savons toutefois que ces intégrales existent, et le fait de ne pouvoir les calculer directement ne nous empêche pas d'espérer de trouver un jour ou l'autre une méthode pratique permettant d'appliquer cette méthode au problème considéré. Ce procédé est du reste déjà appliqué dans l'hydraulique ainsi que dans certaines questions d'électricité; mais dans ces domaines, il ne s'agit généralement que de la projection du demi-plan sur un rectangle ou de problèmes analogues; dans le cas du rectangle, nous sommes conduits à des intégrales elliptiques que nous savons calculer.

Considérons un réseau trigonométrique, et soient  $P_1' P_2' \dots$  des points de celui-ci. Soient  $P_1 P_2 \dots$  les points correspondants dans un nouveau réseau. Le problème consiste à trouver une projection conforme amenant les points  $P_1' P_2' \dots$  du réseau primitif aux points correspondants du nouveau réseau. Au point de vue pratique, les deux réseaux ont généralement à peu près la même orientation; s'il n'en est pas ainsi, il faudra faire subir une rotation au réseau primitif. Si nécessaire, il lui sera également imprimé une translation afin que les écarts entre les points  $P_1', P_1, P_2', P_2$ , etc. soient petits.

Nous désignons les coordonnées des points

$$\begin{aligned} P_1' P_2' \dots & \text{ par } z_1 z_2 \dots \text{ où } z_j = x_j + i \cdot y_j \\ P_1 P_2 \dots & \text{ par } Z_1 Z_2 \dots \text{ où } Z_j = X_j + i \cdot Y_j \end{aligned}$$

La formule, habituellement employée pour ces transformations, est celle de Lagrange

$$\begin{aligned} Z = & \frac{(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_n)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) \dots (z_1 - z_n)} Z_1 + \frac{(z - z_1)(z - z_3) \dots (z - z_n)}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3) \dots (z_2 - z_n)} Z_2 \\ (1) & + \dots + \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{n-1})}{(z_n - z_1)(z_n - z_2) \dots (z_n - z_{n-1})} Z_n \end{aligned}$$

Elle résout en effet le problème. Si nous faisons dans (1) successivement  $z = z_1, z_2, \dots$ , nous obtenons respectivement  $Z = Z_1, Z_2, \dots$ . Cette formule est applicable pour un nombre quelconque de points. Quoique (1) nous donne immédiatement la transformation cherchée, elle ne peut être appliquée directement aux calculs pratiques, parce que ceux-ci seraient beaucoup trop laborieux.

Il semble, qu'au point de vue calculs, l'emploi de la formule de Newton est plus simple. Cette dernière présente du reste un avantage considérable sur la formule de Lagrange, parce que le nombre des points  $P_1, P_2, \dots$  peut être fixé arbitrairement en cours de calcul, sans changer par ce fait les termes déjà calculés. La formule de Lagrange, par contre, ne permet pas de procéder de cette façon; le nombre des points doit être arrêté avant le commencement des calculs.

Rappelons que la formule de Newton s'obtient comme suit: on cherche un polynôme de degré  $(n - 1)$  au plus, qui est vérifié par les couples de valeurs

$$\left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ Z = Z_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} z = z_2 \\ Z = Z_2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} z = z_3 \\ Z = Z_3 \end{array} \right. \quad \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} z = z_n \\ Z = Z_n \end{array} \right.$$

Nous écrivons

$$(2) \quad \begin{aligned} Z = & Z_1 + c_1 (z - z_1) \\ & + c_2 (z - z_1) (z - z_2) \\ & + c_3 (z - z_1) (z - z_2) (z - z_3) \\ & + \dots \\ & \vdots \\ & + c_{n-1} (z - z_1) (z - z_2) \dots (z - z_{n-1}) \end{aligned}$$

où  $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$  sont des constantes à déterminer. Nous commençons par la détermination de  $c_1$ :  $Z_2 = Z_1 + c_1 \cdot (z_2 - z_1)$

$$\therefore c_1 = \frac{Z_2 - Z_1}{z_2 - z_1}.$$

Ayant obtenu  $c_1$ , nous calculons  $c_2$  et ainsi de suite. En appliquant la formule (2), nous déterminons donc premièrement une transformation qui amène  $P_1'$  en  $P_1$  et  $P_2'$  en  $P_2$ . En calculant ensuite le terme en  $c_2$ , nous obtenons une transformation qui amène  $P_3'$  en  $P_3$ , sans changer la transformation des points  $P_1'$  et  $P_2'$ . Le calcul est simplifié, si nous posons dans (2)  $Z = z + \Delta Z$ , et en prenant  $z_1 = Z_1 = 0$ . Nous déterminons dans ce cas  $c_1$  de manière à obtenir directement les corrections  $\Delta Z$ , soit

$$(3) \quad \begin{aligned} \Delta Z = & c_1 z \\ & + c_2 z (z - z_2) \\ & + c_3 z (z - z_2) (z - z_3) \\ & + \dots \\ & \vdots \\ & + c_{n-1} z (z - z_1) (z - z_2) \dots (z - z_{n-1}) \end{aligned}$$

La direction des  $x$  positifs est dirigée vers le nord, et le sens de rotation positif est celui de l'aiguille de la montre (voir fig. 1).

