Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 43 (1945)

Heft: 2

Artikel: Théorie des erreurs de l'observation des variables secondaires

Autor: Bachmann, W.K.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-202926

SCHWEIZERISCHE
Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik
ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS
Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Kulturtechnik / Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières
ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES
Organe officiel de l'Association Suisse du Génie rural / Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie
Redaktion: Dr. h. c. C. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)
Ständ. Mitarbeiter für Kulturtechnik: E. RAMSER, Prof. für Kulturtechnik an der ETH., Freie Straße 72, Zürich
Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats
Expediton, Inseraten- und Abonnements-Annahme
BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR AG., WINTERTHUR

No. 2 • XLIII. Jahrgang der „Schweizerischen Geometer-Zeitung“ Erscheinend am zweiten Dienstag jeden Monats 13. Februar 1945 Inserate: 25 Cts. per einspalt. Millimeter-Zeile. Bei Wiederholungen Rabatt gemäß spez. Tarif	Abonnemente: Schweiz Fr. 14.—, Ausland Fr. 18.— jährlich Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaften für Kulturtechnik u. Photogrammetrie Fr. 9.— jährl. Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz. Geometervereins

Théorie des erreurs de l'observation des variables secondaires

par Dr W. K. Bachmann

I. *Généralités*

La méthode des moindres carrés a surtout été créée pour les géodésiens. Quoique les traités sur la théorie des erreurs citent souvent des exemples tirés d'autres domaines que celui de la géodésie, ceux-ci gardent néanmoins un caractère essentiellement géodésique. Les types d'observation sont:

a) observations directes,
b) observations médiates,
c) observations conditionnelles.

Dans certains problèmes, et notamment en géodésie, on rencontre également des combinaisons de ces types. On est dès lors amené à se demander si *tous* les problèmes d'erreur sont assimilables à l'un des types sus-mentionnés ou à l'une de leurs combinaisons. Nous allons montrer qu'il n'en est nullement ainsi, et que la technique nous pose toute une série de problèmes d'erreur d'un type tout autre. A titre d'application des formules que nous développerons et dans le but de faciliter la lecture de la présente publication, nous traiterons des exemples pratiques à la fin de cet exposé.

Pour ce qui a trait aux problèmes géodésiques, il y a lieu de remarquer que l'on a toujours recours aux observations indépendantes, afin de pouvoir appliquer la loi de la propagation des erreurs. Dans d'autres domaines par contre, tels que la photogrammétrie, l'optique, la mécanique, la météorologie, etc., on ne sait souvent pas exactement ce qu'il faut entendre par «observation», d'où il résulte de nombreuses difficultés.

Dans la théorie des erreurs, on considère généralement les deux expressions «observation» et «mesure» comme synonymes. En abordant les nouveaux types de problèmes que nous envisageons, nous devons faire une distinction très nette entre les observations et les mesures, si nous ne voulons pas être amenés à des résultats erronés. Les *mesures* s'effectuant toutes à l'aide d'étalons, *elles sont exemptes d'erreurs. Les observations par contre sont toujours entachées d'erreurs.*

Nous devons en outre introduire deux sortes de variables. *Nous appellerons une variable primaire resp. secondaire suivant que nous pouvons agir directement sur elle ou non. Il est essentiel de remarquer que seules les variables primaires peuvent être mesurées; les observations par contre peuvent se rapporter tout aussi bien aux variables primaires qu'aux variables secondaires.*

Dans tous les problèmes d'erreur, les opérations «observation» et «mesure» s'enchaînent. Une variable observée ou seulement mesurée n'est en effet encore d'aucune utilité pratique.

Attirons encore l'attention du lecteur sur le fait que la théorie des erreurs courante ne traite que le cas de l'observation des variables primaires. Les mesures se rapportant aux mêmes variables, ces deux opérations peuvent être assemblées en une seule, et une distinction entre «observation» et «mesure» se révèle dès lors inutile.

