

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Band:** 45 (1947)

**Heft:** 6

**Artikel:** Zur Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung

**Autor:** Kasper, H.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-204715>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

SCHWEIZERISCHE ZEITSCHRIFT FÜR

# VERMESSUNG UND KULTURTECHNIK

Revue technique Suisse des Mensurations et du Génie rural

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik. Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft f. Photogrammetrie

Editeur: Société Suisse de Mensuration et du Génie rural. Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie

REDAKTION: Dr. h. c. C. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständiger Mitarbeiter f. Kulturtechnik: E. RAMSER, Prof. f. Kulturtechnik ETH., Freiestr. 72, Zürich

Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

Expedition, Administration und Inseratenannahme: BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR AG.

Schluß der Inseratenannahme am 6. jeden Monats

---

**NR. 6 • XLV. JAHRGANG**

der „Schweizerischen Geometer-Zeitung“  
Erscheinend am 2. Dienstag jeden Monats

10. JUNI 1947

INSERATE: 25 Rp. per einspalt. mm-Zelle.  
Bei Wiederholungen Rabatt gemäß spez. Tarif

**ABONNEMENTE:**

Schweiz Fr. 15.—, Ausland Fr. 20.— jährlich

Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaft für  
Photogrammetrie Fr. 10.— jährlich

Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz.  
Vereins f. Vermessungswesen u. Kulturtechnik

---

## Zur Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung

Von Prof. Dr. H. Kasper, Strobl/Wolfgangsee

In den Abhandlungen „Théorie des erreurs de l'orientation relative“ [1] und „Méthode de la connexion des images et théorie des erreurs de l'orientation relative“ [2] behandelt Prof. W. K. *Bachmann* erstmalig erfolgreich das Problem der Parallaxenrestfehler bei der optisch-mechanischen Orientierung von Bildpaaren für einen bestimmten Spezialfall des Orientierungsverfahrens von Senkrechtaufnahmen. Er verwendet hierfür in [1] die von ihm entwickelte „Théorie des erreurs de l'observation des variables secondaires“ [3] bzw. in [2] die Gewichtssymbolik nach Tienstra [4]\*.

Wenn es sich darum handelt, verschiedene Verfahren der Orientierung von Bildpaaren zu beurteilen, kann man jedoch noch rascher, müheloser und direkter zu den entscheidenden Vergleichswerten gelangen, ohne mehr als das Fehlerfortpflanzungsgesetz anwenden zu müssen, was hier gezeigt werden soll.

Die zu behandelnde Methode hat überdies den Vorteil, einen vollen Einblick in die wirkliche Fehlerentstehung und -verknüpfung zu eröffnen und die inneren Zusammenhänge des Orientierungsverfahrens offener darzulegen.

Schließlich erhält man auch aus einer recht einfachen Form beding-

---

\* [1], Thèse Ecole d'Ingénieurs Lausanne, 1943;

[2], [3] und [4], Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik, 1945.

ter Beobachtungen mit Unbekannten, ganz schematisch und übersichtlich die Gewichtskoeffizienten der Orientierungsgrößen.

Es sei dies hier für den Fall des Bildanschlusses nach dem von Herrn *Bachmann* verwendeten Orientierungsverfahren [2] (5. 1) und (5. 3) dargestellt.

Wir verfolgen hierbei hinsichtlich der Fehleruntersuchung die aufeinanderfolgenden Orientierungsphasen einzeln und notieren die zufälligen Restfehler für die 6 charakteristischen Modellpunkte in Tabelle 1.

Der erste Schritt ist die Messung der Parallaxe  $pv_4$  mit  $bz_B$ , ihr zufälliger Beobachtungsfehler sei  $v_4$ ; der nächste ist  $pv_6$  mit  $v_6$ . Der einzustellende Mittelwert hat den Fehler  $\frac{v_4 + v_6}{2}$ . Er tritt als  $bz$ -Fehler in den