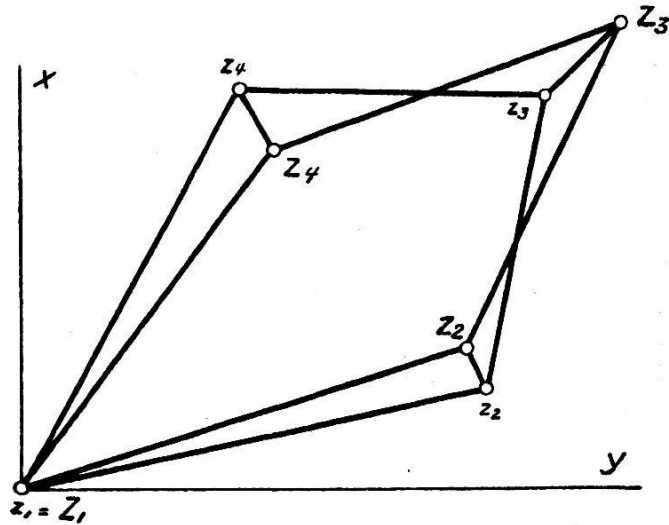


Fig. 1.

Le cas, qui se présente le plus fréquemment dans la pratique, est celui d'un triangle ou d'un quadrilatère. Nous développons ci-après successivement les formules de transformation pour le rattachement de 2, 3 et 4 points.

### 2° Rattachement de 2 points.

Soient  $P_1', P_2', P_1, P_2$  les deux points donnés dans les deux systèmes de coordonnées. Au moyen d'une translation, nous amenons  $P_1'$  en  $P_1$ , et nous choisissons ce dernier point comme origine des coordonnées pour  $z$  et  $Z$  (voir fig. 2). Comme indiqué plus haut,  $\Delta Z_2 = Z_2 - z_2$  doit être petit. (Dans les cas pratiques, le module ne doit, en règle générale, pas dépasser 50 cm.)

Considérons la formule (3), dans laquelle nous disposons de  $c_1$  de façon à amener  $z_2$  en  $Z_2$ . Nous obtenons  $\Delta Z_2 = c_1 \cdot z_2$  d'où

$$c_1 = \frac{\Delta Z_2}{z_2}$$

$$\Delta Z = \frac{\Delta Z_2}{z_2} z$$

Cette transformation représente tout simplement une rotation, suivie d'une similitude. Les formules de transformation correspondantes pour  $x$  et  $y$  s'établissent sans difficulté aucune, mais le calcul numérique présente déjà un certain travail. En effet, tous les points du réseau attaché au côté  $P_1' P_2'$ , doivent être transformés à l'aide de ces formules. Il me paraît par conséquent indiqué de choisir un autre mode de calcul conduisant passablement plus vite au résultat. Utilisons un procédé graphique; sa précision est naturellement limitée, mais elle est largement suffisante pour satisfaire aux besoins de la pratique.

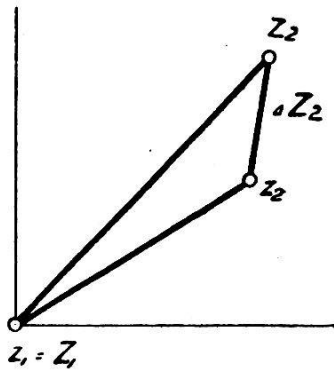


Fig. 2.

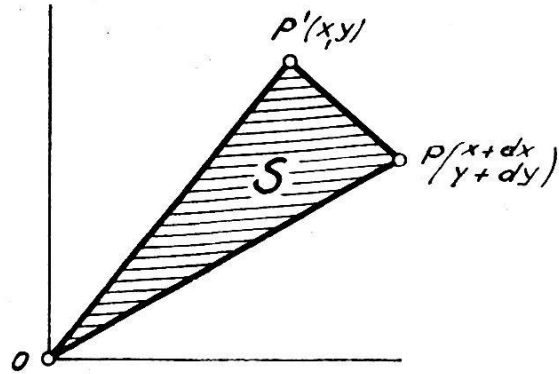


Fig. 3.

