

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik =
Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Herausgeber: Schweizerischer Geometerverein = Association suisse des géomètres

Band: 43 (1945)

Heft: 8

Artikel: Les calculs de compensation et le contrôle des poids

Autor: Ansermet, A.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-202950>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 16.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Les calculs de compensation et le contrôle des poids

Par A. Ansermet.

Les calculs de compensation nécessitent de nombreux contrôles portant notamment sur l'expression $[pvv]$ qui doit être rendue minimum. Les v sont les résidus

$$l_i + v_i = f_i(xyz \dots) \quad i = 1, 2 \dots n$$

et les p les poids respectifs des quantités mesurées l_i . Il y a n observations, u inconnues ($xyz \dots$) et $n - u = r$ observations en excédent. Dans certains problèmes il est opportun d'éliminer les inconnues; les résidus v seuls subsistent dans un système de r équations.

Après compensation les expressions $(l_i + v_i)$ sont affectées de poids P_i ($i = 1, 2 \dots n$) dont le calcul est souvent demandé. Un contrôle est donc utile; or une relation très simple existe entre les valeurs p_i et P_i :

la somme des quotients $p_i : P_i$ est égale au nombre des inconnues

$$\left[p_i : P_i \right]_1^n = u = n - r$$

Cette valeur est un extrémum valable lorsqu'on applique le principe $[pvv] = \min$. La démonstration est aisée; considérons le système

$$l_i + v_i = a_i x + b_i y + c_i z \quad (u = 3)$$

$$P_i = \text{poids de } (a_i x + b_i y + c_i z)$$

et appliquons les formules aux coefficients de poids

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_i} = & a_i^2 \left[\frac{aa}{p} \right] + b_i^2 \left[\frac{\beta\beta}{p} \right] + c_i^2 \left[\frac{\gamma\gamma}{p} \right] + 2 a_i b_i \left[\frac{a\beta}{p} \right] + \\ & + 2 a_i c_i \left[\frac{a\gamma}{p} \right] + 2 b_i c_i \left[\frac{\beta\gamma}{p} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[p_i : P_i \right]_1^n = & [paa] \left[\frac{aa}{p} \right] + [pab] \left[\frac{a\beta}{p} \right] + [pac] \left[\frac{a\gamma}{p} \right] \\ & + [pab] \left[\frac{a\beta}{p} \right] + [pbb] \left[\frac{\beta\beta}{p} \right] + [pbc] \left[\frac{\beta\gamma}{p} \right] \\ & + [pac] \left[\frac{a\gamma}{p} \right] + [pbc] \left[\frac{\beta\gamma}{p} \right] + [pcc] \left[\frac{\gamma\gamma}{p} \right] = 1 + 1 + 1 = u = 3 \end{aligned}$$

on peut aussi appliquer la forme sans coefficients de poids

$$\frac{1}{P_i} = \frac{F_1^2}{[paa]} + \frac{[F_2 \cdot 1]^2}{[pbb \cdot 1]} + \frac{[F_3 \cdot 2]^2}{[pcc \cdot 2]} \dots$$

où $F_1 = a_i$ $[F_2 \cdot 1] = b_i - \frac{[pab]}{[paa]} a_i$ etc. ...

S'il s'agit d'observations conditionnelles le calcul est analogue. Considérons le système

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 v_2 \dots + a_n v_n + w_1 &= 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 \dots + b_n v_n + w_2 &= 0 \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 \dots + c_n v_n + w_3 &= 0 \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

où $w_1 w_2 w_3 \dots$ sont les discordances fonctions de $l_1 l_2 \dots l_n$. Le poids P_i de $(l_i + v_i)$ est donné par

$$\frac{1}{P_i} = \frac{1}{p_i} - \frac{\left(\frac{a_i}{p_i}\right)^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{\left[\frac{b_i}{p_i} \cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p} \cdot 1\right]} - \frac{\left[\frac{c_i}{p_i} \cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p} \cdot 2\right]} \dots$$

