Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 39 (1941)

Heft: 9

Artikel: Calcul du relèvement par inversion [fin]

Autor: Bachmann, W.K.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-199131

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 18.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SCHWEIZERISCHE
Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik
ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS
Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Kulturtechnik / Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières
ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES
Organe officiel de l'Association Suisse du Génie rural / Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie
Redaktion: Dr. h. c. C. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)
Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats
Expediton, Inseraten- und Abonnements-Annahme:
BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR A.G., WINTERTHUR

No. 9 • XXXIX. Jahrgang der „Schweizerischen Geometer-Zeitung" Erscheinend am zweiten Dienstag jeden Monats 9. September 1941 Inserate: 50 Cts. per einspaltige Nonp.-Zeile	Abonnemente: Schweiz Fr. 12.—, Ausland Fr. 16.— jährlich Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaften für Kulturtechnik u. Photogrammetrie Fr. 9.— jährl. Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz. Geometervereins

Calcul du relèvement par inversion

par *W. K. Bachmann*, géomètre officiel, licencié ès sciences.

(Fin)

Posons maintenant $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$, ce qui nous donne

$$x^2 + y^2 = z\bar{z} \qquad 2x = z + \bar{z} \qquad 2y = \frac{z - \bar{z}}{i} = -i\,(z - \bar{z}))$$

et l'équation du cercle S_1 devient

$$z\bar{z} - (z + \bar{z})\, r_1 \cdot \cos\Theta_1 + i\,(z - \bar{z})\, r_1 \cdot \sin\Theta_1 = 0$$

ou bien

$$z\bar{z} - r_1 \cdot z \cdot (\cos\Theta_1 - i \sin\Theta_1) - r_1 \cdot \bar{z}\,(\cos\Theta_1 + i \sin\Theta_1) = 0$$

et en définitif

$$z\bar{z} - r_1 \cdot z \cdot e^{-i\Theta_1} - r_1 \cdot \bar{z} \cdot e^{+i\Theta_1} = 0. \tag{6}$$

En appliquant la transformation (1), l'équation (6) devient

$$\frac{1}{w \cdot \bar{w}} - \frac{r_1\, e^{-i\Theta_1}}{w} - \frac{r_1 \cdot e^{+i\Theta_1}}{\bar{w}} = 0 \qquad \text{ou bien}$$

$$1 - r_1 \cdot e^{-i\Theta_1} \cdot \bar{w} - r_1 \cdot e^{+i\Theta_1} \cdot w = 0.$$

En posant, comme plus haut $w = \xi + i\eta$ et $\bar{w} = \xi - i\eta$, nous trouvons la droite

$$d_1\colon\ 1 - 2\, r_1 \cdot \cos\Theta_1 \cdot \xi + 2\, r_1 \cdot \sin\Theta_1 \cdot \eta = 0.$$

L'interprétation géométrique de cette équation est immédiate et il me semble inutile de donner d'autres explications à ce sujet.

Ainsi, les cercles S_1 et S_2 ont pour transformées:

$$(7)\qquad \begin{cases} d_1: & 2r_1 \cdot \cos\Theta_1 \cdot \xi - 2r_1 \cdot \sin\Theta_1 \cdot \eta = 1 \\ d_2: & 2r_2 \cdot \cos\Theta_2 \cdot \xi - 2r_2 \cdot \sin\Theta_2 \cdot \eta = 1. \end{cases}$$

Désignons le déterminant de ce système par Δ; sa valeur est

$$\Delta = 4r_1 \cdot r_2 \cdot \begin{vmatrix} \cos\Theta_1 & -\sin\Theta_1 \\ \cos\Theta_2 & -\sin\Theta_2 \end{vmatrix} = 4r_1r_2(\sin\Theta_1\cos\Theta_2 - \cos\Theta_1\sin\Theta_2)$$

ou bien

$$(8)\qquad \Delta = 4r_1r_2\sin(\Theta_1 - \Theta_2).$$

La résolution du système (7) nous donne

$$\xi = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2r_1\sin\Theta_1 \\ 1 & -2r_2\sin\Theta_2 \end{vmatrix} = \frac{2}{\Delta}(r_1\sin\Theta_1 - r_2\sin\Theta_2)$$

$$\eta = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} 2r_1\cos\Theta_1 & 1 \\ 2r_2\cos\Theta_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{\Delta}(r_1\cos\Theta_1 - r_2\cos\Theta_2)$$

d'où finalement

$$(9)\qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{r_1\sin\Theta_1 - r_2\sin\Theta_2}{2r_1r_2\sin(\Theta_1 - \Theta_2)} \\[2ex] \eta = \dfrac{r_1\cos\Theta_1 - r_2\cos\Theta_2}{2r_1r_2\sin(\Theta_1 - \Theta_2)}. \end{cases}$$

