L'application à la géodésie d'un théorème de Tchebychef [fin]

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **42 (1944)**

Heft 5

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-201826

L'application à la géodésie d'un théorème de Tchebychef

par *A. Ansermet*

(Fin)

Calcul des coordonnées planes conformes.

Ce calcul étant déjà développé de façon explicite (513, p. 230 et suivantes) dans la littérature géodésique on peut se borner à quelques remarques générales.

Dans l'ouvrage précité J. Laborde s'appuyant sur l'expression générale

$$X + i \cdot Y = F(x + iy) \qquad \text{où } i = \sqrt{-1}$$

préconise la solution

$$X + i\,Y = x + iy + (A + Bi)\,(x + iy)^3$$

où les paramètres ont les valeurs suivantes:

$$A = \frac{1}{12\,R^2}\,(1 - n \cos 2\alpha);\; B = \frac{1}{12\,R^2}\, n \cdot \sin 2\alpha.$$

X, Y désignent les coordonnées planes conformes cherchées et x, y des valeurs intermédiaires ou transitoires.

En d'autres termes la projection en deux stades, les coordonnées x, y n'ayant qu'un caractère transitoire; elles sont elles-même conformes.

On voit immédiatement que pour

$$\alpha = 0 \qquad n = 1 \qquad \text{on a}$$

$$A = 0 \qquad B = 0 \qquad X = x \qquad Y = y$$

c'est le système de Gauss (cylindrique, transversal, conforme). Le meridien origine est l'axe neutre de cette projection.

A certains égards la projection stéréographique est préférable comme mode transitoire de représentation. Les paramètres prennent alors les valeurs:

$$A = -\frac{n \cos 2\alpha}{12\,R^2} \qquad\qquad B = \frac{n \sin 2\alpha}{12\,R^2}$$

pour $n = 0$ on a $A = B = 0$ (indépendants de α)

$$X = x \qquad\qquad Y = y$$

Le développement de l'expression:

$$X + i\,Y = x + iy + (A + Bi)\,(x + iy)^3$$

montre qu'il y a en tout 8 termes de 3e ordre soit 4 termes pour chaque coordonnée sauf pour les cas particuliers ci-après:

$$a = 0 \text{ ou } 90^0.\ B = 0.$$

$$a = 45^0 \text{ ou } 135^0.\ A = 0.$$

Pour le territoire de la suisse la valeur $n = -0{,}5$ est intéressante. Ce problème a déjà été étudié ([4]). Il convient d'insister encore sur le rôle capital de la valeur $n = 0$ comme solution transitoire plutôt que $n = 1$. Les coordonnées polaires s'adaptent aussi ($n = 0$).

Projection de l'ellipsoïde sur la sphère $R = \sqrt{MN}$.

La solution usuelle est bien connue: le parallèle central B_0 sur l'ellipsoïde est projeté sur le parallèle b_0 de la sphère ([2], p. 64 et suiv.). Ce parallèle joue le rôle d'axe neutre de cette projection.

Les cônes tangents le long des parallèles B_0 et b_0 aux deux surfaces ont même apothème:

$$N_0 \operatorname{ctg} B_0 = \sqrt{M_0\, N_0} \operatorname{ctg} b_0$$

Les parallèles sont des isomètres de la projection, solution très simple.

Des solutions plus générales se laissent concevoir où les courbes-isomètres sont de 3e ordre.

Rapportons l'ellipsoïde à un système de coordonnées x, y défini à l'aide d'un réseau orthogonal constitué par les méridiens et parallèles de la surface.

L'altération linéaire est donnée par l'expression

$$-\left(\frac{1}{3}\,\frac{e'^2}{N^2{}_0\, M_0} \sin 2\, B_0 + C\right) x^3 + 3\,B\,x^2\,y + 3\,C\,xy^2 - B\,y^3$$

([1], p. 53–54).

Les deux paramètres B et C rendent le calcul complexe. Si $B = C = 0$ on retombe sur la solution usuelle de Lambert-Gauss.

Simplifions le calcul en posant $B = 0$, le paramètre C restant à déterminer.

$$-\left(\frac{1}{3}\,\frac{e'^2}{N^2{}_0\, M_0} \sin 2\, B_0 + C\right) x^3 + 3\,C\,xy^2 =$$

$$= -x\left\{(K + C)\,x^2 - 3\,C\,y^2\right\}$$

$$\text{où } K = \frac{1}{3}\,\frac{e'^2}{N^2{}_0\, M_0} \sin 2\, B_0$$

Les termes en C constituent un appoint à ajouter à la formule usuelle. Etudions le rôle de ces termes en remarquant que l'expression

$$(K + C) \cdot x^2 - 3\,Cy^2$$

peut être assimilée au 1er membre de l'equation d'une ellipse. La peripherie du territoire est inscrite dans l'isomètre de paramètre n où

$$n = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \qquad \text{Si } n = -0{,}5 \qquad b^2 : a^2 = 3 : 1 \text{ (Suisse)}$$

Exprimons que l'ellipse $(K + C)\,x^2 - 3\,Cy^2 = \text{const.}$ coïncide avec l'isomètre $n = -0{,}5$.

$$(K + C) : (-3\,C) = 3 : 1$$

$$K + C = -9\,C \qquad C = -0.1\,K$$

ce qui donne pour l'altération linéaire

$$-x\,(0.9\,K\,x^2 + 0.3\,K\,y^2)$$

tout le long de l'isomètre. Dans le voisinage du sommet de cette courbe ($y = 0$) on a un seul terme $-0{,}9\,Kx^3$ au lieu de Kx^3 (gain 10 % environ).