Soit  $P(z)$  un point du réseau primitif. Nous avons  $z = x + i \cdot y = r \cdot e^{i\varphi}$ ,  $r$  étant le rayon-vecteur et  $\varphi$  l'argument de  $z$ . Etudions la variation de  $z$ :  $\frac{dz}{z} = \frac{dr}{r} + i d\varphi$  d'où

$$(4) \quad \begin{cases} dx = x \frac{dr}{r} - y d\varphi \\ dy = y \frac{dr}{r} + x d\varphi \end{cases}$$

Remarquons que  $\frac{dr}{r}$  porte toujours le signe de  $dr$ . Calculons les formules inverses

$$(5) \quad \frac{dr}{r} = \frac{x dx + y dy}{r^2} \quad d\varphi = \frac{x dy - y dx}{r^2}$$

mais nous avons  $x dy - y dx = \begin{vmatrix} x & x + dx \\ y & y + dy \end{vmatrix} = 2 S$

où  $S$  représente la surface du triangle  $OP'P$  de la fig. 3. Nous obtenons donc

$$(5') \quad d\varphi = \frac{2 S}{r^2}$$

où  $d\varphi$  est exprimé en radians. Les formules (4) nous permettent donc de trouver les corrections  $dx$  et  $dy$ , connaissant  $d\varphi$  et  $\frac{dr}{r}$ ;  $d\varphi$  et  $\frac{dr}{r}$  sont déterminés à l'aide des formules (5) et (5').

Appliquons ces formules à un exemple pratique. Soient  $P_1', P_2'$  les deux points du réseau primitif, et  $P_1, P_2$  les deux points correspondants du nouveau système de coordonnées.