Appliquons maintenant la transformation inverse $z = \dfrac{1}{w}$; on a

$$x + iy = \frac{1}{\xi + i\eta} = \frac{\xi - i\eta}{\xi^2 + \eta^2}$$

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2(\sin\Theta_1\sin\Theta_2 + \cos\Theta_1\cos\Theta_2)}{4r_1^2r_2^2\sin^2(\Theta_1 - \Theta_2)}$$

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\Theta_1 - \Theta_2)}{4r_1^2r_2^2\sin^2(\Theta_1 - \Theta_2)}$$

$$\xi - i\eta = \frac{(r_1\sin\Theta_1 - r_2\sin\Theta_2) - i(r_1\cos\Theta_1 - r_2\cos\Theta_2)}{2r_1r_2\sin(\Theta_1 - \Theta_2)}$$

$$x + iy = \frac{\xi - i\eta}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{2r_1r_2\sin(\Theta_1 - \Theta_2)}{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\Theta_1 - \Theta_2)} \cdot \Big\{ \ldots$$

$$\cdot \Big\{ (r_1\sin\Theta_1 - r_2\sin\Theta_2) - i(r_1\cos\Theta_1 - r_2\cos\Theta_2) \Big\},$$

d'où, en séparant les parties imaginaire et réelle

$$(10)\qquad \boxed{\begin{aligned} x &= \frac{2r_1r_2\sin(\Theta_1 - \Theta_2)}{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\Theta_1 - \Theta_2)} \cdot (r_1\sin\Theta_1 - r_2\sin\Theta_2) \\ y &= \frac{-2r_1r_2\sin(\Theta_1 - \Theta_2)}{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\Theta_1 - \Theta_2)} \cdot (r_1\cos\Theta_1 - r_2\cos\Theta_2). \end{aligned}}$$

4° *Interprétation géométrique des relations* (10).

Les relations (10) admettent une interprétation géométrique très simple; il suffit en effet d'introduire les centres $C_1\,(y_{C_1}, x_{C_1})$ et $C_2\,(y_{C_2}, x_{C_2})$ des deux cercles S_1 et S_2 (voir fig. 4).

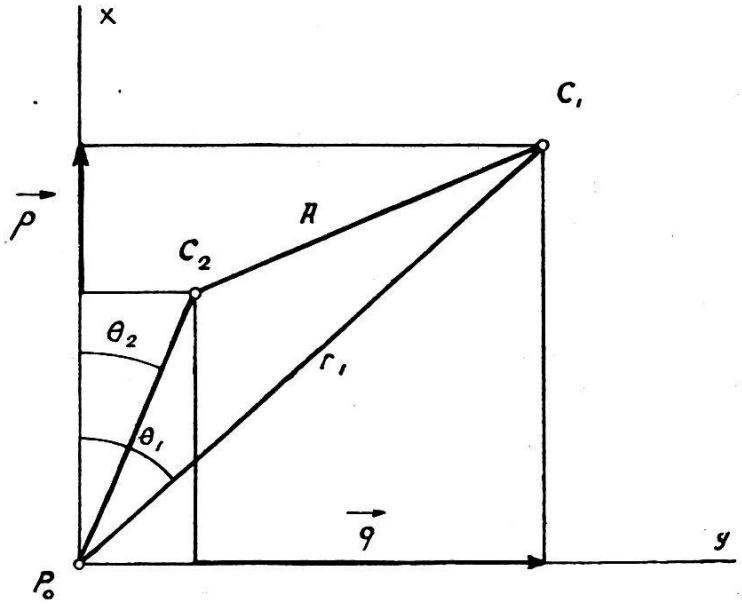

Fig. 4.

En désignant la distance $\overline{C_1\,C_2}$ par R et la surface du triangle $(P_0\,C_1\,C_2)$ par S, nous avons

$$R^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2\,r_1\,r_2 \cos\,(\Theta_1 - \Theta_2)$$

$$4\,S = 2\,r_1\,r_2 \sin\,(\Theta_1 - \Theta_2)$$

d'où
$$\frac{4\,S}{R^2} = \frac{2\,r_1\,r_2 \sin\,(\Theta_1 - \Theta_2)}{r_1^2 + r_2^2 - 2\,r_1\,r_2 \cos\,(\Theta_1 - \Theta_2)}.$$

La surface S est naturellement prise avec son signe; elle peut être positive ou négative. Posons maintenant

(11) $$\lambda = \frac{4\,S}{R^2}.$$

Soient p et q les projections du vecteur $\overrightarrow{C_2\,C_1}$ sur les axes de coordonnées; nous avons

