Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 43 (1945)

Heft: 6

Artikel: Calcul symbolique des coefficients de poids

Autor: Bachmann, W.K.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-202945

Partons des deux vues conjuguées, orientées correctement dans l'autographe. En attribuant de petits accroissements aux éléments d'orientation des chambres, nous obtenons les différentielles dk_A, dk_B, dl_A; dl_B. Est-il maintenant possible de trouver un déplacement (δX, δY, δZ) du chariot de base tel que l'on ait à la fois $\Delta X_A = \Delta X_B = \Delta Y_A = \Delta Y_B = 0$? Il résulte des équations (4.26) et (4.27) qu'il n'en est généralement pas ainsi. En effet, dans (4.26), nous avons $X_A \neq X_B$ et nous pouvons par conséquent trouver un système de valeurs δX, δZ annulant à la fois ΔX_A et ΔX_B. Dans (4.27), on a par contre $Y_A = Y_B$. Ce dernier système ne peut donc être résolu par rapport à δY et δZ puisque son déterminant est nul. En soustrayant la première de ces équations de la seconde, nous obtenons une grandeur qui est indépendante de la position du chariot de base

(4.28) $$\boxed{\Delta Y_B - \Delta Y_A = dl_B - dl_A.}$$

En prenant $\Delta Y_A = 0$, nous avons

(4.29) $$\Delta Y_B = dl_B - dl_A.$$

Si l'on annule par contre ΔY_B, on trouve

(4.30) $$\Delta Y_A = dl_A - dl_B.$$

Ces deux grandeurs peuvent être observées dans l'autographe; elles portent le nom de «*parallaxes verticales*». Nous posons

(4.31) $$\boxed{\begin{aligned} pv_B &= dl_B - dl_A \\ pv_A &= dl_A - dl_B \end{aligned}}\,.$$

Remarquons que l'indice de *pv* indique la chambre dans laquelle la parallaxe verticale est observée. **(A suivre.)**

Calcul symbolique des coefficients de poids

par *Dr W. K. Bachmann*

Le calcul symbolique des coefficients de poids fut découvert en 1934 par J. M. Tienstra [1] et a déjà été appliqué dans un certain nombre de publications de W. Schermerhorn et R. Roelofs, voir [2], [3], [4]. Le nombre de nos lecteurs disposant de ces publications étant certainement très restreint, M. le Professeur C. F. Baeschlin nous a suggéré de développer ici la théorie de J. M. Tienstra afin de faciliter la lecture de nos publications photogrammétriques.

Ces calculs, quoique ne conduisant somme toute à aucun résultat nouveau en ce qui concerne la théorie des erreurs proprement dite, sont d'une grande importance. Il existe en effet un certain nombre de problèmes d'erreurs ne pouvant être résolus que très difficilement sans cette méthode.

Nous ne considérerons ici que le cas de deux inconnues, mais il va de soi que la dite méthode est également applicable aux problèmes d'erreurs à un nombre quelconque d'inconnues.

Soient x et y deux *variables contradictoires dépendantes*, telles qu'elles résultent par exemple d'une compensation d'observations. Nous désignons leurs coefficients de poids par Q_{xx}, Q_{xy}, Q_{yy} et l'erreur moyenne à craindre sur l'unité de poids par $\pm \mu$. Les erreurs moyennes μ_x et μ_y à craindre sur x et y sont alors données par les formules

(1) $\mu_x{}^2 = Q_{xx}\, \mu^2$ (2) $\mu_y{}^2 = Q_{yy}\, \mu^2$

Soient

$$\boxed{\begin{aligned} F &= \alpha_1\, x + \beta_1\, y \qquad (3) \\ G &= \alpha_2\, x + \beta_2\, y \qquad (4) \end{aligned}}$$

deux fonctions linéaires des variables x et y. Si l'on détermine la valeur des fonctions F et G à l'aide des équations (3) et (4), leurs erreurs moyennes sont données par les formules bien connues (voir par exemple [5], page 182).

