

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik =  
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

**Herausgeber:** Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

**Band:** 39 (1941)

**Heft:** 8

**Artikel:** Calcul du relèvement par inversion

**Autor:** Bachmann, W.K.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-199130>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Calcul du relèvement par inversion

par *W. K. Bachmann*, géomètre officiel, licencié ès sciences.

Le problème du relèvement (détermination des coordonnées provisoires) a déjà fait l'objet d'un grand nombre de publications; il semble au premier abord inutile de revenir sur cette question. Cependant, un examen plus détaillé montre que les méthodes indiquées jusqu'à présent donnent toutes lieu à des calculs relativement longs. En effet, si nous utilisons la méthode de Collins, nous devons calculer deux intersections, dont la première sert uniquement à déterminer le point de Collins, tandis que la seconde donne le point cherché. Un autre procédé se base sur une construction géométrique indiquée par Cassini. Il est avantageusement appliqué lorsqu'on utilise la machine à calculer; les calculs y relatifs sont cependant aussi assez longs étant donné que deux points auxiliaires doivent préalablement être déterminés. Une troisième méthode, fréquemment appliquée dans la pratique, est celle de Kästner. Cette dernière, ainsi que celle indiquée par Delambre sont également trop longues.

Il y a donc lieu de se demander si l'on ne pourrait pas diminuer dans une certaine mesure l'importance de ces calculs en introduisant au préalable une transformation géométrique appropriée. Le but envisagé peut être atteint très simplement en appliquant l'inversion ou bien la transformation conforme

$$(1) \quad w = \frac{1}{z}$$

$$\text{où} \quad \begin{aligned} z &= x + iy \\ w &= \xi + i\eta. \end{aligned}$$

On sait que cette dernière transformation se compose d'une inversion suivie d'une symétrie par rapport à l'axe réel.

Dans le but de faciliter la lecture de ce qui suit, j'indiquerai ci-après quelques propriétés de la transformation conforme sus-mentionnée.

### 1° Rappel de quelques propriétés de la transformation (1).

$$\begin{aligned} \text{Posons} \quad z &= x + iy = r \cdot e^{i\varphi} \\ w &= \xi + i\eta = R \cdot e^{i\phi}; \end{aligned}$$

la relation (1) nous donne

$$R e^{i\phi} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}.$$

Au point  $p$  de rayon vecteur  $r$  et d'argument  $+\varphi$  correspond ainsi le point image  $P$  de rayon vecteur  $R = \frac{1}{r}$  et d'argument  $-\varphi$  (voir fig. 1).

Nous voyons ainsi que la transformation considérée consiste bien en une inversion par rapport au cercle unité ayant son centre à l'origine,

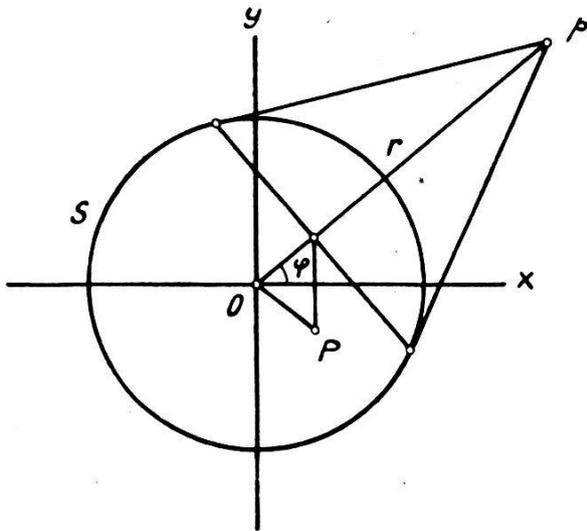


Fig. 1.

et en une symétrie par rapport à l'axe réel. Le résultat indiqué plus haut est ainsi confirmé.

Notons en passant que la transformation (1) est un cas particulier de

$$(2) \quad w = \frac{a \cdot z + b}{c \cdot z + d}.$$

Cette dernière projection joue un rôle très important dans la théorie des fonctions. On montre du reste facilement que la transformation (2) peut être décomposée en une inversion, une rotation et une symétrie. L'importance de (2) résulte du fait que les cercles et les

droites du plan des  $z$  sont transformés en cercles et droites. Etant donné que la relation (2) ne nous intéressera pas directement par la suite, nous ne démontrerons la propriété énoncée que pour la transformation (1).