(12) $$\begin{cases} p = r_1 \cos\,\Theta_1 - r_2 \cos\,\Theta_2 \\ q = r_1 \sin\,\Theta_1 - r_2 \sin\,\Theta_2 \end{cases}$$

et les relations (10) peuvent alors s'écrire

(13) $$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{4\,S}{R^2} \cdot q \\ y &= -\frac{4\,S}{R^2} \cdot p \end{aligned}}$$

où *tous les éléments ont une signification géométrique.*

Dans le but de faciliter les calculs numériques, nous allons introduire les coordonnées des centres C_1 et C_2, ce qui nous donne

$$2\, r_1\, r_2 \sin\,(\Theta_1 - \Theta_2) = 2\,(y_{C_1}\, x_{C_2} - x_{C_1}\, y_{C_2})$$

$$p = (x_{C_1} - x_{C_2})$$

$$q = (y_{C_1} - y_{C_2})$$

d'où les relations

$$(14) \qquad \boxed{\begin{aligned} x &= \frac{2\,(y_{C_1}\, x_{C_2} - x_{C_1}\, y_{C_2})}{(y_{C_1} - y_{C_2})^2 + (x_{C_1} - x_{C_2})^2} \cdot (y_{C_1} - y_{C_2}) \\ y &= \frac{-\,2\,(y_{C_1}\, x_{C_2} - x_{C_1}\, y_{C_2})}{(y_{C_1} - y_{C_2})^2 + (x_{C_1} - x_{C_2})^2} \cdot (x_{C_1} - x_{C_2}) \end{aligned}}$$

5° *Calculs numériques.*

Dans ce qui précède, nous avons établi toutes les formules utiles pour le calcul numérique du relèvement. Afin d'en faciliter l'application, nous allons les résumer ici.

Soient α_1 et α_2 les deux angles mesurés. Il est essentiel d'introduire l'angle α_2 tel qu'il est indiqué à la fig. 5 et non pas l'angle $P_2\, P\, P_0$; nous obtenons ainsi les mêmes formules pour la détermination des deux

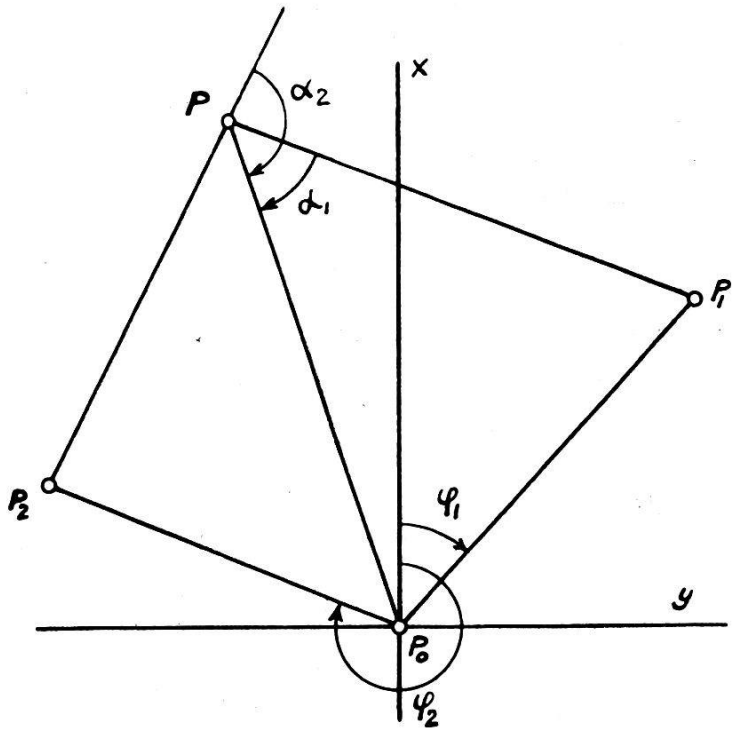

Fig. 5.

		±			±	
P :	y_P	—	52 161.16	x_P	—	37 222.20
	Δy_0	—	689.37	Δx_0	+	624.81
P_0 : 7	y_0	—	51 471.79	x_0	—	37 847.01
P_1 : 1	y_1	—	50 947.34	x_1	—	36 870.44
P_2 : 2	y_2	—	51 729.30	x_2	—	38 394.39
	$\Delta y_1 = y_1 - y_0$	+	524.45	$\Delta x_1 = x_1 - x_0$	+	976.57
	$\Delta y_2 = y_2 - y_0$	—	257.51	$\Delta x_2 = x_2 - x_0$	—	547.38