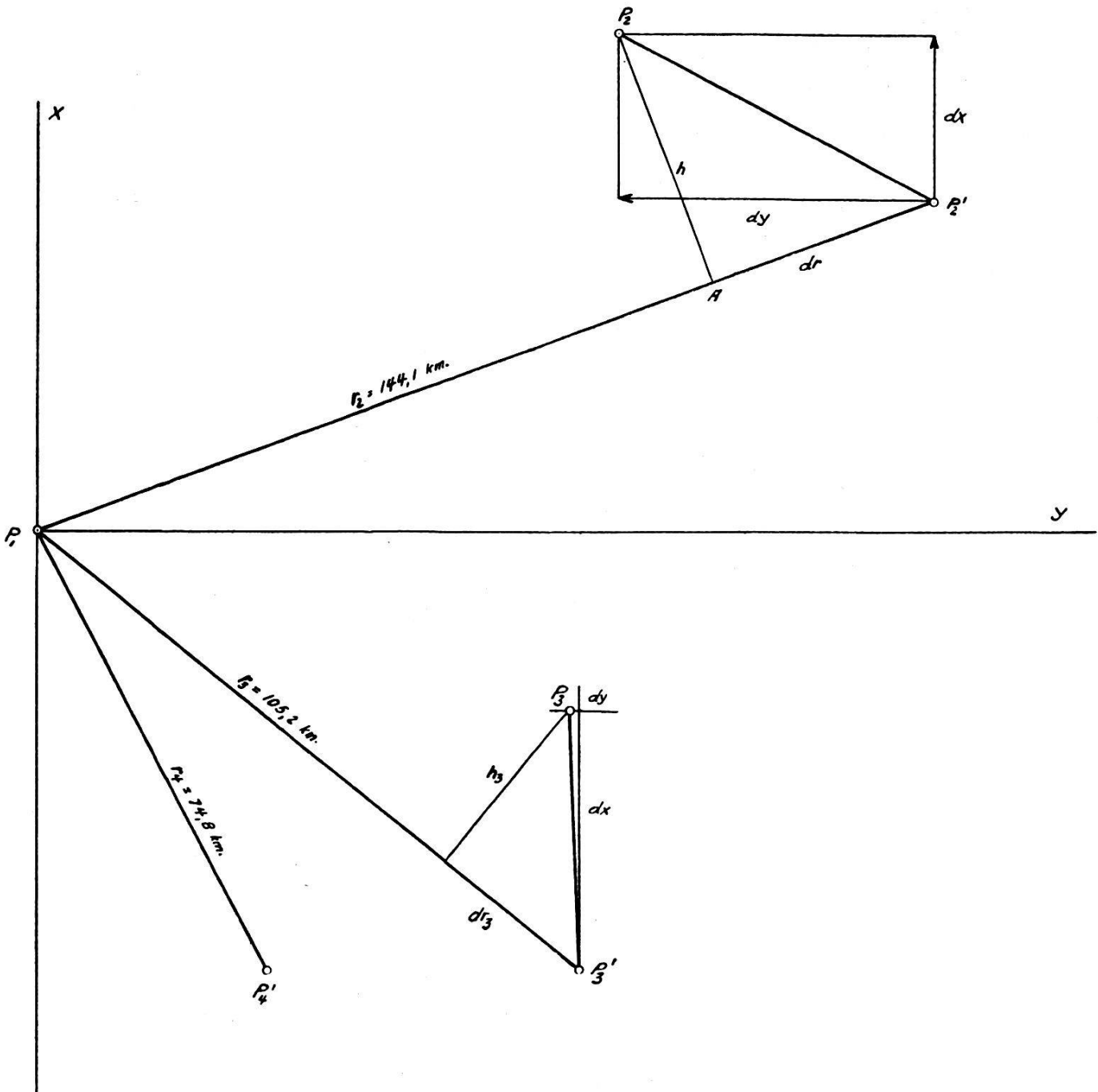


Fig. 4.

$P_1'$	$y = 0$	$x = 0$
$P_2'$	$y = +134\,910,985\text{ m}$	$x = +50\,504,681\text{ m}$
$P_1$	$y = 0$	$x = 0$
$P_2$	$y = +134\,910,507\text{ m}$	$x = +50\,504,934\text{ m}$

Le point  $P_2'$  doit donc être amené en  $P_2$ . A cet effet, nous reportons les deux points  $P_1', P_2'$  à l'échelle 1 : 1 000 000 par exemple (voir fig. 4). Nous obtenons en outre au point  $P_2$ :

$$\Delta Z_2 = dX_2 + i \cdot dY_2 \quad \text{où} \quad \begin{cases} dY_2 = -47,8\text{ cm} \\ dX_2 = +25,3\text{ cm} \end{cases}$$

Reportons ces éléments à partir du point  $P_2'$  à l'échelle 1 : 10; nous obtenons ainsi la position de  $P_2$  par rapport à  $P_2'$ . Soit  $A$  le pied de la perpendiculaire abaissée de  $P_2$  sur  $P_1 P_2'$ .  $AP_2'$  nous donne alors directement  $dr$  à l'échelle 1 : 10;  $r$  est également mesuré sur le croquis. Dans le cas considéré, nous obtenons

$$(6) \quad \frac{dr}{r} = - \frac{35,7}{1,441 \cdot 10^7} = - 24,8 \cdot 10^{-7}$$

Pour déterminer  $d\varphi$ , nous devons connaître la surface du triangle  $P_1 P_2' P_2$ . Nous avons  $2 \cdot S \sim r \cdot h$ , d'où

$$(7) \quad d\varphi = \frac{2S}{r^2} = \frac{h}{r} = - \frac{40,5}{1,441 \cdot 10^7} = - 28,1 \cdot 10^{-7}$$

(6) et (7) déterminent donc complètement le changement d'échelle et la rotation.

Considérons maintenant un troisième point  $P_3 (z_3)$ . Déterminons son image en considérant la transformation définie par les formules (6) et (7). Les coordonnées primitives de  $P_3'$  sont

$$y = + 81\,398,613 \text{ m} \quad x = - 66\,275,506 \text{ m}$$

Les formules (4) nous donnent immédiatement

$$dx = + 6,627 \cdot 2,48 + 8,139 \cdot 2,81 = + \underline{39,3 \text{ cm}}$$

$$dy = - 8,139 \cdot 2,48 + 6,627 \cdot 2,81 = - \underline{1,6 \text{ cm}}$$

Les corrections à apporter aux coordonnées du point  $P_3'$  sont donc dans ce cas  $dx = +39,3 \text{ cm}$  et  $dy = -1,6 \text{ cm}$ .

Nous voyons ainsi que les calculs relatifs au rattachement de deux points sont excessivement simples, et qu'ils peuvent être effectués à la règle.

Mais ici aussi, le calcul graphique s'impose; les corrections  $dx$  et  $dy$  se déduisent alors directement du croquis. Considérons la figure 5; les deux triangles  $\Delta_2$  et  $\Delta_3$  doivent être semblables et le rapport de similitude est  $\frac{r_2}{r_3}$ . Connaissant  $\Delta_2$ , nous déterminons facilement  $\Delta_3$ .

Appliquons ce procédé au point  $P_3'$  que nous avons considéré plus haut. Nous obtenons  $dr_3 = -26,1 \text{ cm}$  et  $h_3 = -29,6 \text{ cm}$ . En reportant ces données sur le croquis (voir fig. 4) à l'échelle 1 : 10, nous obtenons  $dx = +39,3 \text{ cm}$  et  $dy = -1,6 \text{ cm}$ .