Dans le plan des  $z$ , une droite ou un cercle est représenté par une équation de la forme

$$(3) \quad a \cdot z\bar{z} + b \cdot \bar{z} + \bar{b} \cdot z + c = 0$$

où  $a$  et  $c$  sont des nombres réels, tandis que l'on a

$$\begin{aligned} z &= x + iy & b &= b_1 + ib_2 \\ \bar{z} &= x - iy & \bar{b} &= b_1 - ib_2 \end{aligned}$$

En effet, la relation (3) peut s'écrire

$$\begin{aligned} a(x^2 + y^2) + (b_1 + ib_2)(x + iy) + (b_1 - ib_2)(x - iy) + c &= 0 \\ a(x^2 + y^2) + 2b_1x - 2b_2y + c &= 0 \end{aligned}$$

et nous avons ainsi bien des cercles si  $a \neq 0$ , et des droites si  $a = 0$ .

Appliquons la transformation (1) à l'ensemble de courbes données par (3); nous obtenons

$$a \cdot \frac{1}{w \cdot \bar{w}} + \frac{b}{w} + \frac{\bar{b}}{\bar{w}} + c = 0$$

ou bien

$$(4) \quad a + b \cdot \bar{w} + \bar{b} \cdot w + c \cdot w \cdot \bar{w} = 0.$$

En comparant les équations (3) et (4), nous constatons que les courbes transformées sont encore des droites et des cercles c. q. f. d. En particulier, nous remarquons que nous obtenons des droites lorsque  $c = 0$ , c'est-à-dire lorsque les droites et les cercles donnés par (3) passent par l'origine des coordonnées. Ainsi, tout cercle et toute droite passant par l'origine des coordonnées se transforme en une droite.

2° Principe de la solution.

Après ces explications préliminaires, nous allons indiquer le principe de la solution envisagée. Dans ce but, nous considérons la fig. 2. Soient  $P_0, P_1$  et  $P_2$  trois points donnés par leurs coordonnées.  $P$  est le point à déterminer, à partir duquel les deux angles  $\alpha$  et  $\beta$  ont été mesurés. Considérons les deux cercles  $S_1$  et  $S_2$ , passant respectivement par les points  $P_0 P_1 P$  et  $P_0 P_2 P$ . Choisissons un nouveau système de coordonnées  $xy$  dans le plan de la figure en plaçant son origine en  $P_0$ . Le point  $P$  est caractérisé par le fait qu'il doit être situé à la fois sur les deux cercles  $S_1$  et  $S_2$ . En appliquant la projection (1), les deux cercles  $S_1$  et  $S_2$  se transforment en deux droites. Soit  $Q$  le point d'intersection de ces dernières. En utilisant ensuite la transformation inverse  $z = \frac{1}{w}$ , le point  $Q$  se transforme en  $P$ , et nous trouvons ainsi le point cherché.

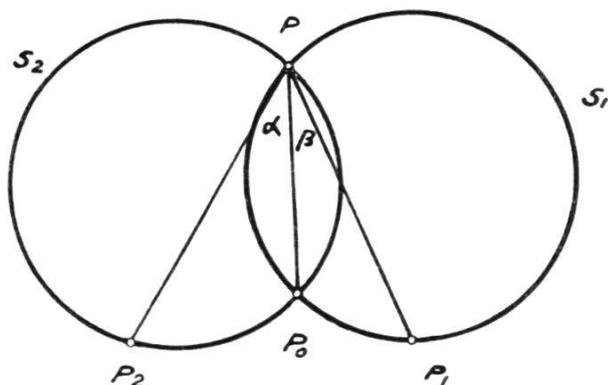


Fig. 2.

Nous constatons ainsi que le problème du relèvement a été ramené à celui de l'intersection.

3° Etablissement des formules fondamentales.

Développons maintenant la solution analytique du problème. Pour simplifier les calculs, nous choisissons les axes de coordonnées parallèles à ceux du système de projection du pays en question. Pour la Suisse, nous dirigeons donc l'axe des  $x$  vers le nord et l'axe des  $y$  vers l'est. Considérons le cercle  $S_1$  circonscrit au triangle  $P_0 P_1 P$  (voir fig. 3).