$$\mu_F{}^2 = (\alpha_1{}^2\, Q_{xx} + 2\, \alpha_1\, \beta_1\, Q_{xy} + \beta_1{}^2\, Q_{yy})\, \mu^2 \tag{5}$$

$$\mu_G{}^2 = (\alpha_2{}^2\, Q_{xx} + 2\, \alpha_2\, \beta_2\, Q_{xy} + \beta_2{}^2\, Q_{yy})\, \mu^2. \tag{6}$$

Considérons maintenant la fonction linéaire

$$H = a\, F + b\, G \tag{7}$$

et calculons son erreur moyenne $\pm \mu_H$. En tenant compte de (3) et (4), nous trouvons

$$H = a\, (\alpha_1 x + \beta_1 y) + b\, (\alpha_2 x + \beta_2\, y)$$

$$H = (a\, \alpha_1 + b\, \alpha_2)\, x + (a\, \beta_1 + b\, \beta_2)\, y \tag{8}$$

et nous obtenons ainsi

$$\mu^2{}_H = \left\{ \begin{aligned} &(a\, \alpha_1 + b\, \alpha_2)^2\, Q_{xx} + 2\, (a\, \alpha_1 + b\, \alpha_2)\, (a\, \beta_1 + b\, \beta_2)\, Q_{xy} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + (a\, \beta_1 + b\, \beta_2)^2\, Q_{yy} \end{aligned} \right\} \cdot \mu^2$$

ou bien en développant

$$\mu^2{}_H = \left\{ \begin{array}{ll} + & \left\{ a^2\, \alpha_1{}^2 \quad + 2\, ab\, \alpha_1\, \alpha_2 \quad + b^2\, \alpha_2{}^2 \right\} Q_{xx} \\ + 2 & \left\{ a^2\, \alpha_1\, \beta_1 + ab\, (\alpha_1\, \beta_2 + \alpha_2\, \beta_1) + b^2\, \alpha_2\, \beta_2 \right\} Q_{xy} \\ + & \left\{ a^2\, \beta_1{}^2 \quad + 2\, ab\, \beta_1\, \beta_2 \quad + b^2\, \beta_2{}^2 \right\} Q_{yy} \end{array} \right\} \cdot \mu^2$$

et en changeant l'ordre des termes

$$(9) \qquad \mu^2{}_H = \begin{aligned} &+ a^2 \left\{ \alpha_1^2\, Q_{xx} + 2\,\alpha_1\,\beta_1\, Q_{xy} + \beta_1^2\, Q_{yy} \right\} \mu^2 \\ &+ 2\,ab \left\{ \alpha_1\,\alpha_2\, Q_{xx} + (\alpha_1\,\beta_2 + \alpha_2\,\beta_1)\, Q_{xy} + \beta_1\,\beta_2\, Q_{yy} \right\} \mu^2 \\ &+ b^2 \left\{ \alpha_2^2\, Q_{xx} + 2\,\alpha_2\,\beta_2\, Q_{xy} + \beta_2^2\, Q_{yy} \right\} \mu^2. \end{aligned}$$

Nous constatons que nous pouvons obtenir une équation de la *même forme* que (5) ou (6) en introduisant les substitutions suivantes:

$$(10) \qquad \boxed{\begin{aligned} Q_{FF} &= \alpha_1^2\, Q_{xx} + 2\,\alpha_1\,\beta_1\, Q_{xy} + \beta_1^2\, Q_{yy} \\ Q_{FG} &= \alpha_1\,\alpha_2\, Q_{xy} + (\alpha_1\,\beta_2 + \alpha_2\,\beta_1)\, Q_{xy} + \beta_1\,\beta_2\, Q_{yy} \\ Q_{GG} &= \alpha_2^2\, Q_{xx} + 2\,\alpha_2\,\beta_2\, Q_{xy} + \beta_2^2\, Q_{yy} \end{aligned}}\,.$$

En tenant compte de (10), l'équation (9) devient en effet

$$(11) \qquad \boxed{\mu^2{}_H = (a^2\, Q_{FF} + 2\,ab\, Q_{FG} + b^2\, Q_{GG})\, \mu^2}\,.$$

Nous appelons par conséquent Q_{FF}, Q_{GG}, Q_{FG} *les coefficients de poids des fonctions F et G.* La connaissance de ces coefficients nous permet de calculer l'erreur moyenne à craindre sur une fonction (linéaire) *quelconque* de F et de G.

