

# Elementare Ableitung der Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung [Schluss]

Autor(en): **Bachmann, W.K.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **45 (1947)**

Heft 11

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-204734>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SCHWEIZERISCHE ZEITSCHRIFT FÜR  
**VERMESSUNG UND KULTURTECHNIK**

**Revue technique Suisse des Mensurations et du Génie rural**

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik. Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft f. Photogrammetrie

Editeur: Société Suisse de Mensuration et du Génie rural. Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie

**REDAKTION:** Dr. h. c. C. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständiger Mitarbeiter f. Kulturtechnik: E. RAMSER, Prof. f. Kulturtechnik ETH., Freiestr. 72, Zürich

Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

Expedition, Administration und Inseratenannahme: BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR AG.

Schluß der Inseratenannahme am 6. jeden Monats

**NR. 11 • XLV. JAHRGANG**  
 der „Schweizerischen Geometer-Zeitung“  
 Erscheinend am 2. Dienstag jeden Monats  
**11. NOVEMBER 1947**  
**INSERATE:** 25 Rp. per einspalt. mm-Zelle.  
 Bei Wiederholungen Rabatt gemäß spez. Tarif

**ABONNEMENTE:**  
 Schweiz Fr. 15.—, Ausland Fr. 20.— jährlich  
 Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaft für  
 Photogrammetrie Fr. 10.— jährlich  
 Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz.  
 Vereins f. Vermessungswesen u. Kulturtechnik

## Elementare Ableitung der Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung

von Prof. Dr. W. K. Bachmann

(Schluß)

Wir wollen jetzt noch die wahren Restparallaxen in den 6, zur gegenseitigen Orientierung verwendeten, Punkten berechnen, was durch Einführung der wahren Fehler  $(bz_B)_M - (bz_B)_0$ ,  $(\varphi_B)_M - (\varphi_B)_0$  usw. der Unbekannten in die Parallaxengleichungen geschehen kann. Wir erhalten so, wenn wir diese Parallaxen mit dem Index  $M$  bezeichnen,

$$pv_1 = -bd\kappa_B - dby_B + hdw_B$$

$$(pv_1)_M = -b \{(\kappa_B)_M - (\kappa_B)_0\} - \{by_B)_M - (by_B)_0\} + h \{(w_B)_M - (w_B)_0\}.$$

Berücksichtigen wir nun die Gleichungen (3), (4) und (5), so finden wir

$$(pv_1)_M = + (v_1 - v_2') + v_2' - \frac{h^2}{a^2} \left\{ \frac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2} \right\} + \frac{h^2}{a^2} \left\{ \frac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2} \right\}$$

(6)

$$(pv_1)_M = + v_1$$

$$(pv_2)_M = - \{ (by_B)_M - (by_B)_0 \} + h \{ (w_B)_M - (w_B)_0 \}$$

$$(pv_2)_M = + v_2' - \frac{h^2}{a^2} \left\{ \frac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2} \right\} + \frac{h^2}{a^2} \left\{ \frac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2} \right\}$$

(7)

$$(pv_2)_M = + v_2'$$

$$pv_3 = - bd\kappa_B - dby_B + h \left( 1 + \frac{a^2}{h^2} \right) dw_B - \frac{ab}{h} d\varphi_B + \frac{a}{h} dbz_B$$

$$(pv_3)_M = \left\{ \begin{aligned} & (+v_1 - v_2') + v_2' - \frac{h^2}{a^2} \left\{ \frac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2} \right\} + \frac{-v_4 + v_6 + v_3 - v}{2} \\ & + \frac{h^2}{a^2} \left( 1 + \frac{a^2}{h^2} \right) \left\{ \frac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2} \right\} + \frac{v_4 - v_6}{2} \end{aligned} \right.$$

$$(pv_3)_M = v_1 + \frac{v_3 - v_5}{2} + \frac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2}$$

(8)

$$(pv_3)_M = \frac{v_3 - v_5 + v_4' + v_6'}{2} + v_1 - v_2$$

$$pv_4 = - dby_B + h \left( 1 + \frac{a^2}{h^2} \right) dw_B + \frac{a}{h} dbz_B$$

$$(pv_4)_M = \left\{ \begin{aligned} & + v_2' - \frac{h^2}{a^2} \left\{ \frac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2} \right\} + \frac{v_4 - v_6}{2} \\ & + \frac{h^2}{a^2} \left( 1 + \frac{a^2}{h^2} \right) \left\{ \frac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2} \right\} \end{aligned} \right.$$