En observant par contre les variables secondaires la distinction entre «observation» et «mesure» devient indispensable. Pour ce type de problèmes, les opérations se compliquent très rapidement si le nombre des variables augmente. On est alors obligé de disposer des opérations de telle sorte que le problème puisse être scindé en plusieurs parties, comportant chacune un nombre inférieur de variables. Aussi ne traiterons-nous ici que les problèmes à deux dimensions, vu que ce sont les seuls qui puissent intéresser le praticien. En procédant ensuite par enchaînement, nous avons la possibilité d'aborder des problèmes à un nombre quelconque de variables.

Etant donné que nous nous occupons uniquement du calcul des erreurs, nous pouvons encore simplifier quelque peu les notations habituelles. Les variables primaires X, Y, etc. étant mesurées, il n'y a que les valeurs voisines de ces mesures qui nous intéressent. Nous supposons en outre les variables secondaires ϵ_1, ϵ_2, etc. voisines de zéro. Dans ces conditions, toute dépendance fonctionnelle entre variables primaires et secondaires peut être donnée par des relations linéaires de la forme

$$
(1) \qquad \left\{
\begin{array}{l}
\epsilon_1 = \alpha_1 (X - X_0) + \beta_1 (Y - Y_0) + \dots \\
\epsilon_2 = \alpha_2 (X - X_0) + \beta_2 (Y - Y_0) + \dots \\
\vdots \\
\epsilon_n = \alpha_n (X - X_0) + \beta_n (Y - Y_0) + \dots
\end{array}
\right.
$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n; X_0, Y_0, \ldots$ sont des constantes. Souvent, nous poserons aussi

$$(2) \qquad \xi = X - X_0 \qquad \eta = Y - Y_0$$

ce qui nous définit les nouvelles variables $\xi, \eta, \ldots$ voisines de zéro.

Introduisons en outre les notations habituelles, de la méthode des moindres carrés:

μ = erreur moyenne à craindre sur l'unité de poids
μ_X = erreur moyenne à craindre sur X
P_X = poids de l'inconnue X
$Q_{XX} = \frac{1}{P_X}$ = coefficient de poids de X

On sait que l'on a

$$(2a) \qquad \mu_X = \pm \sqrt{Q_{XX}}\,\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{P_X}}\,\mu$$

Rappelons pour terminer la méthode symbolique du calcul des coefficients de poids. Si l'on a observé les variables primaires f et g reliées aux variables secondaires x et y par les relations

$$(3) \qquad \begin{cases} f = a_1 x + b_1 y \\ g = a_2 x + b_2 y \end{cases}$$

la méthode symbolique nous donne

$$Q_f = a_1 Q_x + b_1 Q_y \qquad Q_g = a_2 Q_x + b_2 Q_y$$

d'où nous tirons

$$(4) \qquad \begin{cases} Q_{ff} = a_1^2 Q_{xx} + 2\, a_1 b_1 Q_{xy} + b_1^2 Q_{yy} \\ Q_{gg} = a_2^2 Q_{xx} + 2\, a_2 b_2 Q_{xy} + b_2^2 Q_{yy} \\ Q_{fg} = a_1 a_2 Q_{xx} + (a_1 b_2 + a_2 b_1) Q_{xy} + b_1 b_2 Q_{yy} \end{cases}$$

II. Problèmes à deux inconnues

Soient ϵ_1 et ϵ_2 les deux variables secondaires observées qui sont reliées aux variables primaires ξ et η par les relations

$$(5) \qquad \begin{cases} \epsilon_1 = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta \\ \epsilon_2 = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta \end{cases}$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ sont des constantes données.

Désignons le poids des observations par p_1 resp. p_2. *Quel que soit le mode d'observation* que nous utilisons, nous devons tout d'abord éliminer l'une des inconnues ξ et η dans les équations (5). L'élimination de η nous conduit à la relation

(6) $$\beta_2\,\epsilon_1 - \beta_1\,\epsilon_2 = (\alpha_1\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_1)\,\xi$$

ou en posant

(7) $$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$ nous obtenons

(8) $$\Delta\,.\,\xi = \beta_2\,\epsilon_1 - \beta_1\,\epsilon_2$$

Calculons le coefficient de poids en utilisant la méthode symbolique

$$\Delta\,.\,Q_{\xi} = \beta_2\,Q_{\epsilon_1} - \beta_1\,Q_{\epsilon_2}$$

(9) $$\Delta^2\,.\,Q_{\xi\xi} = \beta_2^2\,Q_{\epsilon_1\epsilon_1} - 2\,\beta_1\,\beta_2\,Q_{\epsilon_1\epsilon_2} + \beta_1^2\,Q_{\epsilon_2\epsilon_2}$$

