

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 45 (1947)

Heft: 10

Artikel: Elementare Ableitung der Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung

Autor: Bachmann, W.K.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-204728>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 18.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SCHWEIZERISCHE ZEITSCHRIFT FÜR

VERMESSUNG UND KULTURTECHNIK

Revue technique Suisse des Mensurations et du Génie rural

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik. Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft f. Photogrammetrie

Editeur: Société Suisse de Mensuration et du Génie rural. Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie

REDAKTION: Dr. h. c. C. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständiger Mitarbeiter f. Kulturtechnik: E. RAMSER, Prof. f. Kulturtechnik ETH., Freiestr. 72, Zürich

Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

Expedition, Administration und Inseratenannahme: BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR AG.

Schluß der Inseratenannahme am 6. jeden Monats

NR. 10 • XLV. JAHRGANG

der „Schweizerischen Geometer-Zeitung“
Erscheinend am 2. Dienstag jeden Monats

14. OKTOBER 1947

INSERATE: 25 Rp. per einspalt. mm-Zeile.
Bei Wiederholungen Rabatt gemäß spez. Tarif

ABONNEMENTE:

Schweiz Fr. 15.—, Ausland Fr. 20.— jährlich

Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaft für
Photogrammetrie Fr. 10.— jährlich

Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz.
Vereins f. Vermessungswesen u. Kulturtechnik

Elementare Ableitung der Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung

von Prof. Dr. W. K. Bachmann

In der Juni-Nummer dieser Zeitschrift hat Prof. Dr. Kasper die Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung auf eine neue Art behandelt. Seine Ableitung der mittleren Restparallaxen ist äußerst elegant und leicht verständlich. Sie wird zweifellos vielen Fachleuten das Studium dieses Problems beträchtlich erleichtern. Bei der Berechnung der Gewichts- und Korrelationskoeffizienten der Unbekannten ging jedoch Prof. Kasper rein formal vor, da es ihm lediglich daran gelegen war, zu zeigen, daß seine Resultate in jeder Beziehung mit den meinigen übereinstimmen. Obschon sich dieses formale Rechnen nicht mehr um die bei der gegenseitigen Orientierung am Autographen auszuführenden Operationen kümmert, sind Prof. Kaspers Resultate in jeder Beziehung richtig, was dem Verschwinden der Determinante der 6 linearen Parallaxengleichungen mit 5 Unbekannten und somit der richtigen Aufstellung der Fehlergleichungen zuzuschreiben ist.

Trachtet man jedoch darnach, nicht nur die Restparallaxen, sondern auch die Restfehler der Orientierungsunbekannten ohne jegliche formale Rechnung zu bestimmen, so kann noch anders vorgegangen werden. In diesem Falle wird man jeder am Autographen auszuführenden Operation eine entsprechende algebraische Operation zuordnen. Zur Bestimmung der Gewichts- und Korrelationskoeffizienten der Orientierungsunbekannten sowie der Restparallaxen genügt es dann, das Fehlerfortpflanzungsgesetz anzuwenden. Wir wollen dies an dem speziellen Orientierungsver-

fahren, auf welchem sich meine früheren Untersuchungen basieren, zeigen. Es soll sich also um die gegenseitige Orientierung von Senkrechtaufnahmen eines horizontalen Geländes handeln, und als Orientierungsverfahren wollen wir das, in der Publikation W. K. Bachmann: „Méthode de la connexion des images et théorie des erreurs de l'orientation relative“. Schweiz. Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik 1945, Seite 167 unter dem Titel a) „Orientation relative de vues verticales par le déplacement d'une seule chambre“ angeführte, hier übernehmen, um auf diese Art den Vergleich mit den andern Publikationen zu erleichtern.

Im übrigen sollen Prof. Kaspers Bezeichnungen übernommen werden; es stellen somit v_1, v_2, \dots, v_6 die wahren Fehler dar, die man beim Wegstellen einer Vertikalparallaxe begeht. Die Vertikalparallaxen in den 6 zur gegenseitigen Orientierung zu verwendenden Punkten sind durch die Tabelle (5.1) der oben zitierten Publikation gegeben.

Wir wollen jeweils, mit einem dicken Strich umrahmt, zuerst die am Autographen Wild A 5 durchzuführenden Operationen angeben, und gleich darunter die entsprechende Fehlerrechnung, das heißt, die entsprechenden algebraischen Operationen angeben. Der endgültige Wert einer Orientierungsunbekannten, der in den Autograph eingeführt wird, soll immer mit dem Index M versehen sein, zum Beispiel $(bz_B)_M$.