Dans bien des cas, et notamment lorsqu'il s'agit de problèmes d'erreurs nouveaux auxquels donne lieu la photogrammétrie, l'application des formules (10) est malaisée. Il est alors indiqué d'avoir recours *au calcul symbolique des coefficients de poids.* Ce procédé de calcul est facile à établir. En effet, soient

$$Q_u \text{ et } Q_v$$

des *symboles. Définissons* la multiplication de ces symboles par les équations

$$(12) \qquad \boxed{\begin{aligned} &Q_u \cdot Q_u = Q_{uu} \qquad\qquad Q_v \cdot Q_v = Q_{vv} \\ &Q_u \cdot Q_v = Q_v \cdot Q_u = Q_{uv} = Q_{vu} \end{aligned}}\,.$$

Cela étant, remplaçons dans les équations (3) et (4) les variables F, G, x, y par les symboles Q_F, Q_G, Q_x, Q_y, ce qui nous donne les équations symboliques

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} Q_F &= \alpha_1\, Q_x + \beta_1\, Q_y \\ Q_G &= \alpha_2\, Q_x + \beta_2\, Q_y. \end{aligned} \right.$$

En élevant ces équations au carré, ou en les multipliant membre à membre, nous trouvons, en tenant compte des règles de multiplication (12),

$$\begin{aligned} Q_{FF} &= \alpha_1^2 \, Q_{xx} + 2\,\alpha_1 \beta_1 \, Q_{xy} + \beta_1^2 \, Q_{yy} \\ Q_{FG} &= \alpha_1 \alpha_2 \, Q_{xx} + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \, Q_{xy} + \beta_1 \beta_2 \, Q_{yy} \\ Q_{GG} &= \alpha_2^2 \, Q_{xx} + 2\,\alpha_2 \beta_2 \, Q_{xy} + \beta_2^2 \, Q_{yy} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que nous retombons sur les formules (10) précédemment obtenues. Nous constatons ainsi que les règles de calcul introduites permettent de passer avec une grande rapidité des équations (3) et (4) aux coefficients de poids des fonctions F et G puisqu'il suffit de rapprocher les deux systèmes

$$\boxed{\begin{array}{ll} F = \alpha_1 x + \beta_1 y & Q_F = \alpha_1 Q_x + \beta_1 Q_y \\ G = \alpha_2 x + \beta_2 y & Q_G = \alpha_2 Q_x + \beta_2 Q_y \end{array}} \tag{14}$$

et d'effectuer ensuite la multiplication des symboles.

Nous avons vu que ce calcul symbolique est valable pour une fonction linéaire *quelconque* de F et G. En appliquant une substitution linéaire aux deux équations

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \alpha_1 x + \beta_1 y \\ G = \alpha_2 x + \beta_2 y \end{array} \right.$$

nous devons effectuer *la même substitution* dans le système

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_F = \alpha_1 Q_x + \beta_1 Q_y \\ Q_G = \alpha_2 Q_x + \beta_2 Q_y . \end{array} \right.$$

Il en résulte que les règles de calcul, que nous pouvons appliquer aux équations symboliques, sont identiques aux règles habituelles de l'algèbre, où nous devons cependant exclure les produits de plus de deux symboles, ainsi que la division par un symbole.

Pour bien montrer le mécanisme de ces calculs, nous allons les appliquer à quelques problèmes simples.