Mais nous avons

(10) $$Q_{\xi\xi} = \frac{1}{p_{\xi}} \qquad Q_{\epsilon_1\epsilon_1} = \frac{1}{p_1} \qquad Q_{\epsilon_2\epsilon_2} = \frac{1}{p_2} \qquad Q_{\epsilon_1\epsilon_2} = 0$$

et la formule (9) devient ainsi

$$\Delta^2\,\frac{1}{p_{\xi}} = \frac{\beta_2^2}{p_1} + \frac{\beta_1^2}{p_2} = \frac{p_2\beta_2^2 + p_1\beta_1^2}{p_1\,p_2} = \frac{[p\,\beta\,\beta]}{p_1\,p_2}$$

(11) $$p_{\xi} = \Delta^2\,\frac{p_1\,p_2}{[p\,\beta\,\beta]}$$

La valeur de ξ, ainsi trouvée étant la même que celle donnée par la méthode des moindres carrés, nous avons encore

(12) $$p_{\xi} = [p\;\alpha\;\alpha\cdot 1];$$

la vérification numérique est immédiate. Introduisons un signe conventionnel caractérisant cette détermination de ξ. Nous écrivons

(13) $$\left.\begin{array}{lll} p_1 & \epsilon_1 = \alpha_1\,\xi + \beta_1\,\eta \\ p_2 & \epsilon_2 = \alpha_2\,\xi + \beta_2\,\eta \end{array}\right]\xi$$

où le signe $]\,\xi$ indique que l'inconnue ξ a été déterminée à l'aide des deux observations ϵ_1 et ϵ_2 moyennant élimination de η. Au point de vue de la théorie des erreurs, les équations (13) peuvent être remplacées par une observation médiate équivalente:

(14) $$\left.\begin{array}{ll} p_1 & \epsilon_1 = \alpha_1\,\xi + \beta_1\,\eta \\ p_2 & \epsilon_2 = \alpha_2\,\xi + \beta_2\,\eta \end{array}\right]\xi \;\equiv\; p_{\xi} \quad \epsilon' = \xi$$

où ϵ' est variable primaire et ξ variable secondaire. Tout se passe donc comme si l'inconnue ξ avait été déterminée directement avec le poids p_ξ donné par la formule (11).

Pour la détermination de η, nous avons maintenant plusieurs possibilités. Procédons tout d'abord par élimination de ξ entre les deux équations (5). Fort de ce qui précède et *quel que soit le mode d'élimination adopté,* nous avons toujours

$$(15) \qquad \left.\begin{array}{ll} p_1 & \epsilon_1 = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta \\ p_2 & \epsilon_2 = \alpha_2 \xi + \xi_2 \eta \end{array}\right] \eta \quad \equiv \quad p_\eta = [p \beta \beta \cdot 1] \qquad \epsilon' = \eta$$

Il importe de remarquer qu'en procédant ainsi, il n'existe aucune corrélation entre ξ et η. En effet, en éliminant η, la valeur de ξ est indépendante de η, et en éliminant ξ, la valeur trouvée pour η est indépendante de ξ. L'ensemble des opérations envisagées pour la détermination de ξ et de η peut donc être donné par les formules équivalentes

$$(16) \qquad \boxed{\left.\begin{array}{ll} p_1 & \epsilon_1 = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta \\ p_2 & \epsilon_2 = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta \end{array}\right] \xi, \eta \quad \equiv \quad \begin{array}{ll} p_\xi = [p \alpha \alpha \cdot 1] & \epsilon_1' = \xi \\ p_\eta = [p \beta \beta \cdot 1] & \epsilon_2' = \eta \end{array}}$$