Pratiquement on préférera la solution usuelle $B = C = 0$.

Conclusions.

Cette théorie des projections d'après Tchebychef et G. Darboux est relativement peu connue en géodésie. Au premier abord elle semble quelque peu abstraite. Le but de ces lignes est de contribuer à la faire connaître. Ce problème est encore susceptible de développements intéressants surtout en ce qui concerne les territoires d'étendue restreinte comme la suisse. A ce titre il a paru opportun d'y consacrer quelques pages dans notre organe professionnel.

Littérature.

[1] Driencourt & Laborde. Traité des projections, 4e fascicule.
[2] Rosenmund M. Projektionssystem der Schweiz. Landesvermessung.
[3] Darboux G. Bulletin des sciences mathématiques 1911, p. 23, 55.
[4] Schweiz. Zeitschrift für Vermessungswesen, juillet 1937.

Rectification (N° du 11 avril)

lire l'étude *du* problème (page 83, 11e ligne en remontant).
Formules préliminaires: lire $2\,n\,sin\,2\,\alpha \cdot xy$ au lieu de $2\,n\cos 2\,\alpha \cdot xy$ (page 84); lire $C_{12} = 0$ au lieu de $C_{22} = 0$ (page 85); lire $J_1 + J_2 = J_p$ au lieu de $J_2 + J_2 = J_p$ (page 85).

M. Bertschmann rend encore attentif sur le fait que le projet des statuts a été présenté à la société suisse de photogrammétrie qui désire également se faire recevoir comme groupe de la nouvelle société et que cette dernière ne propose, au sujet du dit projet que quelques modifications de caractère accessoire.

M. Ruh désire que dans le même sens qu'avec la société suisse de photogrammétrie, il soit pris contact avec la société des ingénieurs ruraux. M. Bangerter appuie cette proposition. Il salue spécialement la création d'un secrétariat permanent. Il est d'avis que les membres du comité central ne devraient pas être surchargés de travail comme c'est le cas actuellement pour le trésorier. Tout en se déclarant d'accord d'une part avec le nouveau projet des statuts, il demande d'autre part s'il ne serait pas opportun, indépendamment de la transformation projetée de créer le dit secrétariat central dans le plus bref délai.

M. Baudet soulève la question financière et demande si la nouvelle organisation n'apportera pas des charges plus onéreuses pour les membres. M. Maderni se fait l'interprête de ses collègues tessinois et désire une proche réalisation du projet de la nouvelle organisation, étant donné que la moitié des praticiens tessinois sont également ingénieurs ruraux. Répondant à MM. Ruh et Bangerter, le président fait remarquer qu'un contact a déjà été pris avec certains membres de la société des ingénieurs ruraux et qu'en ce lieu les opinions sont partagées. Il sera en première ligne du devoir des jeunes ingénieurs ruraux-géomètres de préconiser la fusion.

Luder a fait la constatation que les membres de la société des ingénieurs ruraux sont en majeure partie des fonctionnaires, un seul praticien fait partie du comité.

Il est décidé de soumettre le projet des statuts à l'examen des sections qui devront rendre compte de leure décision jusqu'à fin novembre 1944.

10⁰ *Divers et propositions individuelles.* Schärer prie les commissions de taxation des sections de convoquer la commission centrale lors des premières taxations qui auront lieu sur la base du tarif fédéral.

Munier aborde la question des subventions pour la mise à jour des plans d'ensemble fédéraux. Le président prend note de cette demande qui sera mise au clair en même temps que la question encore pendante du contenu des plans d'ensemble originaux.

A 15 heures 30 le président déclare la conférence close et adresse aux participants ses remerciements pour leur collaboration.

Au revoir à l'assemblée générale à Lausanne et à Montreux.

Sulgen, en mai 1944. Le secrétaire: *J. Gsell.*

Comité central. Est admis comme nouveau membre de la S. S. G.: Théodore Werlen, ingénieur rural et géomètre à Sedrun.

Rectifications

L'application à la géodésie d'un théorème de Tchebychef

page 103, ligne 6: lire [1] p. 230; page 103, ligne 17: lire *a lieu* en deux stades. *A. Ansermet.*

Les 140 ans d'existence du cadastre vaudois.

A page 107, 4e ligne, du numéro de mai 1944 de la Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières, lire: 20 janvier 1882 (au lieu de ...1822). *Ls. H.*