Ableitung der mittleren Fehlerellipse für Triangulationspunkte ohne Benutzung der Theorie von der partiellen Aequivalenz

Autor(en): **Baeschlin, C.F.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **37 (1939)**

Heft 1

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-197909

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SCHWEIZERISCHE
Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik
ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS
Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Kulturtechnik / Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie
Revue technique suisse des mensurations et améliorations fonçières
ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES
Organe officiel de l'Association Suisse du Génie rural / Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie
Redaktion: Dr. h. c. C. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)
Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats
Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme:
BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORMALS G. BINKERT, A.-G., WINTERTHUR

No. 1 • XXXVII. Jahrgang der „Schweizerischen Geometer-Zeitung" Erscheinend am zweiten Dienstag jeden Monats **10. Januar 1939** **Inserate:** 50 Cts. per einspaltige Nonp.-Zeile	**Abonnemente:** Schweiz Fr. 12. —, Ausland Fr. 15. — jährlich Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaften für Kulturtechnik u. Photogrammetrie Fr. 9. — jährl. Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz. Geometervereins

Ableitung der mittleren Fehlerellipse für Triangulationspunkte ohne Benutzung der Theorie von der partiellen Aequivalenz.

Von Dr. *C. F. Baeschlin*, Zollikon.

Die wichtigste Anwendung der mittlern Fehlerellipse liegt auf dem Gebiete der Triangulation. Eine vollständig einwandfreie Herleitung dieses Hilfsmittels der Fehlertheorie besteht bis jetzt nur gestützt auf die Theorie der partiellen Äquivalenz. Nun ist aber diese Theorie für viele Vermessungsfachleute zu abstrakt; das hat zur Folge gehabt, daß die Fehlerellipse in der Triangulationspraxis lange nicht die allgemeine Verwendung gefunden hat, die sie verdient. Einzelne in der Literatur veröffentlichte Ableitungen der mittlern Fehlerellipse sind nur für vermittelnde Einzelpunkteinschaltungen einwandfrei. Dagegen besteht meines Wissens keine methodisch einwandfreie Herleitung der Fehlerellipse für vermittelnde Mehrpunkteinschaltungen und für bedingte Ausgleichung.

Diese Lücke möchte diese Mitteilung schließen.

a) *Vermittelnde Koordinatenausgleichung.*

Die Fehlergleichungen, die den n Beobachtungen in einem Triangulationsnetz entsprechen, seien

$$(1)\quad p_h \; v_h = a_h^1 \, \xi_1 + b_h^1 \, \eta_1 + \ldots + a_h^k \, \xi_k + b_h^k \, \eta_k + \\ + \text{—} + a_h^u \, \xi_u + b_h^u \, \eta_u + f_h$$

Das Gewicht der zu dieser Fehlergleichung gehörenden Beobachtung sei p_h.

Diese Gleichung kann sich sowohl auf Richtungsmessungen, wie auf Winkelmessungen beziehen. Im Falle von Richtungsmessungen denken wir uns die Orientierungsunbekannten der einzelnen Stationen vorgängig eliminiert, etwa nach dem Schreiber'schen Verfahren fingierter Fehlergleichungen mit negativen Gewichten.

Dabei ist für Richtungsmessungen bekanntlich

$$a_h^k = -\rho'' \frac{\sin z_{ik}}{s_{ik}}; \quad b_h^k = +\rho'' \frac{\cos z_{ik}}{s_{ik}}$$

$$f_h = z_{ik} - l_{ik}$$

z_{ik} = Näherungsneigung vom Punkte i nach dem Punkte k.
s_{ik} = Entfernung $P_i \; P_k$.
l_{ik} = provisorisch orientierte Richtungsmessung

Für Winkelmessungen dagegen ist:

$$a_h^k = -\rho'' \left(\frac{\sin z_{ik}}{s_{ik}} - \frac{\sin z_{i,\,k-1}}{s_{i,\,k-1}} \right)$$

$$b_h^k = +\rho'' \left(\frac{\cos z_{ik}}{s_{ik}} - \frac{\cos z_{i,k-1}}{s_{i,k-1}} \right)$$

$$f_h = (z_{ik} - z_{i,\,k-1}) - w_h$$

wo w_h eine Winkelmessung auf dem Punkte P_i ist.