Une autre méthode de détermination pour η consiste dans l'annulation de ϵ_1 à l'aide de η, l'inconnue ξ ayant préalablement été déterminée. Au point de vue de la théorie des erreurs, cette détermination de η est équivalente à l'observation médiate

$$p_1 \quad \epsilon_1 = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta \, .$$

Si η est déterminée de cette dernière façon, nous écrivons pour l'ensemble des opérations servant à trouver ξ et η

$$(17) \qquad \left.\begin{array}{ll} p_1 & \epsilon_1 = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta \\ p_2 & \epsilon_2 = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta \end{array}\right]_{\xi}^{\eta}$$

où la position de η indique que la variable secondaire ϵ_1 a été utilisée seule pour sa détermination. En remplaçant (17) par des observations médiates équivalentes, nous obtenons

$$(18) \qquad \boxed{\left.\begin{array}{ll} p_1 & \epsilon_1 = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta \\ p_2 & \epsilon_2 = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta \end{array}\right]_{\xi}^{\eta} \quad \equiv \quad \begin{array}{ll} p_1 & \epsilon_1' = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta \\ p_\xi = [p \alpha \alpha \cdot 1] & \epsilon_2' = \xi \end{array}}$$

Il résulte des équations (18) que ce dernier mode d'opération entraîne généralement une corrélation entre les inconnues.

Pour le calcul des coefficients de poids et de corrélation des inconnues, il suffit d'écrire les équations aux poids en partant des observations médiates équivalentes et ceci en suivant la marche habituelle de la méthode des moindres carrés.

Les coefficients $Q_{\xi\xi}$, $Q_{\xi\eta}$, $Q_{\eta\eta}$ étant ainsi obtenus, nous pouvons calculer les erreurs moyennes résiduelles à craindre sur ϵ_1 et ϵ_2 après la détermination des inconnues. Les calculs montrent que ces erreurs résiduelles sont généralement plus fortes que les erreurs moyennes d'observation de ϵ_1 et ϵ_2. On est alors obligé de déterminer les inconnues plusieurs fois et de moyenner les résultats. En ce qui concerne les détails de ces calculs, nous nous référons à la publication: «Théorie des erreurs de l'orientation relative» par Dr W. K. Bachmann.

Dans les lignes qui précèdent, il était souvent question de l'élimination de l'une des inconnues ξ et η entre les équations (5). Précisons comment on procède pratiquement à cette élimination. Si ξ, η sont des variables secondaires et ϵ_1, ϵ_2 des variables primaires, nous avons affaire à un problème d'observations médiates et l'élimination en question s'effectue par voie numérique. Par contre, si ϵ_1, ϵ_2 sont des variables secondaires et ξ, η des variables primaires, l'élimination de η devient un peu plus compliquée. Ecrivons les équations (5) sous la forme

$$(19) \qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = \alpha_1 (X - X_0) + \beta_1 (Y - Y_0) \\ \varepsilon_2 = \alpha_2 (X - X_0) + \beta_2 (Y - Y_0) \end{cases}$$

et déterminons successivement les valeurs X_1, X_2 de X annulant ϵ_1 resp. ϵ_2. Nous avons dès lors

$$(20) \qquad \begin{cases} 0 = \alpha_1 (X_1 - X_0) + \beta_1 (Y - Y_0) \\ 0 = \alpha_2 (X_2 - X_0) + \beta_2 (Y - Y_0) \end{cases}$$

L'élimination de $(Y - Y_0)$ entre ces deux équations nous donne

$$(21) \qquad \alpha_1 \beta_2 (X_1 - X_0) = \alpha_2 \beta_1 (X_2 - X_0)$$

et nous en tirons la valeur cherchée $X = X_0$ qui annulle simultanément ϵ_1 et ϵ_2

$$(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) X_0 = \alpha_1 \beta_2 X_1 - \alpha_2 \beta_1 X_2$$

ou en tenant compte de (7)

$$(22) \qquad \boxed{X = X_0 = \frac{\alpha_1 \beta_2}{\Delta} X_1 - \frac{\alpha_2 \beta_1}{\Delta} X_2}$$

Connaissant X_1 et X_2, la formule (22) nous permet de calculer la valeur X_0 que nous devons attribuer à la variable primaire X. L'inconnue Y se détermine ensuite par l'un des procédés indiqués.