Im übrigen soll der wahre, das heißt fehlerlose Wert der Unbekannten immer mit dem Index 0 bezeichnet werden, zum Beispiel $(bz_B)_0$. Kommt also in einer Parallaxengleichung zum Beispiel das Differential dbz_B vor, und wird der im Autograph eingeführte Wert von bz_B mit $(bz_B)_k$ bezeichnet, so ist

$$dbz_B = (bz_B)_k - (bz_B)_0.$$

Es sollen nun zuerst, unter fortwährender Berücksichtigung der am Autographen auszuführenden Operationen, die wahren Fehler der Orientierungsunbekannten in Funktion der wahren Parallaxenfehler berechnet werden. Ist dies einmal erreicht, so erhält man die mittleren (quadratischen) Fehler der Orientierungsunbekannten durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf die Parallaxenfehler, die voneinander unabhängig sind, und welchen wir durchwegs das Gewicht Eins zuordnen, was den Beobachtungen am Autographen gut entspricht, solange es sich um die Orientierung von bis an den Rand hinaus gleichmäßig durchgezeichneter Aufnahmen handelt. Auf ähnliche Art können auch die Gewichtskoeffizienten $Q_{11} \dots Q_{66}$ der mittleren Restparallaxen in den 6 Punkten, nach einmaliger Durchführung der Operationenfolge, berechnet werden.

Wir haben, unter Einführung der genannten Bezeichnungen:

1) pv_4 wegstellen mit bz_B ; Ablesung $(bz_B)_4$
 2) pv_6 wegstellen mit bz_B ; Ablesung $(bz_B)_6$
 bz_B einstellen auf $(bz_B)_M = \frac{(bz_B)_4 + (bz_B)_6}{2}$

$$pv_4 = 0 \quad v_4 = -dby_B + h \left(1 + \frac{a^2}{h^2} \right) dw_B + \frac{a}{h} \left\{ (bz_B)_4 - (bz_B)_0 \right\}$$

$$pv_6 = 0 \quad v_6 = -dby_B + h \left(1 + \frac{a^2}{h^2} \right) dw_B - \frac{a}{h} \left\{ (bz_B)_6 - (bz_B)_0 \right\}.$$

Subtrahiert man nun die zweite Gleichung von der ersten, und dividiert das Resultat durch 2, um $(bz_B)_M$ zu bilden, so erhält man

$$\frac{v_4 - v_6}{2} = + \frac{a}{h} \left\{ \frac{(bz_B)_4 + (bz_B)_6}{2} - (bz_B)_0 \right\}.$$

Der endgültige Wert, welcher am Autograph eingeführt wird, ist aber

$$(bz_B)_M = \frac{(bz_B)_4 + (bz_B)_6}{2};$$

die obige Gleichung wird daher

$$\frac{v_4 - v_6}{2} = + \frac{a}{h} \left\{ (bz_B)_M - (bz_B)_0 \right\},$$

oder, nach $(bz_B)_M$ aufgelöst,

$$(1) \quad (bz_B)_M = (bz_B)_0 + \frac{h}{a} \left\{ \frac{v_4 - v_6}{2} \right\}.$$

Wenn $v_4 = v_6 = 0$ ist, erhalten wir somit für $(bz_B)_M$ den korrekten, das heißt fehlerlosen Wert $(bz_B)_0$.

<p>3) pv_3 wegstellen mit φ_B; Ablesung $(\varphi_B)_3$ 4) pv_5 wegstellen mit φ_B; Ablesung $(\varphi_B)_5$ φ_B einstellen auf $(\varphi_B)_M = \frac{(\varphi_B)_3 + (\varphi_B)_5}{2}$</p>

$$pv_3 = 0 \quad v_3 = -bd\kappa_B - dby_B + h \left(1 + \frac{a^2}{h^2} \right) dw_B - \frac{ab}{h} \left\{ (\varphi_B)_3 - (\varphi_B)_0 \right\} + \frac{a}{h} dbz_B$$

$$pv_5 = 0 \quad v_5 = -bd\kappa_B - dby_B + h \left(1 + \frac{a^2}{h^2} \right) dw_B + \frac{ab}{h} \left\{ (\varphi_B)_5 - (\varphi_B)_0 \right\} - \frac{a}{h} dbz_B$$

$$\frac{-v_3 + v_5}{2} = + \frac{ab}{h} \left\{ \frac{(\varphi_B)_3 + (\varphi_B)_5}{2} - (\varphi_B)_0 \right\} - \frac{a}{h} dbz_B.$$

Da jedoch der für bz_B früher schon eingeführte Wert gleich $(bz_B)_M$ ist, so erhalten wir, unter Berücksichtigung der Formel (1),

$$dz_B = (bz_B)_M - (bz_B)_0 \text{ und andernteils } \frac{(\varphi_B)_3 + (\varphi_B)_5}{2} = (\varphi_B)_M.$$

Die obige Gleichung geht somit über in

$$\frac{ab}{h} \{(\varphi_B)_M - (\varphi_B)_0\} = \frac{-v_3 + v_5}{2} + \frac{a}{h} \cdot \frac{h}{a} \left\{ \frac{v_4 - v_6}{2} \right\}$$

$$\frac{ab}{h} \{(\varphi_B)_M - (\varphi_B)_0\} = \frac{+v_4 - v_6 - v_3 + v_5}{2}$$