Die ξ_k, η_k sind die Komponenten der Verschiebung, die vom Näherungspunkt $P(x_{k_0}, y_{k_0})$ zum ausgeglichenen Punkt $P(x_k, y_k)$ führt.

Es ist daher

$$x_k = x_{k_0} + \xi_k; \; y_k = y_{k_0} + \eta_k.$$

Wir drehen nun unser Koordinatensystem um den Ursprung in positivem Sinne um einen Winkel ε.

Die Koordinaten des Punktes $P(x_k \cancel{+} y_k)$ im neuen System seien x_k' und y_k'.

Bekanntlich bestehen dann die Transformationsgleichungen:

$$x_k' = x_k \cos \varepsilon + y_k \sin \varepsilon$$
$$y_k' = -x_k \sin \varepsilon + y_k \cos \varepsilon.$$

Sowohl für Richtungsmessungen, wie für Winkelmessungen lauten die Transformationsformeln für die „Richtungskoeffizienten" a_h^k und b_h^k, wie man leicht findet:

$$a_h^{k\prime} = a_h^k \cos \varepsilon + b_h^k \sin \varepsilon$$
$$b_h^{k\prime} = -a_h^k \sin \varepsilon + b_h^k \cos \varepsilon$$

Die Richtungskoeffizienten a und b transformieren sich also bei einer Koordinatendrehung wie die Koordinaten x und y.

Die Koordinatentransformation für eine Translation interessiert uns hier nicht, weil sich diese auf die ξ, η und später die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und X, Y nicht geltend macht.

Man findet nun elementar:

$$a_h^k \xi_k + b_h^k \eta_k = a_h^{k'} \xi_k' + b_h^{k'} \eta_k'$$

d. h.

$a_h^k \xi_k + b_h^k \eta_k$ ist invariant in bezug auf eine Koordinatendrehung.

Da ohne weiteres erkannt wird, daß f_h invariant auf Drehung ist, so finden wir aus (1), daß v_h invariant auf Drehung ist, was man auch leicht direkt erkennt.

Wir wählen einen dem Punkt $P(x_k, y_k)$ (ausgeglichener Punkt) benachbarten Punkt $P(\mathfrak{x}_k, \mathfrak{y}_k)$. Dann gilt:

$$(2) \quad p_h \left| \; V_h = a_h^1 \xi_1 + b_h^1 \eta_1 + \ldots + a_h^k \mathfrak{x}_k + b_h^k \mathfrak{y}_k + \right.$$
$$+ \ldots + a_h^u \xi_u + b_h^u \eta_u + f_h$$

V_h ist natürlich ebenfalls invariant auf Drehung.

Wir multiplizieren die Fehlergleichungen (1) mit der Gauß'schen Multiplikation a_h^k, die die $2u$ Bedingungen erfüllen:

α

$$[a^1 a^k] = 0; [b^1 a^k] = 0 \ldots [a^k a^k] = +1; [b^k a^k] = 0$$

a·α

$$[a^u a^k] = 0; [b^u a^k] = 0$$

Damit erhält man:

$$[a^k v] = \xi_k + [a^k f]$$

Wenn $[p \nu \nu]$ = Minimum ist, so ist bekanntlich

α

$$(3\text{ a}) \qquad [a^k v] = 0.$$

so daß

$$(4\text{ a}) \qquad \xi_k + [a^k f] = 0$$

Ein zweites Mal verwenden wir die Multiplikatoren β_h^k, die die $2u$ Bedingungen erfüllen:

$$[a^1 \beta^k] = 0; [b^1 \beta^k] = 0 \ldots [a^k \beta^k] = 0, [b^k \beta^k] = +1$$
$$[a^u \beta^k] = 0; [b^u \beta^k] = 0$$