Problème 1:

Soient *deux observations médiates*, données par les équations

$$\left. \begin{array}{ll} p_1 = 1 & \varepsilon_1 = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta \\ p_2 = 1 & \varepsilon_2 = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta \end{array} \right] M. \tag{15}$$

Puisqu'il s'agit de deux observations indépendantes ayant pour poids l'unité, nous avons

$$Q_{\varepsilon_1\varepsilon_1} = Q_{\varepsilon_2\varepsilon_2} = 1 \qquad Q_{\varepsilon_1\varepsilon_2} = 0. \tag{16}$$

Les équations symboliques sont

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{\varepsilon_1} = \alpha_1 Q_\xi + \beta_1 Q_\eta \\ Q_{\varepsilon_2} = \alpha_2 Q_\xi + \beta_2 Q_\eta . \end{array} \right. \tag{17}$$

Pour *calculer* les valeurs des inconnues ξ et η en fonction des observations ε_1, ε_2, nous devons résoudre les équations (15), ce qui nous donne des relations de la forme

$$\text{(18)} \qquad \begin{cases} \xi = a_1\,\varepsilon_1 + b_1\,\varepsilon_2 \\ \eta = a_2\,\varepsilon_1 + b_2\,\varepsilon_2 . \end{cases}$$

Cela étant, nous pouvons calculer les coefficients de poids $Q_{\xi\xi}$, $Q_{\xi\eta}$, $Q_{\eta\eta}$ des inconnues ξ, η en appliquant la méthode symbolique au système (18). Etant donné que les systémes (15) et (17) ont exactement *la même forme*, nous pouvons nous dispenser de résoudre le système (15) et appliquer les opérations algébriques directement au système (17), ce qui nous conduit bien entendu au même résultat. Nous avons, si Δ désigne le déterminant du système,

$$\text{(19)} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = (\alpha_1\,\beta_2 - \alpha_2\,\beta_1)$$

$$\text{(20)} \qquad Q_\xi = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} Q_{\varepsilon_1} & \beta_1 \\ Q_{\varepsilon_2} & \beta_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} (\beta_2\, Q_{\varepsilon_1} - \beta_1\, Q_{\varepsilon_2})$$

$$\text{(21)} \qquad Q_\eta = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \alpha_1 & Q_{\varepsilon_1} \\ \alpha_2 & Q_{\varepsilon_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} (\alpha_1\, Q_{\varepsilon_2} - \alpha_2\, Q_{\varepsilon_1})$$

d'où nous tirons, en appliquant la multiplication symbolique,

$$Q_\xi \cdot Q_\xi = Q_{\xi\xi} = \frac{1}{\Delta^2} (\beta_2\, Q_{\varepsilon_1} - \beta_1\, Q_{\varepsilon_2})^2$$

$$= \frac{1}{\Delta^2} (\beta_2{}^2\, Q_{\varepsilon_1\varepsilon_1} - 2\,\beta_1\,\beta_2\, Q_{\varepsilon_1\varepsilon_2} + \beta_1{}^2\, Q_{\varepsilon_2\varepsilon_2}).$$

En tenant compte des équations (16), nous obtenons

$$\underline{Q_{\xi\xi} = \frac{1}{\Delta^2} (\beta_1{}^2 + \beta_2{}^2) = \frac{[\beta\beta]}{\Delta^2}.}$$