Nous constatons donc que le rattachement de 2 points s'effectue très rapidement et pour ainsi dire presque sans aucun calcul. On peut naturellement avoir quelques doutes sur la précision du procédé graphique indiqué, mais en travaillant consciencieusement, des erreurs de 0,5 cm sur  $dx$  et  $dy$  ne sont certainement pas dépassées, ce qui prouve



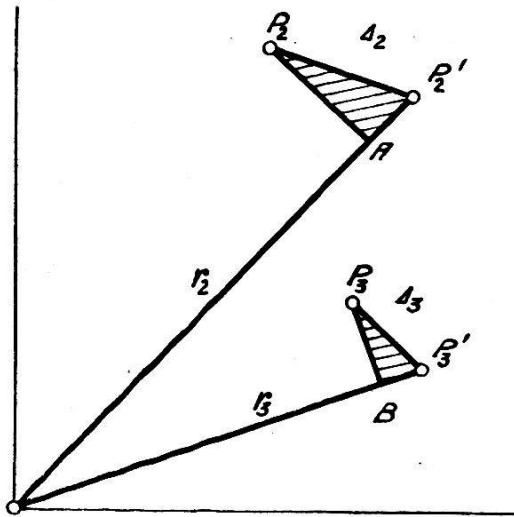


Fig. 5.

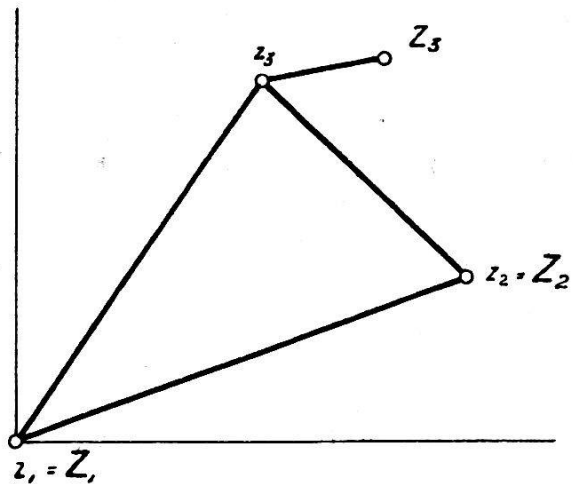


Fig. 6.

que la méthode énoncée est applicable dans la pratique. La borne supérieure de cette erreur se détermine du reste facilement par un calcul d'erreur, que nous ne voulons pas développer ici.

### 3° Rattachement de trois points.

Soient  $P_1', P_2', P_3'$  trois points du réseau primitif, et  $P_1, P_2, P_3$  les points correspondants du nouveau réseau. Nous supposons  $P_1' \equiv P_1, P_2' \equiv P_2, P_3' \neq P_3$ . Les deux points  $P_1'$  et  $P_2'$  ont donc déjà été rattachés d'après la méthode que nous venons d'exposer (voir fig. 6).

Nous cherchons une transformation conforme qui amène  $P_3'$  en  $P_3$ , et pour laquelle les points  $P_1$  et  $P_2$  sont des invariants.

Prenons

$$(8) \quad \Delta Z = A \cdot z \cdot (z - z_2) \quad \text{où } A \text{ est une}$$

constante à déterminer. Cette fonction satisfait aux conditions énoncées, si nous déterminons  $A$  d'après l'équation

$$(9) \quad A = \frac{\Delta Z_3}{z_3 (z_3 - z_2)}$$

Le calcul pratique de  $A$  peut s'effectuer au moyen des coordonnées rectangulaires ou polaires. Ce dernier procédé est généralement préférable. Déterminons la constante  $A$  pour un cas particulier en utilisant les coordonnées rectangulaires. Soit

$$\begin{array}{ll} P_1 & y = 0 & x = 0 \\ P_2 & y_2 = +134\,910,507 \text{ m} & x_2 = +50\,504,934 \text{ m} \\ P_3' & y_3 = +81\,399,332 \text{ m} & x_3 = -66\,276,370 \text{ m} \\ & \Delta Z_3 = -(4,7 + 29,5 i) \text{ cm.} \end{array}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} z_3 (z_3 - z_2) &= (x_3 + iy_3) [(x_3 - x_2) + i(y_3 - y_2)] \\ &= x_3(x_3 - x_2) - y_3(y_3 - y_2) + i[y_3(x_3 - x_2) + x_3(y_3 - y_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_3 - y_2 = -53\,511 \text{ m} \\ x_3 - x_2 = -116\,781 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_3(x_3 - x_2) &= +6,627 \times 1,168 \cdot 10^{13} = +7,75 \cdot 10^{13} \\ -y_3(y_3 - y_2) &= +8,1399 \times 0,535 \cdot 10^{13} = +4,34 \cdot 10^{13} \\ &\qquad\qquad\qquad \underline{+12,09 \cdot 10^{13} \text{ cm}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3(x_3 - x_2) &= -8,1399 \times 1,1678 \cdot 10^{13} = -9,52 \cdot 10^{13} \\ x_3(y_3 - y_2) &= +6,628 \times 0,535 \cdot 10^{13} = +3,54 \cdot 10^{13} \\ &\qquad\qquad\qquad \underline{-5,98 \cdot 10^{13} \text{ cm}} \end{aligned}$$