Dann ist für das ausgeglichene System

$$(3\text{ b}) \qquad [\beta^k v] = 0 \text{ und wir erhalten}$$

$$(4\text{ b}) \qquad \eta_k + [\beta^k f] = 0$$

Wenden wir die Multiplikatoren α_h^k und β_h^k auf die Gleichungen (2) für die V_k an, so finden wir:

(5 a) $$[\alpha^k\, V] = \mathfrak{x}_k + [\alpha^k\, f]$$

(5 b) $$[\beta^k\, V] = \mathfrak{y}_k + [\beta^k\, f]$$

Nun wählen wir $P(x_k, y_k)$ als neuen Koordinatennullpunkt und setzen

$$X_k = \mathfrak{x}_k - \xi_k; \quad Y_k = \mathfrak{y}_k - \eta_k$$

Damit folgt aus (3), (4) und (5)

(6 a) $$X_k = [\alpha^k\, V]$$

(6 b) $$Y_k = [\beta^k\, V]$$

Für die X_k und Y_k gelten die Transformationsformeln für eine Drehung des Koordinatensystems um ε

$$X_k{}' = X_k \cos\varepsilon + Y_k \sin\varepsilon$$

$$Y_k{}' = -X_k \sin\varepsilon + Y_k \cos\varepsilon$$

Da die V, wie schon erkannt, gegen Drehung invariant sind, so finden wir aus

$$X_k{}' = X_k \cos\varepsilon + Y_k \sin\varepsilon = [\alpha^k V] \cos\varepsilon + [\beta^k V] \sin\varepsilon = [\alpha^{k\prime} V]$$

$$Y_k{}' = -X_k \sin\varepsilon + Y_k \cos\varepsilon = -[\alpha^k V] \sin\varepsilon + [\beta^k V] \cos\varepsilon = [\beta^{k\prime} V]$$

(7 a) $$\alpha_h^{k\prime} = \alpha_h^k \cos\varepsilon + \beta_h^k \sin\varepsilon$$

(7 b) $$\beta_h^{k\prime} = -\alpha_h^k \sin\varepsilon + \beta_h^k \cos\varepsilon$$

D. h. die α und β transformieren sich bei einer Koordinatendrehung wie die x und y.

Aus (7) erhalten wir:

(8a) $$\left[\frac{\alpha^{k\prime}\,\alpha^{k\prime}}{p}\right]_\varepsilon = \left[\frac{\alpha^k\,\alpha^k}{p}\right] \cos^2\varepsilon + 2\left[\frac{\alpha^k\,\beta^k}{p}\right] \sin\varepsilon\cos\varepsilon + \left[\frac{\beta^k\,\beta^k}{p}\right] \sin^2\varepsilon$$

(8b) $$\left[\frac{\beta^{k\prime}\,\beta^{k\prime}}{p}\right]_\varepsilon = \left[\frac{\alpha^k\,\alpha^k}{p}\right] \sin^2\varepsilon - 2\left[\frac{\alpha^k\,\beta^k}{p}\right] \sin\varepsilon\cos\varepsilon + \left[\frac{\beta^k\,\beta^k}{p}\right] \cos^2\varepsilon$$

(8c) $$\left[\frac{\alpha^{k\prime}\,\beta^{k\prime}}{p}\right]_\varepsilon = -\left[\frac{\alpha^k\,\alpha^k}{p}\right] \sin\varepsilon\cos\varepsilon + \left[\frac{\alpha^k\,\beta^k}{p}\right] (\cos^2\varepsilon - \sin^2\varepsilon) + \\ + \left[\frac{\beta^k\,\beta^k}{p}\right] \sin\varepsilon\cos\varepsilon$$