Déterminons premièrement les coordonnées de son centre  $C_1$  en introduisant les désignations suivantes:

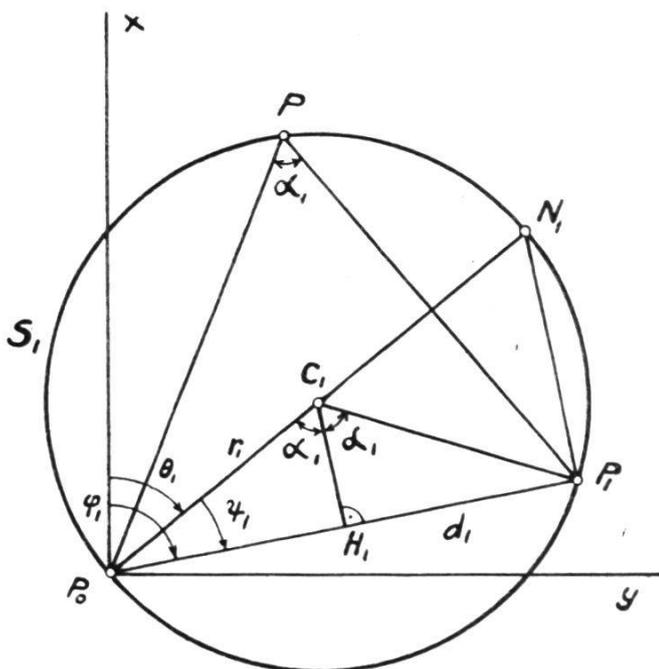


Fig. 3.

$$\overline{P_0 P_1} = d_1 \qquad \overline{P_0 C_1} = r_1$$

$$\sphericalangle (x P_0 P_1) = \varphi_1 \qquad \sphericalangle (x P_0 N_1) = \Theta_1 \qquad \sphericalangle (N_1 P_0 P_1) = \psi_1.$$

Remarquons que l'on a  $\sphericalangle (P_0 C_1 P_1) = 2 \alpha_1$  puisque  $\sphericalangle (P_0 P P_1) = \alpha_1$ . Nous trouvons en outre en considérant le triangle  $(P_0 C_1 P_1)$ :

$$2 \psi_1 + 2 \alpha_1 = \pi \quad \text{d'où} \quad \psi_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1.$$

A l'aide du triangle  $(P_0 N_1 P_1)$ , nous obtenons

$$\frac{d_1}{2 r_1} = \sin \alpha_1 \qquad \text{d'où} \qquad r_1 = \frac{d_1}{2 \sin \alpha_1}$$

Les coordonnées du centre  $C_1$  sont donc

$$C_1 \begin{cases} y_{C_1} = r_1 \cdot \sin \Theta_1 \\ x_{C_1} = r_1 \cdot \cos \Theta_1 \end{cases}$$

et l'équation du cercle  $S_1$  est

$$(y - r_1 \cdot \sin \Theta_1)^2 + (x - r_1 \cdot \cos \Theta_1)^2 = r_1^2$$

ou bien en développant

$$(5) \quad x^2 + y^2 - 2 x \cdot r_1 \cdot \cos \Theta_1 - 2 y \cdot r_1 \cdot \sin \Theta_1 = 0.$$

(A suivre.)

## † Alberto Keller

Mercoledì, 28 maggio, dopo breve malattia, moriva a Bellinzona il Collega Alberto Keller, Aggiunto alla Direzione dell'Ufficio cantonale del Registro fondiario.

La repentina ed immatura dipartita dell'amato Collega, all'età di soli 44 anni, ha lasciato gli amici ed i colleghi che altamente ne stimavano le doti tecniche e morali, sgomenti.

Alberto Keller era uno di quegli uomini che bisogna amare: per la bontà genuina, per la signorilità spontanea dei tratti, per la gentilezza, la grande operosità, il reale valore, che la modestia vorrebbe nascondere: era di quegli uomini che quando partono lasciano un tale solco che si stenta a colmare. Noi che l'abbiamo potuto apprezzare, non lo dimenticheremo!

La morte di Alberto Keller fu grave sventura per la Sua Famiglia; per l'ufficio cantonale del Registro fondiario, al quale dedicò 15 anni di ammirevole attività, è una perdita ben dura.

Fu nel 1926 che entro in qualità di verificatore presso l'Ufficio cantonale del Registro fondiario. Egli era sceso alcuni anni prima nel Ticino con l'animo colmo di speranze, con il cuore e la mente aperti ai tanti problemi di questa terra ticinese, che ben presto per lui divenne luogo d'elezione e che seppe amare come si ama la terra natia.

All'Ufficio cantonale del Registro fondiario diede subito prova della Sua vasta competenza professionale, della sua solida preparazione matematica e delle preclari doti del suo carattere. Lavorava con costanza indefessa, con una coscienziosità e con uno zelo che destavano l'ammirazione in tutti coloro che l'avvicinavano.

Nel 1931 venne nominato Aggiunto alla Direzione dell'Ufficio.

Tracciare la Sua opera significa rifare la storia dei più importanti lavori catastali e di miglorie fondiari eseguiti nel Cantone Ticino negli ultimi 10 anni. A tutti egli collaborò con la sua esperienza e con una