$$A = \frac{-(4,7 + 29,5 i)}{(12,09 - 5,98 i) \cdot 10^{13}} = \underline{\underline{[+0,657 - 2,11 i] 10^{-13}}}$$

ou bien

$$\begin{cases} dx_A = +0,657 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \\ dy_A = -2,11 \cdot 10^{-13} \text{ cm} \end{cases}$$

Le calcul de la constante  $A$  n'est pas long comme nous le voyons. Du reste, elle est déterminée une fois pour toutes, et elle garde la même valeur pour tous les points du réseau, ce qui simplifie passablement la suite des calculs.

Posons

$$\begin{cases} \Delta Z = dX + i dY \\ A = dx_A + i dy_A \\ z = x + iy \\ z_2 = x_2 + iy_2 \end{cases}$$

La formule (8) nous donne dans ce cas

$$(10) \begin{cases} dX = [x(x - x_2) - y(y - y_2)] dx_A - [x(y - y_2) + y(x - x_2)] dy_A \\ dY = [x(y - y_2) + y(x - x_2)] dx_A + [x(x - x_2) - y(y - y_2)] dy_A \end{cases}$$

Voilà les formules de transformation pour tous les points du réseau. Comme toutes les formules précédentes, elle sont assez simples pour permettre un calcul rapide des corrections  $dX$  et  $dY$ .

Soit  $P_4'$  un quatrième point; calculons  $dX$  et  $dY$  en appliquant

les formules (10) et en prenant la valeur de  $A$  obtenue dans l'exemple précédent. Nous avons

$$\begin{aligned}
 P_4' \quad y &= + 34\,994,991 \text{ m} & x &= - 66\,455,624 \text{ m} \\
 P_2 \quad y_2 &= + 134\,910,507 \text{ m} & x_2 &= + 50\,504,934 \text{ m} \\
 y - y_2 &= - 99\,916 \text{ m} & x - x_2 &= - 116\,959 \text{ m} \\
 x(x - x_2) &= + 6,645 \cdot 1,169 \cdot 10^{13} = + 7,77 \cdot 10^{13} \\
 -y(y - y_2) &= + 3,499 \cdot 0,999 \cdot 10^{13} = + 3,49 \cdot 10^{13} \\
 & & & + 11,26 \cdot 10^{13} \\
 & & & + 11,26 \cdot 10^{13} \cdot 0,657 \cdot 10^{-13} = + 7,4 \text{ cm} \\
 -x(y - y_2) &= - 6,645 \cdot 0,999 \cdot 10^{13} = - 6,64 \cdot 10^{13} \\
 -y(x - x_2) &= + 3,499 \cdot 1,169 \cdot 10^{13} = + 4,08 \cdot 10^{13} \\
 & & & - 2,56 \cdot 10^{13} \\
 & & & = 2,56 \cdot 2,11 = + 5,4 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

On trouve donc  $\underline{dX = +12,8 \text{ cm}}$

Pour  $dY$  nous obtenons

$$\begin{aligned}
 x(y - y_2) &= 6,64 \cdot 10^{13} \\
 y(x - x_2) &= - 4,09 \cdot 10^{13} \\
 & + 2,55 \cdot 0,657 = + 1,67 \text{ cm} \\
 x(x - x_2) &= 7,78 \cdot 10^{13} \\
 -y(y - y_2) &= 3,50 \cdot 10^{13} \\
 & 11,28 \cdot (-2,11) = - 23,80 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

d'où  $\underline{dY = -22,1 \text{ cm}}$

Ci-après, nous indiquons le mode de calcul en utilisant les coordonnées polaires. Dans ce but, les 4 points ont été reportés sur papier millimétrique à l'échelle 1 : 1 000 000, et les angles ont été mesurés à l'aide d'un simple rapporteur. Il sera alors intéressant de comparer les deux résultats.

a) Détermination de la constante  $A$ .