Die $\left[\frac{\alpha^k\,\alpha^k}{p}\right]$, $\left[\frac{\alpha^k\,\beta^k}{p}\right]$ und $\left[\frac{\beta^k\,\beta^k}{p}\right]$ sind die Gewichtskoeffizienten, die sich aus den Normalgleichungen für die Unbekannten ξ_1, η_1, $\ldots$ ξ_k, η_k, $\ldots$ ξ_u, η_u mit Hilfe der Gewichtsgleichungen ergeben, in denen die Absolutglieder resp. durch

$$\begin{array}{cccccc}
-1, & 0, \ldots & 0, & 0 \ldots & 0, & 0 \\
0, & -1, \ldots & 0, & 0 \ldots & 0, & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \\
0, & 0 \ldots & -1, & 0 \ldots & 0, & 0 \\
0, & 0 \ldots & 0, & -1 \ldots & 0, & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \\
0, & 0 \ldots & 0, & 0 \ldots & -1, & 0 \\
0, & 0 & 0, & 0 & 0, & -1
\end{array}$$

ersetzt sind.

Nun ist bekanntlich

$$m^2 x_k = m^2 \left[\frac{\alpha^k \, \alpha^k}{p}\right] \tag{9 a}$$

$$m^2 y_k = m^2 \left[\frac{\beta^k \, \beta^k}{p}\right] \tag{9 b}$$

wo m der mittlere Fehler der Gewichtseinheit ist.

Ebenso ist natürlich:

$$m^2 x'_k = m^2 \left[\frac{\alpha^{k'} \, \alpha^{k'}}{p}\right]_\varepsilon \tag{10 a}$$

$$m^2 y'_k = m^2 \left[\frac{\beta^{k'} \, \beta^{k'}}{p}\right]_\varepsilon \tag{10 b}$$

Wir finden durch Einsetzen von (8 a) und (8 b) in (10 a) und (10 b):

$$m^2 x'_k = m^2 \left\{ \left[\frac{\alpha^k \, \alpha^k}{p}\right] \cos^2 \varepsilon + 2 \left[\frac{\alpha^k \, \beta^k}{p}\right] \sin \varepsilon \cos \varepsilon + \left[\frac{\beta^k \, \beta^k}{p}\right] \sin^2 \varepsilon \right\} \tag{11}$$

Dieses $m^2 x'_k$ wird ein Extremum, wenn

$$\frac{d \; m^2 x'_k}{d \, \varepsilon} = 0$$

Das liefert, wenn die Werte von ε, für die $m^2 x'_k$ ein Extremum ist, mit ω bezeichnet werden

$$-\left(\left[\frac{\alpha^k \, \alpha^k}{p}\right] - \left[\frac{\beta^k \, \beta^k}{p}\right] \right) \sin 2\,\omega + 2 \left[\frac{\alpha^k \, \beta^k}{p}\right] \cos 2\,\omega = 0$$

oder

$$\operatorname{tg} 2\,\omega = \frac{2 \left[\frac{\alpha^k \, \beta^k}{p}\right]}{\left[\frac{\alpha^k \, \alpha^k}{p}\right] - \left[\frac{\beta^k \, \beta^k}{p}\right]} \tag{12}$$

Der Wert von ω, der zum Maximum von $m^2 x'_k$ führt, werde mit ω_1 bezeichnet. Für ihn stimmt das Vorzeichen von $\sin 2\,\omega_1$ mit demjenigen von $\left[\frac{\alpha^k \beta^k}{p}\right]$ überein. Damit ist ω_1 eindeutig bestimmt.