(2)

$$(\varphi_B)_M = (\varphi_B)_0 + \frac{h}{ab} \left\{ \frac{v_4 - v_6 - v_3 + v_5}{2} \right\}$$

5) pv_4 wegstellen mit w_B ; Ablesung $(w_B)_4$ } $(w_B)_m = \frac{(w_B)_4 + (w_B)_6}{2}$

6) pv_6 wegstellen mit w_B ; Ablesung $(w_B)_6$ }

7) pv_2 wegstellen mit w_B ; Ablesung $(w_B)_2$

w_B einstellen auf $(w_B)_M = (w_B)_m - \frac{h^2}{a^2} \{ (w_B)_2 - (w_B)_m \}$

$$pv_4 = 0 \quad v_4' = -dby_B + h \left(1 + \frac{a^2}{h^2} \right) \{ (w_B)_4 - (w_B)_0 \} + \frac{a}{h} dbz_B$$

$$pv_6 = 0 \quad v_6' = -dby_B + h \left(1 + \frac{a^2}{h^2} \right) \{ (w_B)_6 - (w_B)_0 \} - \frac{a}{h} dbz_B$$

$$\frac{v_4' + v_6'}{2} = -dby_B + h \left(1 + \frac{a^2}{h^2} \right) \left\{ \underbrace{\frac{(w_B)_4 + (w_B)_6}{2}}_{(w_B)_m} - (w_B)_0 \right\}$$

$$\frac{v_4' + v_6'}{2} = -dby_B + h \left(1 + \frac{a^2}{h^2} \right) \{ (w_B)_m - (w_B)_0 \}$$

$$pv_2 = 0 \quad v_2 = -dby_B + h \{ (w_B)_2 - (w_B)_0 \}$$

$$\frac{v_4' + v_6'}{2} - v_2 = h \left(1 + \frac{a^2}{h^2} \right) \{ (w_B)_m - (w_B)_0 \} - h \{ (w_B)_2 - (w_B)_0 \}$$

$$\frac{v_4' + v_6'}{2} - v_2 = \left\{ -h \left(1 + \frac{a^2}{h^2} \right) + h \right\} (w_B)_0 + h \left(1 + \frac{a^2}{h^2} \right) (w_B)_m - h (w_B)_2$$

$$\frac{v_4' + v_6'}{2} - v_2 = -\frac{\alpha^2}{h} (w_B)_0 - h \left\{ (w_B)_2 - (w_B)_m \right\} + \frac{\alpha^2}{h} (w_B)_m$$

$$\frac{h}{\alpha^2} \left\{ \frac{v_4' + v_6'}{2} - v_2 \right\} = - (w_B)_0 + \underbrace{(w_B)_m - \frac{h^2}{\alpha^2} \left\{ (w_B)_2 - (w_B)_m \right\}}_{(w_B)_M}$$

(3)

$$(w_B)_M = (w_B)_0 + \frac{h}{\alpha^2} \left\{ \frac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2} \right\}$$

8) pv_2 wegstellen mit by_B

$$pv_2 = 0 \quad v_2' = - \left\{ (by_B)_2 - (by_B)_0 \right\} + h \left\{ (w_B)_M - (w_B)_0 \right\}.$$

Wird nun die Gleichung (3) berücksichtigt, so erhält man

$$v_2' = - \left\{ (by_B)_2 - (by_B)_0 \right\} + \frac{h^2}{\alpha^2} \left\{ \frac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2} \right\}.$$

Der endgültige Wert, welchen wir für by_B einführen, ist aber $(by_B)_M = (by_B)_2$; wir erhalten somit

(4)

$$(by_B)_M = (by_B)_0 - v_2' + \frac{h^2}{\alpha^2} \left\{ \frac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2} \right\}$$

9) pv_1 wegstellen mit κ_B

$$pv_1 = 0 \quad v_1 = -b \left\{ \underbrace{(\kappa_B)_1}_{(\kappa_B)_M} - (\kappa_B)_0 \right\} - \left\{ (by_B)_M - (by_B)_0 \right\} + h \left\{ (w_B)_M - (w_B)_0 \right\}$$

$$v_1 = -b \left\{ (\kappa_B)_M - (\kappa_B)_0 \right\} + v_2' - \frac{h^2}{\alpha^2} \left\{ \frac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2} \right\} + \frac{h^2}{\alpha^2} \left\{ \frac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2} \right\}$$

$$b \left\{ (\kappa_B)_M - (\kappa_B)_0 \right\} = -v_1 + v_2'$$

(5)

$$(\kappa_B)_M = (\kappa_B)_0 + \frac{1}{b} (v_2' - v_1).$$

(Schluß folgt.)