Le croquis nous donne (voir fig. 4):

$$\left. \begin{aligned}
 |\Delta Z_3| &= 29,7 \text{ cm} \\
 |Z_3| &= 1,052 \cdot 10^7 \text{ cm} \\
 |z_3 - z_2| &= 1,28 \cdot 10^7 \text{ cm}
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 |A| &= \frac{29,7}{1,052 \cdot 1,28} \cdot 10^{-14} \\
 |A| &= \underline{22,1 \cdot 10^{-14} \text{ cm}}
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \arg \Delta Z_3 &= + 261^\circ \\
 \arg z_3 &= + 129^\circ \\
 \arg (z_3 - z_2) &= + 205^\circ
 \end{aligned} \right\} \underline{\arg A = - 73^\circ}$$

L'erreur maximum à craindre sur  $\arg A$  ne dépasse pas  $2^\circ$ ; elle varie généralement entre  $1^\circ$  et  $1,5^\circ$ . Comme  $A$  intervient dans tous les calculs suivants, il peut être indiqué de calculer son argument à l'aide de la règle en utilisant les fonctions trigonométriques.

b) Calcul du point  $P_4$ .

Nous avons

$$P_4' \quad y = +34\,994,991 \text{ m} \quad x = -66\,455,624 \text{ m}$$

$$\Delta Z = z (z - z_2) A$$

$$|\Delta Z| = 7,48 \cdot 10^6 \cdot 1,539 \cdot 10^7 \cdot 2,21 \cdot 10^{-13} = \underline{25,4 \text{ cm.}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \arg z = +152^\circ \\ \arg (z - z_2) = +221^\circ \\ \arg A = -73^\circ \end{array} \right\} \arg \Delta Z = 300^\circ$$

$$\underline{\Delta Z = 25,4 e^{i300^\circ}}$$

En reportant ce vecteur sur le croquis, nous obtenons

$$\underline{dX = +13,2 \text{ cm}} \quad \underline{dY = -22,7 \text{ cm}}$$

Nous constatons que les différences entre le calcul numérique et le calcul graphique sont relativement petites.

Cet exemple montre donc que le rattachement de trois points ne présente encore aucune difficulté. En outre, le calcul par coordonnées polaires est plus simple que celui par coordonnées rectangulaires. L'erreur à craindre est naturellement plus grande en utilisant cette première méthode; mais en calculant éventuellement un ou deux angles à l'aide de la règle (ce qui est très rapide), au lieu de les mesurer directement sur le croquis, l'erreur totale sur  $dx$  et  $dy$  ne dépassera jamais 1 cm, à condition que le travail s'exécute soigneusement. Le procédé polaire est donc toujours applicable dans la pratique.

#### 4° Rattachement de 4 points.

Il s'agit de trouver une transformation conforme, qui amène les 4 points  $P_1' \dots P_4'$  du réseau primitif aux 4 points  $P_1 \dots P_4$  du nouveau réseau. Supposons que l'on ait déjà rattaché les trois points  $P_1', P_2', P_3'$ . Il ne s'agit alors plus que de trouver une transformation conforme qui amène  $P_4'$  en  $P_4$ , ayant comme invariants les points  $P_1, P_2, P_3$  (voir fig. 7).

Posons 
$$\Delta Z = z (z - z_2) (z - z_3) B.$$

Nous déterminons alors  $B$  au moyen de la relation

$$\Delta Z_4 = z_4 (z_4 - z_2) (z_4 - z_3) B. \quad \text{Ici, les coordonnées polaires doivent être employées. A cet effet, les angles peuvent être mesurés à l'aide d'un coordinatographe, ou peuvent être calculés}$$

à l'aide de la règle. En procédant ainsi, l'erreur à craindre sur  $dX$  et  $dY$  ne dépassera guère quelques millimètres, et les calculs s'effectueront également très rapidement.

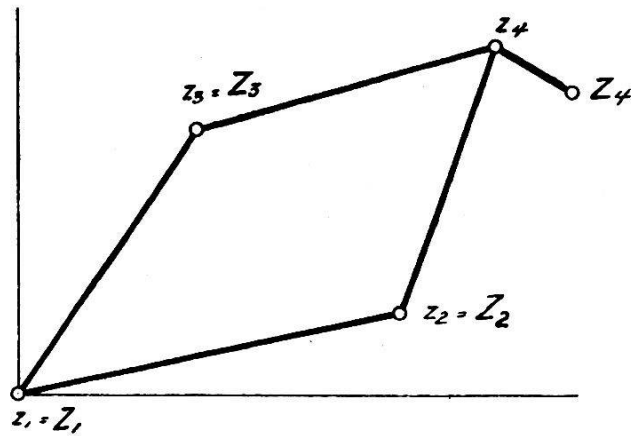


Fig. 7.

Le cas de plus de 4 points de rattachement ne se présente que très rarement dans la pratique. Le procédé indiqué s'applique naturellement à n'importe quel nombre de points.