Bezeichnen wir das Maximum von $m^2 x'_k$ mit A^2_k, das Minimum mit B^2_k, so ist:

$$(13\text{ a})\qquad A^2_k = m^2 \left\{ \left[\frac{\alpha^k \alpha^k}{p}\right] \cos^2 \omega_1 + 2 \left[\frac{\alpha^k \beta^k}{p}\right] \sin \omega_1 \cos \omega_1 + \right. \left. + \left[\frac{\beta^k \beta^k}{p}\right] \sin^2 \omega_1 \right\}$$

$$(13\text{ b})\qquad B^2_k = m^2 \left\{ \left[\frac{\alpha^k \alpha^k}{p}\right] \cos^2 \omega_2 + 2 \left[\frac{\alpha^k \beta^k}{p}\right] \sin \omega_2 \cos \omega_2 + \right. \left. + \left[\frac{\beta^k \beta^k}{p}\right] \sin^2 \omega_2 \right\}$$

oder da

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{\pi}{2}$$

$$(13\text{ c})\qquad B^2_k = m^2 \left\{ \left[\frac{\alpha^k \alpha^k}{p}\right] \sin^2 \omega_1 - 2 \left[\frac{\alpha^k \beta^k}{p}\right] \sin \omega_1 \cos \omega_1 + \right. \left. + \left[\frac{\beta^k \beta^k}{p}\right] \cos^2 \omega_1 \right\}$$

Durch einfache Umformungen erhalten wir auch die Gleichungen:

$$A^2_k = m^2 \left\{ \left[\frac{\alpha^k \alpha^k}{p}\right] + \left[\frac{\alpha^k \beta^k}{p}\right] \operatorname{tg} \omega_1 \right\} = m^2 \left\{ \left[\frac{\beta^k \beta^k}{p}\right] + \left[\frac{\alpha^k \beta^k}{p}\right] \operatorname{cotg} \omega_1 \right\}$$

$$B^2_k = m^2 \left\{ \left[\frac{\alpha^k \alpha^k}{p}\right] - \left[\frac{\alpha^k \beta^k}{p}\right] \operatorname{cotg} \omega_1 \right\} = m^2 \left\{ \left[\frac{\beta^k \beta^k}{p}\right] - \left[\frac{\alpha^k \beta^k}{p}\right] \operatorname{tg} \omega_1 \right\}$$

Ganz leicht findet man aus den Formeln (13 a), (13 c) und (11) die Gleichung:

$$(14)\qquad m^2 x_k = A^2_k \cos^2 \omega_1 + B^2_k \sin^2 \omega_1$$

A_k und B_k sind die große und die kleine Halbachse der sogenannten *mittleren Fehlerellipse.* (14) stellt die Gleichung der sogenannten „Fußpunktkurve“ der mittleren Fehlerellipse dar.

Man beweist leicht, daß die Achsrichtungen dieser mittleren Fehlerellipse in bezug auf das Triangulationsnetz feste Richtungen sind, unabhängig von dem für die Ausgleichung verwendeten Koordinatensystem, indem man findet:

$$\operatorname{tg}(2\,\omega_1') = \frac{2\left[\frac{\alpha^{k'} \beta^{k'}}{p}\right]_\varepsilon}{\left[\frac{\alpha^{k'} \alpha^{k'}}{p}\right]_\varepsilon - \left[\frac{\beta^{k'} \beta^{k'}}{p}\right]_\varepsilon} = \operatorname{tg} 2\,(\omega_1 - \varepsilon)$$

Somit ist

$$\omega_1' = \omega_1 - \varepsilon$$

womit die obige Behauptung bewiesen ist.