où

$$\left[\frac{b_i}{p_i} \cdot 1\right] = \frac{b_i}{p_i} - \frac{\left[\frac{ab}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]} \frac{a_i}{p_i} \quad \left[\frac{c_i}{p_i} \cdot 2\right] = \left[\frac{c_i}{p_i} \cdot 1\right] - \frac{\left[\frac{bc}{p} \cdot 1\right]}{\left[\frac{bb}{p} \cdot 1\right]} \left[\frac{b_i}{p_i} \cdot 1\right]$$

$$\frac{p_i}{P_i} = 1 - p_i \frac{\left(\frac{a_i}{p_i}\right)^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - p_i \frac{\left[\frac{b_i}{p_i} \cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p} \cdot 1\right]} - p_i \frac{\left[\frac{c_i}{p_i} \cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p} \cdot 2\right]} \dots$$

et on vérifie sans peine que $\left[\frac{p_i}{P_i}\right]_1^n = n - 1 - 1 - 1 \dots = n - r = u$

on peut aussi avoir recours aux coefficients $Q_{11} Q_{12} Q_{13} Q_{22} \dots$ qui sont à la base de la résolution indéterminée des équations normales (calcul des $K_1 K_2 K_3 \dots$ en fonction de $w_1 w_2 w_3 \dots$)

$$\frac{1}{P_i} = \frac{1}{p_i} - \frac{a_i}{p_i} L_1 - \frac{b_i}{p_i} L_2 - \frac{c_i}{p_i} L_3 \dots \quad ([2] \text{ p. 62-66})$$

ou

$$L_1 = \frac{a_i}{p_i} Q_{11} + \frac{b_i}{p_i} Q_{12} + \frac{c_i}{p_i} Q_{13} \dots$$

$$L_2 = \frac{a_i}{p_i} Q_{21} + \frac{b_i}{p_i} Q_{22} + \frac{c_i}{p_i} Q_{23} \dots$$

$$L_3 = \frac{a_i}{p_i} Q_{31} + \frac{b_i}{p_i} Q_{32} + \frac{c_i}{p_i} Q_{33} \dots \text{ d'où l'on déduit}$$

$$\begin{aligned} &\left[\frac{p_i}{P_i}\right]_1^n = \\ &= n - \left(\left[\frac{aa}{p}\right] Q_{11} + \left[\frac{bb}{p}\right] Q_{22} + \left[\frac{cc}{p}\right] Q_{33} + 2 \left[\frac{ab}{p}\right] Q_{12} + 2 \left[\frac{ac}{p}\right] Q_{13} + 2 \left[\frac{bc}{p}\right] Q_{23} \right) \end{aligned}$$

pour $r = 3$

$$\left[p_i : P_i\right]_1^n = n - r = u$$

Applications.

1^o Méthode des combinaisons binaires (ou de Schreiber)

$$n = \frac{s(s-1)}{2} \quad u = s-1 \quad r = \frac{(s-1)(s-2)}{2}$$

(s visées mesurées)

$$p_i = 1 \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

Il faut distinguer, après compensation, les poids P_i au nombre de $(s-1)$ et P'_i au nombre de $\frac{(s-1)(s-2)}{2}$

$$\left[\frac{1}{P_i} \right]_1^n = (s-1) \left(\frac{1}{P_i} \right) + \frac{(s-1)(s-2)}{2} \left(\frac{1}{P'_i} \right) = u = s-1$$

$$\text{relation vérifiée pour } \frac{1}{P_i} = \frac{1}{P'_i} = \frac{2}{s}$$

2^o Nivellement. Considérons le réseau compensé par M. Ad. Hunziker dans cette Revue (novembre 1944) comprenant 4 repères et 16 lignes ($u = 4, n = 16$):