5° *Rattachement de n points.*

Pour 4 points déjà, la question se pose, si la constante  $B$  doit être déterminée, ou s'il serait préférable de transformer séparément chaque triangle. En calculant  $B$ , nous transformons donc la figure  $z_1 \dots z_4$  (voir fig. 8) comme bloc unique; mais nous pouvons aussi transformer les deux triangles  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  séparément.

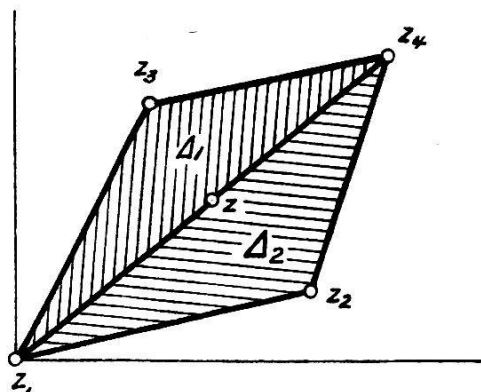


Fig. 8.

A cet effet, on amène premièrement  $z_4$  en  $Z_4$ ; on calcule  $A_1$  pour le triangle  $\Delta_1$ , et ensuite  $A_2$  pour le triangle  $\Delta_2$ . Soit  $f_1(z)$  la fonction transformant  $\Delta_1$ ,  $f_2(z)$  celle transformant  $\Delta_2$ . Le côté  $z_1 z_3$  est alors transformé deux fois, mais ses deux images ne seront généralement pas confondues. Prenons un point  $z$  sur  $z_1 z_3$  et déterminons les deux points correspon-

dants  $Z$  et  $Z'$ . Il s'agit alors de déterminer une borne supérieure pour  $|Z' - Z|$ . Nous avons

$$f_1(z) = \Delta Z = z(z - z_4) A_1 \quad \Delta Z_3 = z_3(z_3 - z_4) A_1 \quad \therefore A_1 = \frac{\Delta Z_3}{z_3(z_3 - z_4)}$$

$$f_2(z) = \Delta Z' = z(z - z_4) A_2 \quad \Delta Z_2 = z_2(z_2 - z_4) A_2 \quad A_2 = \frac{\Delta Z_2}{z_2(z_2 - z_4)}$$

$$\left| \frac{f_1(z)}{f_2(z)} \right| = \left| \frac{\Delta Z_3}{\Delta Z_2} \right| \cdot \left| \frac{z_2}{z_3} \right| \cdot \left| \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4} \right|$$

Cette dernière formule montre que les deux projections du point  $z$  peuvent être très différentes l'une de l'autre. Le rattachement par triangles séparés n'a donc pas de valeur pratique. En appliquant par contre la méthode exposée plus haut, aucune différence n'existe à l'intérieur du réseau.

#### 6° Conclusions.

Le rattachement de 2, 3 ou 4 points trigonométriques s'effectue facilement au moyen des projections conformes. Les calculs sont d'une simplicité extrême et ils se font à la règle. La faculté de combiner les méthodes numériques et graphiques donne une grande souplesse au calcul, permettant ainsi de tenir compte, dans de larges mesures, de précision exigée. C'est une méthode qui est parfaite au point de vue théorie, mais elle est surtout pratique.

---

## Herbstversammlung der Sektion Zürich-Schaffhausen.

Die Sektion Zürich-Schaffhausen hielt Samstag den 26. November ihre ordentliche Herbstversammlung im Gasthof zur „Krone“ in Eglisau ab. Im Mittelpunkt der Tagung stand ein Referat von Herrn Dr. Baltensperger, eidg. Vermessungsdirektor, über die neuen eidgenössischen Verordnungen: a) Die Vermessungen in den Festungsgebieten, b) Die Evakuierung der Grundbuchvermessungen.

Wie es in andern Sektionen bereits der Fall war, so wollte der Referent auch die Geometer der beiden Grenzkantone Zürich und Schaffhausen durch einen Vortrag mit den neuesten Bestimmungen des Vermessungswesens bekannt machen. In Anbetracht der aktuellen Bedeutung des Themas sind an die 40 Vereinsmitglieder zur Tagung erschienen.

Herr Vermessungsdirektor Dr. Baltensperger hat in mehr als zwei-stündigen Ausführungen sich mit den Problemen der Landesbefestigungen befaßt. Anschließend betonte er die Notwendigkeit vorsorglicher Friedens- und Kriegsmaßnahmen auch für die Grundbuchvermessung, die bereits in ruhigen Zeiten vorzubereiten sind. Präsident Vogel verdankte den interessanten Vortrag bestens und eröffnete nach kurzer Pause die Diskussion. Mehrere Redner waren in der Lage, diesbezügliche Fragen aus ihrem Arbeitsgebiete zur Behandlung zu stellen.