Punkten 3, 4, 5, 6 in voller Größe auf, in den beiden letzteren mit entgegengesetztem Vorzeichen. 1, 2 bleiben fehlerfrei. Wir vermerken dieses Ergebnis in Tabelle 1, Zeile 1, 2. Die Schritte 3 und 4 liefern mit  $\varphi_B$  gemessen, die Fehler  $v_3$  und  $v_5$ . Im einzustellenden Mittel verschwinden die Fehlereinflüsse der vorangegangenen  $bz$ -Messung für die Punkte 3 und

5, doch äußert sich dort nunmehr  $\frac{v_3 + v_5}{2}$ . Die übrigen Punkte bleiben

unbeeinflusst. Die Schritte 5 und 6 geben mit den neuen Fehlern  $v_4'$  und  $v_6'$  im Mittel den Fehler  $\frac{v_4' + v_6'}{2}$ , deren Einfluß auf  $\omega_B$  nach [2] (5. 1)

gleich ist  $\frac{v_4' + v_6'}{2 h \left(1 + \frac{a^2}{h^2}\right)}$ . Der Schritt 7 hat den Fehler  $v_2$  mit dem  $\omega$ -Einfluß

$\frac{v_2}{h}$ . Es wird also der einzustellende  $\omega$ -Wert

$$(\omega_B)_m - \frac{h^2}{a^2} \left\{ (\omega_B)_2 - (\omega_B)_m \right\} = (\omega_B)_m \left( 1 + \frac{h^2}{a^2} \right) - (\omega_B)_2 \cdot \frac{h^2}{a^2}$$

mit dem Fehler

$$\frac{v_4' + v_6'}{2 h \left( 1 + \frac{a^2}{h^2} \right)} \cdot \left( 1 + \frac{h^2}{a^2} \right) - \frac{v_2 h}{a^2}$$

behaftet sein, dessen Einfluß für die Punkte 3, 4, 5 und 6 durch Multiplikation mit  $h \left( 1 + \frac{h^2}{a^2} \right)$  zu

$$\left( \frac{v_4' + v_6'}{2} - v_2 \right) \left( 1 + \frac{h^2}{a^2} \right)$$

errechnet wird. Für die Punkte 1 und 2 ist mit  $h$  zu multiplizieren. Es entsteht

$$\left( \frac{v_4' + v_6'}{2} - v_2 \right) \cdot \frac{h^2}{a^2}.$$

Tabelle 1

Punkt Nr.	Orien- tierungs- phase	Operator	Restfehler nach Beseitigung der Vertikalparallaxen durch Bildanschluß	Orien- tierungs- phase	Operator	Restfehler nach Beseitigung der Vertikalparallaxen durch Bildanschluß	Punkt Nr.
3	1, 2	$bz_B$	$\frac{v_4 + v_6}{2}$	4	1, 2	$bz_B$	$\frac{v_4 + v_6}{2}$
	3, 4	$\varphi_B$	$\frac{v_3 + v_5}{2}$		3, 4	$\varphi_B$	$\frac{v_4 + v_6}{2}$
	5, 6, 7	$\omega_B$	$\frac{v_3 + v_5}{2} + \left(\frac{v_4' + v_6'}{2} - v_2\right) \left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right)$		5, 6, 7	$\omega_B$	$\frac{v_4 + v_6}{2} + \left(\frac{v_4' + v_6'}{2} - v_2\right) \left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right)$
	8	$by_B$	$\frac{v_3 + v_5}{2} + \frac{v_4' + v_6'}{2} - v_2 + v_2'$		8	$by_B$	$\frac{v_4 + v_6}{2} + \frac{v_4' + v_6'}{2} - v_2 + v_2'$
	9	$K_B$	$\frac{v_3 + v_5}{2} + \frac{v_4' + v_6'}{2} - v_2 + v_1$		9	$K_B$	$\frac{v_4 + v_6}{2} + \frac{v_4' + v_6'}{2} - v_2 + v_2'$
1	1, 2	$bz_B$	.	2	1, 2	$bz_B$	.
	3, 4	$\varphi_B$	.		3, 4	$\varphi_B$	.
	5, 6, 7	$\omega_B$	$\left(\frac{v_4' + v_6'}{2} - v_2\right) \frac{h^2}{a^2}$		5, 6, 7	$\omega_B$	$\left(\frac{v_4' + v_6'}{2} - v_2\right) \frac{h^2}{a^2}$
	8	$by_B$	$v_2'$		8	$by_B$	$v_2'$
	9	$K_B$	$v_1$		9	$K_B$	$v_2'$
5	1, 2	$bz_B$	$-\frac{v_4 + v_6}{2}$	6	1, 2	$bz_B$	$-\frac{v_4 + v_6}{2}$
	3, 4	$\varphi_B$	$-\frac{v_3 + v_5}{2}$		3, 4	$\varphi_B$	$-\frac{v_4 + v_6}{2}$
	5, 6, 7	$\omega_B$	$-\frac{v_3 + v_5}{2} + \left(\frac{v_4' + v_6'}{2} - v_2\right) \left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right)$		5, 6, 7	$\omega_B$	$-\frac{v_4 + v_6}{2} + \left(\frac{v_4' + v_6'}{2} - v_2\right) \left(1 + \frac{h^2}{a^2}\right)$
	8	$by_B$	$-\frac{v_3 + v_5}{2} + \frac{v_4' + v_6'}{2} - v_2 + v_2'$		8	$by_B$	$-\frac{v_4 + v_6}{2} + \frac{v_4' + v_6'}{2} - v_2 + v_2'$
	9	$K_B$	$-\frac{v_3 + v_5}{2} + \frac{v_4' + v_6'}{2} - v_2 + v_1'$		9	$K_B$	$-\frac{v_4 + v_6}{2} + \frac{v_4' + v_6'}{2} - v_2 + v_2'$