$$\begin{aligned} \left[\frac{\alpha\alpha}{p} \right] &= 0.336; \quad \left[\frac{\beta\beta}{p} \right] = 0.347; \quad \left[\frac{\gamma\gamma}{p} \right] = 0.273; \quad \left[\frac{\delta\delta}{p} \right] = 0.257; \\ \left[\frac{\alpha\beta}{p} \right] &= + 0.075; \quad \left[\frac{\alpha\gamma}{p} \right] = + 0.016; \quad \left[\frac{\alpha\delta}{p} \right] = + 0.017; \quad \left[\frac{\beta\gamma}{p} \right] = + 0.072; \\ \left[\frac{\beta\delta}{p} \right] &= + 0.078; \quad \left[\frac{\gamma\delta}{p} \right] = + 0.096. \end{aligned}$$

	$1 : P_i =$	p_i	$p_i : P_i =$
1	0.336	1.25	0.42
2	0.336	0.67	0.23
3	$0.336 + 0.347 - 2 \times 0.075 = 0.530$	0.67	0.35
4	0.336	0.53	0.18
5	0.347	0.62	0.22
6	0.347	0.36	0.13
7	$0.347 + 0.273 - 2 \times 0.072 = 0.476$	0.59	0.28
8	$0.347 + 0.257 - 2 \times 0.078 = 0.450$	0.72	0.32
9	0.347	0.33	0.12
10	0.273	0.67	0.18
11	0.273	0.62	0.17
12	0.273	1.00	0.27
13	$0.273 + 0.257 - 2 \times 0.096 = 0.338$	1.43	0.48
14	0.257	1.25	0.32
15	0.257	0.77	0.20
16	0.257	0.46	0.12

$$\left[p_i : P_i \right]_1^n = 3.99$$

(exactement 4.00)

La valeur moyenne du rapport $p_i : P_i = \frac{4}{16} = 0.25$. Ce quotient, dans les cas particulier, varie entre des limites relativement étendues et l'examen de ces résultats est intéressant (limites 0.12 et 0.48)

3^o *Compensation d'une station*. Considérons l'exemple traité par R. Helmert ([1], p. 159).

$v_1 = l_1$	$+ z$	poids = 9	
$v_2 = l_2$	$+ t$	» 8	$n = 8$
$v_3 = l_3$	$- z + t$	» 7	$u = 4$
$v_4 = l_4$	$- y + t$	» 2	$r = 4 = n - u$
$v_5 = l_5$	$+ y$	» 2	
$v_6 = l_6$	$- x + z$	» 4	
$v_7 = l_7$	$+ x$	» 6	
$v_8 = l_8$	$- x + y$	» 2	

éliminons les 4 inconnues

$$\begin{aligned}
 + v_1 - v_2 + v_3 &+ w_1 = 0 \\
 - v_2 + v_4 + v_5 &+ w_2 = 0 \\
 - v_1 + v_6 + v_7 &+ w_3 = 0 \\
 - v_5 + v_7 + v_8 &+ w_4 = 0
 \end{aligned}$$

$$\left[\frac{aa}{p} \right] = 0.379, \quad \left[\frac{bb}{p} \right] = 1.125, \quad \left[\frac{cc}{p} \right] = 0.528, \quad \left[\frac{dd}{p} \right] = 1.167,$$

$$\left[\frac{ab}{p} \right] = + 0.125, \quad \left[\frac{ac}{p} \right] = - 0.111, \quad \left[\frac{ad}{p} \right] = \left[\frac{bc}{p} \right] = 0, \quad \left[\frac{bd}{p} \right] = - 0.500,$$

$$\left[\frac{cd}{p} \right] = + 0.167, \quad \left[\frac{bb}{p} \cdot 1 \right] = 1.084, \quad \left[\frac{bc}{p} \cdot 1 \right] = + 0.037,$$

$$\left[\frac{bd}{p} \cdot 1 \right] = - 0.500, \quad \left[\frac{cc}{p} \cdot 2 \right] = 0.495, \quad \left[\frac{cd}{p} \cdot 2 \right] = + 0.184,$$