III. Problèmes à plus de deux inconnues

Il est facile de voir que les procédés de calcul que nous venons de développer s'appliquent sans aucune difficulté aux problèmes à un nombre quelconque d'inconnues. Il faut toutefois remarquer que les éliminations se compliquent très rapidement si le nombre des inconnues augmente, de sorte qu'il est préférable de disposer des opérations afin de scinder le problème en plusieurs parties, comportant chacune un nombre inférieur d'inconnues. Cela étant, il s'agit de calculer l'ellipsoïde d'erreur relatif à l'ensemble des opérations effectuées. On y parvient très facilement en partant des observations médiates équivalentes et en suivant les procédés de calcul habituels de la méthode des moindres carrés.

(A suivre.)

Meine Ansicht über das Problem der Flurnamenschreibung

Von *W. Leemann*, a. Kantonsgeometer
Ehemaliges Mitglied der Zürcher Flurnamenkommission

Tritt man an das Problem der Flurnamenschreibung heran, so sieht man sich zunächst vor die *Hauptfrage* gestellt, ob die Flurnamen grundsätzlich in der *Dialektform oder schiftdeutsch* geschrieben werden sollen.

Um einen Anhalt zur Beantwortung dieser Frage zu bekommen, glaube ich am besten so vorzugehen, daß ich aus der großen Mannigfaltigkeit der Namenformen folgende Gruppen heraushebe:

a) Namen, die als Wörter im Schriftdeutschen gar nicht vorkommen oder deren Sinn wenigstens dem Laien dunkel ist. Z. B.: Ghei, Gnüll, Bügen, Beuggen, Lengg, Heuel, Reiti, Gern, Tellen, Hakeb, Schumbel, Wichel, Schijen, Riseten, Beichlen, Steibis, Rüschen, Lücheten, Ramseren, Zuben, Chumen, Bütz, Hapfig, Schweig, Secki, usw.

b) Namen, die nur oder in der großen Mehrzahl in Dialektform geschrieben werden. Z. B.: Rütli, Grüt, Bifang, Mattli, Schwändeli, Bächli, Gätterli, Gimmerme, Gibisnüt, Vilztür, Chrottenbach, Gsang, Gsteig, Vrenelisgärtli, usw.

c) Namen, welche sowohl in der Dialektform und Dialektvarianten als auch schriftdeutsch geschrieben werden. Z. B.: Bungert, Bommert, *Baumgarten;* Wingert, Winget, *Weingarten;* Ischlag, *Einschlag;* Ifang, *Einfang;* Büel, Biel, *Bühl;* Schür, Scheuer, *Scheune;* Treichi, *Tränke;* Chrüz, *Kreuz;* Wyden, *Weiden;* Witi, *Weite;* Grueb, *Grub(e);* Hueb, *Hub;* Hus, *Haus;* Höchi, *Höhe;* Bleichi, *Bleiche;* Hostatt, Hostet, Hostig, *Hofstatt;* Schmitten, *Schmiede;* Stampfi, *Stampfe;* Herti, Härti, *Härte;* Honegg, *Hohenegg;* Humbel, *Hohenbühl;* Hamperg, Humbrig, *Hohenberg;* Chuchi, Kuchi, *Küche;* Spicher, *Speicher* usw.

d) Einfache Namen, wobei ein und dasselbe Wort schriftdeutsche *und* dialektische Bestandteile hat. Z. B.: *Häus*li, *Häus*len, *Kreuz*len, *Stäud*li, *Schwärz*i usw.

e) Zusammensetzungen, in denen das eine Glied schweizerdeutsch, das andere schriftdeutsch ist. Z. B.: *Hohe*hüsli, *Küher*hüsli, *Hub*schür, Hüsli*gut*, *Haus*mättli, *Hühner*hüsli, Leuis*stuhl*, *Trüb*seeli, Schwin*gruben*, *Küh*täli, *Küh*stelli, *Mühle*hölzli, Wiße*fluh*, *Blüm*lisalp usw.