Nous avons ensuite

$$Q_{\eta\eta} = Q_\eta \cdot Q_\eta = \frac{1}{\Delta^2} (\alpha_1\, Q_{\varepsilon_2} - \alpha_2\, Q_{\varepsilon_1})^2$$

$$= \frac{1}{\Delta^2} (\alpha_1{}^2\, Q_{\varepsilon_2\varepsilon_2} - 2\,\alpha_1\,\alpha_2\, Q_{\varepsilon_1\varepsilon_2} + \alpha_2{}^2\, Q_{\varepsilon_1\varepsilon_1})$$

$$\underline{Q_{\eta\eta} = \frac{1}{\Delta^2} (\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2) = \frac{[\alpha\alpha]}{\Delta^2}}$$

$$Q_{\xi\eta} = Q_\xi \cdot Q_\eta = \frac{1}{\Delta^2}(\beta_2 Q_{\varepsilon_1} - \beta_1 Q_{\varepsilon_2})(\alpha_1 Q_{\varepsilon_2} - \alpha_2 Q_{\varepsilon_1})$$

$$= \frac{1}{\Delta^2}\left\{-\alpha_2 \beta_2 Q_{\varepsilon_1\varepsilon_1} - \alpha_1 \beta_1 Q_{\varepsilon_2\varepsilon_2} + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) Q_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\right\}$$

$$\underline{Q_{\xi\eta} = -\frac{1}{\Delta^2}(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) = -\frac{[\alpha\beta]}{\Delta^2}}.$$

Le résultat cherché est donc

$$(22) \qquad \boxed{\begin{array}{ll} & \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \\ \left.\begin{array}{ll} p_1 = 1 & \varepsilon_1 = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta \\ p_2 = 1 & \varepsilon_2 = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta \end{array}\right] M & Q_{\xi\xi} = \dfrac{[\beta\beta]}{\Delta^2} \\ & Q_{\xi\eta} = -\dfrac{[\alpha\beta]}{\Delta^2} \\ & Q_{\eta\eta} = \dfrac{[\alpha\alpha]}{\Delta^2} \end{array}}.$$

En calculant par contre ces coefficients par la méthode classique, nous avons les équations aux poids

$$(23) \qquad \left\{\begin{array}{ll} [\alpha\alpha]\, Q_{\xi\xi} + [\alpha\beta]\, Q_{\xi\eta} = 1 & [\alpha\alpha]\, Q_{\xi\eta} + [\alpha\beta]\, Q_{\eta\eta} = 0 \\ [\alpha\beta]\, Q_{\xi\xi} + [\beta\beta]\, Q_{\xi\eta} = 0 & [\alpha\beta]\, Q_{\xi\eta} + [\beta\beta]\, Q_{\eta\eta} = 1 \end{array}\right.$$

et leur résolution nous donne

$$(24) \qquad \left\{\begin{array}{l} \{[\alpha\alpha]\,[\beta\beta] - [\alpha\beta]\,[\alpha\beta]\}\, Q_{\xi\xi} = [\beta\beta] \\ \{[\alpha\alpha]\,[\beta\beta] - [\alpha\beta]\,[\alpha\beta]\}\, Q_{\xi\eta} = -[\alpha\beta] \\ \{[\alpha\alpha]\,[\beta\beta] - [\alpha\beta]\,[\alpha\beta]\}\, Q_{\eta\eta} = [\alpha\alpha] \end{array}\right.$$

mais nous avons

$$\begin{aligned} [\alpha\alpha]\,[\beta\beta] - [\alpha\beta]\,[\alpha\beta] &= (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2) - (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2)^2 \\ &= \alpha_1^2 \beta_2^2 + \alpha_2^2 \beta_1^2 - 2\, \alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2 \\ &= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2 = \Delta^2 \end{aligned}$$

et nous retrouvons ainsi les formules (22).

Problème 2:

Considérons maintenant le système d'observations suivant:

$$(25) \qquad \left.\begin{array}{ll} p_1 = 1 & \varepsilon_1 = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta \\ p_2 = 1 & \varepsilon_2 = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta \end{array}\right]_{\xi}^{\eta} .$$

En ce qui concerne les notations utilisées, voir [6] ou [7]. Il s'agit là d'un problème d'observation de «variables secondaires». Les équations symboliques sont de nouveau

$$(26) \qquad \begin{cases} Q_{\varepsilon_1} = \alpha_1 Q_\xi + \beta_1 Q_\eta \\ Q_{\varepsilon_2} = \alpha_2 Q_\xi + \beta_2 Q_\eta . \end{cases}$$