$$\left[\frac{dd}{p} \cdot 2 \right] = 0.936, \quad \left[\frac{dd}{p} \cdot 3 \right] = 0.868$$

$$p_i : P_i = 1 - p_i \frac{\left(\frac{a_i}{p_i} \right)^2}{\left[\frac{aa}{p} \right]} - p_i \frac{\left[\frac{b_i}{p_i} \cdot 1 \right]^2}{\left[\frac{bb}{p} \cdot 1 \right]} - p_i \frac{\left[\frac{c_i}{p_i} \cdot 2 \right]^2}{\left[\frac{cc}{p} \cdot 2 \right]} - p_i \frac{\left[\frac{d_i}{p_i} \cdot 3 \right]^2}{\left[\frac{dd}{p} \cdot 3 \right]} \dots$$

La valeur moyenne $p_i : P_i = 0.5$; les limites pour ce quotient sont ici 0.593 et 0.379. Ce sont encore les poids faibles qui sont amplifiés dans la proportion la plus forte. Les discordances w_1, w_2, w_3, w_4 ne jouent bien entendu aucun rôle dans ce calcul; leur valeur numérique ainsi que celle des termes absolues $l_1, l_2 \dots l_8$ n'est donc pas donnée.

$i = 1$	$p_i : P_i$	$= 1$	$- 0.293$	$- 0.012$	$- 0.111$	$- 0.001$	$= 0.583$
2	»	$= 1$	$- 0.330$	$- 0.052$	$- 0.018$	$- 0.007$	$= 0.593$
3	»	$= 1$	$- 0.377$	$- 0.014$	$- 0.026$	$- 0.012$	$= 0.571$
4	»	$= 1$	0	$- 0.461$	$- 0.001$	$- 0.130$	$= 0.408$
5	»	$= 1$	0	$- 0.461$	$- 0.001$	$- 0.159$	$= 0.379$
6	»	$= 1$	0	0	$- 0.505$	$- 0.040$	$= 0.455$
7	»	$= 1$	0	0	$- 0.337$	$- 0.076$	$= 0.587$
8	»	$= 1$	0	0	0	$- 0.576$	$= 0.424$
sommés :		8	$- 1.000$	$- 1.000$	$- 0.999$	$- 1.001$	$= 4.000$
							$= u = n - r$

4^o *Méthode des secteurs* (Dr. H. Wild). Le contrôle des poids est ici très utile; désignons par p_s et p_i les poids respectifs des secteurs et des angles intermédiaires et par P_s et P_i les poids correspondants après compensation

$$\left[\frac{p_s}{P_s} \right] + \left[\frac{p_i}{P_i} \right] = u$$

Exemples: 3 secteurs, 6 angles intermédiaires (2 par secteur)

pour $p_s = p_i = 1$ on a

$$3 \times \frac{1}{P_s} + 6 \times \frac{1}{P_i} = 5 = u \quad P_s = 2.25 \quad P_i = \frac{18}{11}$$

4 secteurs, 8 angles intermédiaires (2 par secteur)

$$4 \times \frac{1}{P_s} + 8 \times \frac{1}{P_i} = 7 \quad P_s = 2.00 \quad P_i = \frac{8}{5}$$

Si on a recours à une compensation approchée le calcul est plus complexe car la détermination des poids présente une certaine ambiguïté ([3] p. 124-129).

En résumé le contrôle $[p : P]$ des poids *avant* et *après* compensation peut rendre de réels services. La condition $[p_{vv}] = \min$ entraîne $[p : P] = u$ et réciproquement.

Littérature

- [1] R. Helmert, Ausgleichsrechnung.
- [2] C. F. Baeschlin, Ausgleichsrechnung und Landesvermessung.
- [3] Eggert-Jordan, Vermessungskunde I.
- [4] Koll O., Methode der kl. Quadrate.
- [5] Wellisch S., Theorie und Praxis der Ausgleichsrechnung.