Ferner findet man, daß sich die Halbachsen der mittleren Fehlerellipse in jedem Koordinatensystem gleich ergeben, indem

$$\left[\frac{\alpha^{k'}\,\alpha^{k'}}{p}\right]_\varepsilon \cos^2(\omega_1 - \varepsilon) + 2\left[\frac{\alpha^{k'}\,\beta^{k'}}{p}\right]_\varepsilon \sin(\omega_1 - \varepsilon)\cos(\omega_1 - \varepsilon) +$$

$$+ \left[\frac{\beta^{k'}\,\beta^{k'}}{p}\right]_\varepsilon \sin^2(\omega_1 - \varepsilon) = \left[\frac{\alpha^k\,\alpha^k}{p}\right]\cos^2\omega_1 + 2\left[\frac{\alpha^k\,\beta^k}{p}\right]\sin\omega_1\cos\omega_1 +$$

$+ \left[\frac{\beta^k\,\beta^k}{p}\right]\sin^2\omega_1$, wenn man für $\left[\frac{\alpha^{k'}\,\alpha^{k'}}{p}\right]_\varepsilon$, $\left[\frac{\alpha^{k'}\,\beta^{k'}}{p}\right]_\varepsilon$ und $\left[\frac{\beta^{k'}\,\beta^{k'}}{p}\right]_\varepsilon$ die Ausdrücke (8) einsetzt.

Damit haben wir die Fehlerellipse für den Punkt $P(x_k, y_k)$ abgeleitet und die gestellte Aufgabe ist gelöst, soweit es sich um vermittelnde Koordinatenausgleichung handelt.

b) *Bedingte Triangulationsausgleichung.*

Man erkennt ohne weiteres, daß die Bedingungsgleichungen, die in Dreiecksnetzen auftreten, invariant in bezug auf die Drehung des Koordinatensystems sind, da sie stets ohne Benutzung eines Koordinatensystems aufgestellt werden können. Wenn man praktisch die Bedingung des Zusammenschlusses eines Kranzsystems oft unter Zuhilfenahme von Koordinaten aufstellt, so geschieht dies nur aus Bequemlichkeit. Die Bedingung existiert unabhängig von irgendwelchem Koordinatensystem.

Demgemäß sind auch die Verbesserungsbedingungsgleichungen invariant in bezug auf Koordinatendrehung. Da die Verbesserungen v invariant sind, so sind es also auch die Koeffizienten der v in diesen Verbesserungsbedingungsgleichungen, denen wir die Form geben:

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_i v_i + \ldots + a_n v_n + w_1 &= 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_i v_i + \ldots + b_n v_n + w_2 &= 0 \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_i v_i + \ldots + c_n v_n + w_3 &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Wir wollen jetzt ein rechtwinkliges Koordinatensystem einführen. Als Ursprung wählen wir den einen der beiden Punkte, auf die wir das Netz beziehen. Die Richtung nach dem zweiten Bezugspunkt wählen wir zunächst als $+\,x$-Achse.

Wir berechnen aus der Ursprungsseite die Distanz vom Ursprung bis zum $k$ten Punkt (S_k), was sich unter Mitnahme geeigneter Winkel leicht durchführen läßt. Ferner drücken wir den Winkel der Geraden OK mit der $+\,x$-Achse aus (ν_k). Dann ist:

$$x_k = S_k \cos \nu_k \tag{15 a}$$

$$y_k = S_k \sin \nu_k \tag{15 b}$$

Wir bezeichnen:

$$\frac{\partial x_k}{\partial l_i} = \varphi_i^x; \quad \frac{\partial y_k}{\partial l_i} = \varphi_i^y$$

Wenn das Gewicht der i-ten Beobachtung mit p_i bezeichnet wird, so ist bekanntlich (siehe *F. R. Helmert*, Ausgleichungssrechnung, Leipzig 1907, SS. 246 und 247):

$$(16\text{ a})\quad m^2 x_k = m^2 \left[\left[\frac{\varphi x\, \varphi x}{p}\right] - \frac{\left[\frac{a\varphi x}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{b\varphi x}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]} - \frac{\left[\frac{c\varphi x}{p}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]} \right]$$

$$(16\text{ b})\quad m^2 y_k = m^2 \left[\left[\frac{\varphi y\, \varphi y}{p}\right] - \frac{\left[\frac{a\varphi y}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{b\varphi y}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]} - \frac{\left[\frac{c\varphi y}{p}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]} \right]$$

Dabei stellt m den mittleren Fehler der Gewichtseinheit dar.