Tabelle 3

Punkt Nr.	Orien- tierungs- phase	Operator	Restfehler der gegenseitigen Orientierung	Orien- tierungs- phase	Operator	Restfehler der gegenseitigen Orientierung	Punkt Nr.
3	1, 2	$\varphi_A$	.	3	1, 2	$\varphi_A \frac{v_4 + v_6}{2}$	4
	3, 4	$\varphi_B$	$\frac{v_3 + v_5}{2}$		3, 4	$\varphi_B \frac{v_4 + v_6}{2}$	
	5, 6, 7	$\omega_A$	$\frac{v_3 + v_5}{2} + \left( \frac{v_3' + v_5'}{2} - v_1 \right) \left( 1 + \frac{h^2}{a^2} \right)$		5, 6, 7	$\omega_A \frac{v_4 + v_6}{2} + \left( \frac{v_3' + v_5'}{2} - v_1 \right) \left( 1 + \frac{h^2}{a^2} \right)$	
	8	$K_B$	$\frac{v_3 + v_5}{2} + \frac{v_3' + v_5'}{2} - v_1 + v_1'$		8	$K_B \frac{v_4 + v_6}{2} + \left( \frac{v_3' + v_5'}{2} - v_1 \right) \left( 1 + \frac{h^2}{a^2} \right)$	
	9	$K_A$	$\frac{v_3 + v_5}{2} + \frac{v_3' + v_5'}{2} - v_1 + v_1'$		9	$K_A \frac{v_4 + v_6}{2} + \frac{v_3' + v_5'}{2} - v_1 + v_2$	
1	1, 2	$\varphi_A$	.	1	1, 2	$\varphi_A$	2
	3, 4	$\varphi_B$	.		3, 4	$\varphi_B$	
	5, 6, 7	$\omega_A$	$\left( \frac{v_3' + v_5'}{2} - v_1 \right) \frac{h^2}{a^2}$		5, 6, 7	$\omega_A \left( \frac{v_3' + v_5'}{2} - v_1 \right) \frac{h^2}{a^2}$	
	8	$K_B$	$v_1'$		8	$K_B \left( \frac{v_3' + v_5'}{2} - v_1 \right) \frac{h^2}{a^2}$	
	9	$K_A$	$v_1'$		9	$K_A v_2$	
5	1, 2	$\varphi_A$	.	5	1, 2	$\varphi_A - \frac{v_4 + v_6}{2}$	6
	3, 4	$\varphi_B$	$-\frac{v_3 + v_5}{2}$		3, 4	$\varphi_B - \frac{v_4 + v_6}{2}$	
	5, 6, 7	$\omega_A$	$-\frac{v_3 + v_5}{2} + \left( \frac{v_3' + v_5'}{2} - v_1 \right) \left( 1 + \frac{h^2}{a^2} \right)$		5, 6, 7	$\omega_A - \frac{v_4 + v_6}{2} + \left( \frac{v_3' + v_5'}{2} - v_1 \right) \left( 1 + \frac{h^2}{a^2} \right)$	
	8	$K_B$	$-\frac{v_3 + v_5}{2} + \frac{v_3' + v_5'}{2} - v_1 + v_1'$		8	$K_B - \frac{v_4 + v_6}{2} + \left( \frac{v_3' + v_5'}{2} - v_1 \right) \left( 1 + \frac{h^2}{a^2} \right)$	
	9	$K_A$	$-\frac{v_3 + v_5}{2} + \frac{v_3' + v_5'}{2} - v_1 + v_1'$		9	$K_A - \frac{v_4 + v_6}{2} + \frac{v_3' + v_5'}{2} - v_1 + v_2$	