L'opération .....] ξ consiste en l'élimination de η entre les deux équations (25). Pour obtenir Q_ξ nous devons procéder à cette *même* opération algébrique dans les équations (26), c'est-à-dire que nous devons éliminer Q_η ce qui nous donne

$$(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) Q_\xi = \beta_2 Q_{\varepsilon_1} - \beta_1 Q_{\varepsilon_2}$$

ou bien

$$(27) \qquad \Delta Q_\xi = \beta_2 Q_{\varepsilon_1} - \beta_1 Q_{\varepsilon_2} .$$

En procédant à l'opération ..... $]^{\eta}$, on observe de nouveau la variable ε_1, *mais cette nouvelle observation est indépendante des observations précédentes.* Si $Q_{\varepsilon_1'}$ est le symbole de cette *nouvelle* observation, nous avons

$$Q_{\varepsilon_1'\varepsilon_1'} = 1 \qquad Q_{\varepsilon_1\varepsilon_1'} = 0 \qquad Q_{\varepsilon_2\varepsilon_1'} = 0$$

et nous obtenons l'équation

$$(28) \qquad Q_{\varepsilon_1'} = \alpha_1 Q_\xi + \beta_1 Q_\eta .$$

Ainsi, les équations symboliques du groupe d'observations (25) deviennent

$$\begin{array}{lrl} (27) & \Delta Q_\xi & = \beta_2 Q_{\varepsilon_1} - \beta_1 Q_{\varepsilon_2} \\ (28) & \alpha_1 Q_\xi + \beta_1 Q_\eta & = Q_{\varepsilon_1'} . \end{array}$$

A l'aide de ce système, nous pouvons maintenant calculer les coefficients de poids $Q_{\xi\xi}$, $Q_{\xi\eta}$, $Q_{\eta\eta}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \Delta^2 Q_{\xi\xi} &= (\beta_2 Q_{\varepsilon_1} - \beta_1 Q_{\varepsilon_2})^2 \\ &= \beta_2^2 Q_{\varepsilon_1\varepsilon_1} - 2 \beta_1 \beta_2 Q_{\varepsilon_1\varepsilon_2} + \beta_1^2 Q_{\varepsilon_2\varepsilon_2} \\ &= \beta_2^2 + \beta_1^2 = [\beta\beta] \end{aligned}$$

$$\underline{Q_{\xi\xi} = \frac{1}{\Delta^2} [\beta\beta].}$$

Cette valeur est la même que pour le problème (1). Ce résultat était du reste facile à prévoir puisque ξ a été obtenue moyennant élimination de η. L'équation (28) nous donne

$$\beta_1 Q_{\eta} = Q_{\varepsilon_1'} - \alpha_1 Q_{\xi} \tag{29}$$

$$\beta_1^2 Q_{\eta\eta} = Q_{\varepsilon_1'\varepsilon_1'} - 2\,\alpha_1 Q_{\varepsilon_1'\xi} + \alpha_1^2 Q_{\xi\xi}. \tag{30}$$

On voit facilement que $Q_{\varepsilon_1'\xi}$ est nul. Nous avons, en effet, en multipliant (27) par $Q_{\varepsilon_1'}$

$$\Delta Q_{\xi} \cdot Q_{\varepsilon_1'} = \Delta Q_{\varepsilon_1'\xi} = Q_{\varepsilon_1'}(\beta_2 Q_{\varepsilon_1} - \beta_1 Q_{\varepsilon_2}) = 0.$$

La formule (30) devient ainsi

$$\beta_1^2 Q_{\eta\eta} = Q_{\varepsilon_1'\varepsilon_1'} + \alpha_1^2 Q_{\xi\xi} = 1 + \alpha_1^2 Q_{\xi\xi}$$

$$\underline{Q_{\eta\eta} = \frac{1}{\beta_1^2}\left\{1 + \alpha_1^2 Q_{\xi\xi}\right\}.}$$