Wir drehen nun das Koordinatensystem um den Ursprung O um einen Winkel ε in positivem Sinne. Die Koordinaten des Punktes K in dem neuen System bezeichnen wir mit x_k' und y_k'.

Es gelten dann die Gleichungen

$$(17\text{ a})\quad x_k' = x_k \cos\varepsilon + y_k \sin\varepsilon$$

$$(17\text{ b})\quad y_k' = -x_k \sin\varepsilon + y_k \cos\varepsilon$$

Um die mittleren Fehler von x'_k und y'_k zu bestimmen, haben wir die Größen

$$\frac{\partial x'_k}{\partial l_i} = \varphi_i^{x'}; \quad \frac{\partial y'_k}{\partial l_i} = \varphi_i^{y'}$$

zu ermitteln. Es ist:

$$(18)\quad \varphi x_i' = \frac{\partial x'_k}{\partial l_i} = \frac{\partial x_k}{\partial l_i}\cos\varepsilon + \frac{\partial y_k}{\partial l_i}\sin\varepsilon = \varphi_i^x \cos\varepsilon + \varphi_i^y \sin\varepsilon$$

$$(19)\quad \varphi y_i' = \frac{\partial y'_k}{\partial l_i} = -\frac{\partial x_k}{\partial l_i}\sin\varepsilon + \frac{\partial y_k}{\partial l_i}\cos\varepsilon = -\varphi_i^x \sin\varepsilon + \varphi_i^y \cos\varepsilon$$

Nun ist aber

$$(20)\quad m^2 x_k' = m^2 \left\{ \left[\frac{\varphi x'\, \varphi x'}{p}\right] - \frac{\left[\frac{a\,\varphi x'}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{b\,\varphi x'}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]} - \frac{\left[\frac{c\varphi x'}{p}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]} \right\}$$

Aus (18) folgt:

$$(21)\quad \left[\frac{\varphi x'\, \varphi x'}{p}\right] = \left[\frac{\varphi x\, \varphi x}{p}\right]\cos^2\varepsilon + \left[\frac{\varphi y\, \varphi y}{p}\right]\sin^2\varepsilon + 2\left[\frac{\varphi x\, \varphi y}{p}\right]\sin\varepsilon\cos\varepsilon$$

Leicht erkennt man auch die Richtigkeit der folgenden Formeln:

$$(22)\quad \frac{\left[\frac{a\varphi x'}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} = \frac{\left[\frac{a\varphi x}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\cos^2\varepsilon + \frac{\left[\frac{a\varphi y}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\sin^2\varepsilon + 2\,\frac{\left[\frac{a\varphi x}{p}\right]\left[\frac{a\varphi y}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\sin\varepsilon\cos\varepsilon$$

$$(23)\quad \frac{\left[\frac{b\varphi x'}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]} = \frac{\left[\frac{b\varphi x}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}\cos^2\varepsilon + \frac{\left[\frac{b\varphi y}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}\sin^2\varepsilon +$$

$$+ 2\,\frac{\left[\frac{b\varphi x}{p}\cdot 1\right]\left[\frac{b\varphi y}{p}\cdot 2\right]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}\sin\varepsilon\cos\varepsilon$$

$$(24)\quad \frac{\left[\frac{c\varphi x'}{p}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]} = \frac{\left[\frac{c\varphi x}{p}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]}\cos^2\varepsilon + \frac{\left[\frac{c\varphi y}{p}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]}\sin^2\varepsilon +$$

$$+ 2\,\frac{\left[\frac{c\varphi x}{p}\cdot 2\right]\left[\frac{c\varphi y}{p}\cdot 2\right]}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]}\sin\varepsilon\cos\varepsilon$$