Der Schritt 8 tilgt den bisherigen Restfehler in 1 und 2 durch  $by_B$  und verringert um den gleichen Betrag

$$\left( \frac{v_4' + v_6'}{2} - v_2 \right) \cdot \frac{h^2}{a^2}$$

die Restfehler aller übrigen Punkte, teilt jedoch gleichzeitig seinen eigenen Fehler  $v_2'$  allen anderen Punkten mit. Schritt 9, die Drehung mit  $k_B$  tilgt in den Punkten 1, 3, 5 den Fehler  $v_2'$  und bringt ihnen den neuen Fehler  $v_1$ . Damit ist die Orientierung beendet.

Die zufälligen Restfehler der 6 charakteristischen Punkte sind in der Tabelle 1 stark umrahmt.

Ist das Gewicht eines Fehlers  $v = 1$ , so ist die Gewichtsreziproke für den *mittleren* Restfehler der Punkte 1 und 2 gleich  $Q_{11} = Q_{22} = 1$ , für die Punkte 3 bis 6 nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$Q_{33} = Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 + 1 = 3.$$

Dieses bemerkenswerteste Ergebnis der Arbeiten [1] und [2] ist somit lediglich durch die Fehlerbetrachtung selbst hergeleitet.

Die Tabelle 1 ist auch sonst fehlerkundlich recht aufschlußreich. Man beachte die innere gegenseitige Abhängigkeit der Restfehler, die hier klar zu Tage tritt.

Will man nun die Gewichtskoeffizienten der Orientierungsunbekannten herleiten, so sind in die bekannten Parallaxengleichungen (5. 1) nun der Reihe nach die erhaltenen Restfehler einzutragen. Tabelle 2 zeigt dies. Wir stehen vor einem Fall bedingter Beobachtungen mit Unbekannten, der jedoch einfachst zu lösen ist, indem durch leicht einzusehende Subtraktion bzw. Addition der 6 Gleichungen die 5 neuen I bis V mit den nun *unabhängigen* Verbesserungen  $\lambda_I$  bis  $\lambda_V$  hergeleitet werden, wie aus dem unteren Teil der Tabelle 2 ersichtlich ist. Die Gewichte  $g$  der  $\lambda$  sind die zeilenweisen reziproken Quadratsummen der Fehlerkoeffizienten. (Vgl. [1], Tabelle VIII.)

Die Normalgleichungen für die Gewichtsreziproken sind aus I bis V mit den neuen Verbesserungen  $\lambda$  und ihren Gewichten  $g$  sofort leicht gebildet; sie decken sich mit den in [1] Seite 50 angegebenen.

Für den Fall, daß beide Kammern beweglich sind [2] (5. 2) und (5. 4), können wir nun die Tabelle 3 direkt aufstellen, was in wenigen Minuten geschehen ist und nach dem vorhergehenden wohl kaum weitere Erklärungen erheischt.

Es ist in der Tat erstaunlich, daß dieses überaus wichtige, fehlertheoretisch so einfache Problem nicht schon längst richtig erkannt wurde und mehrfach zu falschen Beurteilungen geführt hat. Herr *Bachmann* hat das Verdienst, als erster einen *richtigen* Weg gegangen zu sein.

D. Kasper