En multipliant (27) par (28), nous trouvons

$$\alpha_1 \Delta Q_{\xi\xi} + \beta_1 \Delta\, Q_{\xi\eta} = Q_{\varepsilon_1'}(\beta_2 Q_{\varepsilon_1} - \beta_1 Q_{\varepsilon_2}) = 0$$

$$\alpha_1 Q_{\xi\xi} = - \beta_1 Q_{\xi\eta}$$

$$\underline{Q_{\xi\eta} = - \frac{\alpha_1}{\beta_1} Q_{\xi\xi}.}$$

Le résultat de ces calculs est donc

$$\boxed{\begin{array}{lll} \left.\begin{array}{ll} p_1 = 1 & \varepsilon_1 = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta \\ p_2 = 1 & \varepsilon_2 = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta \end{array}\right]\begin{array}{l}\eta\\ \xi\end{array} & & Q_{\xi\xi} = \dfrac{[\beta\beta]}{\Delta^2} \\ & & Q_{\xi\eta} = - \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} Q_{\xi\xi} \\ \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 & & Q_{\eta\eta} = \dfrac{1}{\beta_1^2}\left\{1 + \alpha_1^2 Q_{\xi\xi}\right\} \end{array}} \tag{31}$$

Problème 3:

Le groupe d'observations

$$\left.\begin{array}{ll} p_1 = 1 & \varepsilon_1 = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta \\ p_2 = 1 & \varepsilon_2 = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta \end{array}\right]\ \xi, \eta \tag{32}$$

qui a également été considéré dans [6] et [7], se traite maintenant sans aucune difficulté. Puisque nous déterminons ξ en éliminant η, nous avons d'après (22)

$$Q_{\xi\xi} = \frac{[\beta\beta]}{\Delta^2}$$

et pour des raisons de symétrie

$$Q_{\eta\eta} = \frac{[\alpha\alpha]}{\Delta^2}.$$

En outre, le coefficient de corrélation $Q_{\xi\eta}$ est nul du moment que les deux inconnues sont déterminées indépendamment l'une de l'autre. Ces résultats se confirment du reste facilement par le calcul direct.

Le lecteur trouvera dans [7] un exemple numérique traitant les trois groupes d'observations que nous venons de considérer. Des applications plus compliquées sont traitées dans [8].

Les quelques problèmes simples que nous venons de considérer nous ont permis de montrer que la méthode symbolique est excessivement puissante et qu'elle peut, dans certains cas, faciliter considérablement le calcul des coefficients de poids.

Littérature à consulter:

[1] *J. M. Tienstra:* «Het rekenen met gewichtsgetallen», Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde, avril 1934.

[2] *W. Schermerhorn:* «Einleitung zur Fehlertheorie der räumlichen Aerotriangulation», Photogrammetria 1940, N° 4; 1941, N° 1.

[3] *R. Roelofs:* «The Accuracy of the Radial Line Méthod», Photogrammetria 1940, N° 2.

[4] *R. Roelofs:* «Fehlertheorie der Aerotriangulation», Photogrammetria 1941, N° 3, N° 4.

[5] *F. R. Helmert:* «Ausgleichungsrechnung nach der Methode der Kleinsten Quadrate», 3. Auflage, 1924.

[6] *W. K. Bachmann:* «Théorie des erreurs de l'orientation relative», Thèse Ecole d'Ingénieurs Lausanne, 1943.

[7] *W. K. Bachmann:* «Théorie des erreurs de l'observation des variables secondaires», Revue Technique Suisse de Mensurations et Améliorations Foncières 1945, N° 2 et 3.

[8] *W. K. Bachmann:* «Méthode de la connexion des images et théorie des erreurs de l'orientation relative», Revue Technique Suisse des Mensurations et Améliorations Foncières 1945, N° 5, 6 et suivants.