Wir führen die abkürzenden Bezeichnungen ein:

$$(25\text{ a})\quad Q_{11} = \left[\frac{\varphi x\,\varphi x}{p}\right] - \frac{\left[\frac{a\,\varphi x}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{b\,\varphi x}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]} - \frac{\left[\frac{c\,\varphi x}{p}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]}$$

$$(25\text{ b})\quad Q_{22} = \left[\frac{\varphi y\,\varphi y}{p}\right] - \frac{\left[\frac{a\,\varphi y}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{b\,\varphi y}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]} - \frac{\left[\frac{c\,\varphi y}{p}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]}$$

$$(25\text{ c})\quad Q_{12} = \left[\frac{\varphi x\,\varphi y}{p}\right] - \frac{\left[\frac{a\,\varphi x}{p}\right]\left[\frac{a\,\varphi y}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{b\,\varphi x}{p}\cdot 1\right]\left[\frac{b\,\varphi y}{p}\cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]} -$$

$$- \frac{\left[\frac{c\,\varphi x}{p}\cdot 2\right]\left[\frac{c\,\varphi y}{p}\cdot 2\right]}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]}$$

Damit erhalten wir aus den Gleichungen (20) bis (24)

(26) $m^2 x_k' = m^2 \left\{ Q_{11} \cos^2 \varepsilon + Q_{22} \sin^2 \varepsilon + 2\, Q_{12} \sin \varepsilon \cos \varepsilon \right\}$

Auch hier können wir die Werte von ε bestimmen, für die $m^2 x'_k$ ein Extremum wird.

Ganz analog zu der entsprechenden Betrachtung bei der vermittelnden Ausgleichung finden wir, wenn wir den Wert von ε für den $m^2 x'_k$ ein Maximum wird, mit ω_1, den Wert für den es ein Minimum wird, mit ω_2 bezeichnen:

(27) $$\operatorname{tg} 2\, \omega = \frac{2\, Q_{12}}{Q_{11} - Q_{22}}$$

Das Vorzeichen von $\sin 2\, \omega_1$ stimmt mit dem Vorzeichen von Q_{12} überein.

Ist wieder A^2_k das Maximum von $m^2 x'_k$, B^2_k das Minimum von $m^2 x'_k$, so finden wir aus den Formeln (20) bis (24)

(28 a) $A^2_k = m^2 \left\{Q_{11} \cos^2 \omega_1 + Q_{22} \sin^2 \omega_1 + 2\, Q_{12} \sin \omega_1 \cos \omega_1\right\}$

(28 b) $B^2_k = m^2 \left\{Q_{11} \cos^2 \omega_2 + Q_{22} \sin^2 \omega_2 + 2\, Q_{12} \sin \omega_2 \cos \omega_2\right\}$

oder da

$$\omega_2 = \omega_1 + \frac{\pi}{2}$$

(28 c) $B^2_k = m^2 \left\{Q_{11} \sin^2 \omega_1 + Q_{22} \cos^2 \omega_1 - 2\, Q_{12} \sin \omega_1 \cos \omega_1\right\}$

Durch einfache Umformung erhält man ferner:

$$A^2_k = m^2 \left\{Q_{11} + Q_{12} \operatorname{tg} \omega_1\right\} = m^2 \left\{Q_{22} + Q_{12} \operatorname{cotg} \omega_1\right\}$$

$$B^2_k = m^2 \left\{Q_{11} - Q_{12} \operatorname{cotg} \omega_1\right\} = m^2 \left\{Q_{22} - Q_{12} \operatorname{tg} \omega_1\right\}$$

Auch hier ist:

(29) $$\underline{\underline{m^2 x_k = A^2_k \cos^2 \omega_1 + B^2_k \sin^2 \omega_1}}$$

und A_k und B_k sind die große und kleine Halbachse der mittleren Fehlerellipse.

Damit ist unsere Aufgabe auch für die bedingte Triangulationsausgleichung gelöst.