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} = +0.537033 \qquad \varphi_1 = 31^{gr}\ 37'\ 47''$$

$$\sin \alpha_1 = +0{,}85\ 12\ 59 \qquad \alpha_1 = 64^{gr}\ 83'\ 21''$$

$$\Theta_1 = \varphi_1 + \alpha_1 - 100^{gr} = 396^{gr}\ 20'\ 68''$$

$$\sin \varphi_1 = +0{,}47\ 31\ 23 \qquad \sin \Theta_1 = -0{,}05\ 95\ 48$$

$$\cos \varphi_1 = +0{,}88\ 09\ 96 \qquad \cos \Theta_1 = +0{,}99\ 82\ 25$$

$$d_1 = \frac{\Delta y_1}{\sin \varphi_1} = \frac{\Delta x_1}{\cos \varphi_1} = \left.\begin{matrix} 1108.485 \\ 1108.484 \end{matrix}\right\} 1108.484$$

$$2\, r_1 = \frac{d_1}{\sin \alpha_1} = 1302.170 \qquad r_1 = 651.085$$

$$y_{C1} = r_1 \cdot \sin \Theta_1 = -\ 38.77$$

$$x_{C1} = r_1 \cdot \cos \Theta_1 = +\ 649.93$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} = +0.470441 \qquad \varphi_2 = 227^{gr}\ 99'\ 36''$$

$$\sin \alpha_2 = +0{,}46\ 31\ 03 \qquad \alpha_2 = 169^{gr}\ 34'\ 72''$$

$$\Theta_2 = \varphi_2 + \alpha_2 - 100^{gr} = 297^{gr}\ 34'\ 08''$$

$$\sin \varphi_2 = -0{,}42\ 56\ 88 \qquad \sin \Theta_2 = -0{,}99\ 91\ 27$$

$$\cos \varphi_2 = -0{,}90\ 48\ 70 \qquad \cos \Theta_2 = -0{,}04\ 17\ 58$$

$$d_2 = \frac{\Delta y_2}{\sin \varphi_2} = \frac{\Delta x_2}{\cos \varphi_2} = \left.\begin{matrix} 604.926 \\ 604.926 \end{matrix}\right\} 604.926$$

$$2\, r_2 = \frac{d_2}{\sin \alpha_2} = 1306.245 \qquad r_2 = 653.122$$

$$y_{C2} = r_2 \cdot \sin \Theta_2 = -\ 652.55$$

$$x_{C2} = r_2 \cdot \cos \Theta_2 = -\ 27.27$$

$$y_{C1} - y_{C2} = +613.78$$

$$x_{C1} - x_{C2} = +677.20$$

$$A = y_{C1}\, x_{C2} - x_{C1}\, y_{C2} = +425\ 169.08 \qquad B = (y_{C1} - y_{C2})^2 + (x_{C1} - x_{C2})^2 = +835\ 325.73$$

$$\lambda = 2 \cdot \frac{A}{B} = 2 \cdot 0{,}508986 = +\ 1{,}01797$$

$$\Delta y_C = -\ \lambda\ (x_{C1} - x_{C2}) = -\ 689.37 \qquad \Delta x_C = +\ \lambda\ (y_{C1} - y_{C2}) = +\ 624.81$$

cercles C_1 et C_2. Il est facile de voir pour quelle raison l'angle α_2 doit être introduit tel qu'il est indiqué à la figure 5. L'angle ψ (voir fig. 3) peut en effet être positif ou négatif. Il est facile d'établir une règle y relative. En effet, soit $\overline{P_o P_a}$ le côté pour lequel nous voulons déterminer le cercle S_a. Considérons le vecteur $\overrightarrow{P_o P_a}$. A l'aide d'une figure, la position approchée du point P peut être déterminée ainsi que la position approchée du centre C_a de S_a. Nous obtenons alors la règle suivante:

Si le centre C_a est situé à gauche du vecteur $\overrightarrow{P_o P_a}$, nous prenons pour α l'angle intérieur du triangle $P_o PP_a$ en P; dans le cas où le centre est situé à droite du vecteur $\overrightarrow{P_o P_a}$, nous prenons l'angle extérieur.

En supprimant les indices (puisque les relations sont valables à la fois pour les deux cercles), nous avons

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\Theta = \varphi - \psi = \varphi + \alpha - \frac{\pi}{2}$$

$$r = \frac{d}{2 \sin \alpha}.$$

En ajoutant à ces relations les formules (14), nous avons tout ce qui est nécessaire pour déterminer le point P.

Les calculs numériques s'effectuent très rapidement en utilisant le formulaire ci-joint. Je tiens cependant à faire remarquer que j'ai expressément renoncé à développer des formules de contrôle pour ces calculs, et ceci pour la simple raison qu'elles ne seraient d'aucune utilité pratique. En effet, une fois les coordonnées provisoires déterminées, nous devons procéder à la compensation en utilisant les visées surabondantes. Dans ce but, les gisements des côtés déjà utilisés pour la détermination du point approché sont de nouveau calculés. Une fois ces gisements obtenus, les calculs se vérifient immédiatement puisque nous devons de nouveau obtenir les angles α_1 et α_2.

La méthode développée permettant de calculer facilement un point en une demi-heure, elle présente des avantages considérables pour la pratique.

Lausanne, le 3 avril 1941.