(9)

$$(pv_4)_M = \frac{v_4 - v_6 + v_4' + v_6'}{2} + v_2' - v_2$$

$$pv_5 = - bd\kappa_B - dby_B + h \left( 1 + \frac{a^2}{h^2} \right) dw_B + \frac{ab}{h} d\varphi_B - \frac{a}{h} dbz_B$$

$$(pv_5)_M = \left\{ \begin{aligned} & + v_1 - v_2' + v_2' - \frac{h^2}{a^2} \left\{ \frac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2} \right\} + \frac{v_6 - v_4}{2} \\ & + \frac{h^2}{a^2} \left( 1 + \frac{a^2}{h^2} \right) \left\{ \frac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2} \right\} + \frac{v_4 - v_6 + v_5 - v_3}{2} \end{aligned} \right.$$

(10)

$$(pv_5)_M = \frac{v_5 - v_3 + v_4' + v_6'}{2} + v_1 - v_2$$

$$pv_6 = -dbz_B + h \left( 1 + \frac{a^2}{h^2} \right) dw_B - \frac{a}{h} dbz_B$$

$$(pv_6)_M = \left\{ \begin{aligned} &+ v_2' - \frac{h^2}{a^2} \left\{ \frac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2} \right\} + \frac{v_6 - v_4}{2} \\ &+ \frac{h^2}{a^2} \left( 1 + \frac{a^2}{h^2} \right) \left\{ \frac{v_4' + v_6' - 2v_2}{2} \right\} \end{aligned} \right.$$

(11)

$$(pv_6)_M = \frac{v_6 - v_4 + v_6' + v_4'}{2} + v_2' - v_2$$

Wir haben die hier erhaltenen Resultate in der nachfolgenden Tabelle I zusammengestellt, und zwar auf gleiche Art, wie es teilweise von Prof. Kasper schon gemacht worden ist.

Anhand dieser Tabelle können wir nun, durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes, die mittleren Fehler  $\mu_{\varphi_B}$ ,  $\mu_{bz_B}$  usw. der Orientierungsunbekannten, sowie die mittleren Restparallaxen  $\mu_{pv_1} \dots \mu_{pv_6}$  berechnen, sobald wir den mittleren Fehler  $\mu$  der Gewichtseinheit, das heißt, den mittleren Fehler des Wegstellens einer Vertikalparallaxe im *Objektraum*, kennen. Man erhält so

$$\mu^2_{bz_B} = \left\{ \frac{1}{4} \frac{h^2}{a^2} + \frac{1}{4} \frac{h^2}{a^2} \right\} \mu^2 = \frac{1}{2} \frac{h^2}{a^2} \mu^2$$

und der Gewichtskoeffizient  $Q_{bz_B} bz_B$  von  $bz_B$  wird somit

(12)

$$Q_{bz_B} bz_B = \frac{\mu^2_{bz_B}}{\mu^2} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{a^2}$$

Die weiteren Gleichungen der Tabelle I ergeben sodann

$$\mu^2_{\varphi_B} = \left\{ \frac{1}{4} \frac{h^2}{a^2 b^2} + \frac{1}{4} \frac{h^2}{a^2 b^2} + \frac{1}{4} \frac{h^2}{a^2 b^2} + \frac{1}{4} \frac{h^2}{a^2 b^2} \right\} \mu^2$$

(13)

$$Q_{\varphi_B \varphi_B} = \frac{h^2}{a^2 b^2}$$

Tabelle I

| Gl.<br>No. |                                   | Wahre Vertikalparallaxen — Beobachtungsfehler |                    |                            |                            |                            |                            |                |                               |                               |  |
|------------|-----------------------------------|-----------------------------------------------|--------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------|-------------------------------|-------------------------------|--|
|            |                                   | $v_1$                                         | $v_2$              | $v_3$                      | $v_4$                      | $v_5$                      | $v_6$                      | $v_2'$         | $v_4'$                        | $v_6'$                        |  |
| (1)        | $(bz_B)_M - (bz_B)_0 =$           | .                                             | .                  | .                          | $+\frac{1}{2}\frac{h}{a}$  | .                          | $-\frac{1}{2}\frac{h}{a}$  | .              | .                             | .                             |  |
| (2)        | $(\varphi_B)_M - (\varphi_B)_0 =$ | .                                             | .                  | $-\frac{1}{2}\frac{h}{ab}$ | $+\frac{1}{2}\frac{h}{ab}$ | $+\frac{1}{2}\frac{h}{ab}$ | $-\frac{1}{2}\frac{h}{ab}$ | .              | .                             | .                             |  |
| (3)        | $(w_B)_M - (w_B)_0 =$             | .                                             | $-\frac{h}{a^2}$   | .                          | .                          | .                          | .                          | .              | $+\frac{1}{2}\frac{h}{a^2}$   | $+\frac{1}{2}\frac{h}{a^2}$   |  |
| (4)        | $(by_B)_M - (by_B)_0 =$           | .                                             | $-\frac{h^2}{a^2}$ | .                          | .                          | .                          | .                          | $-1$           | $+\frac{1}{2}\frac{h^2}{a^2}$ | $+\frac{1}{2}\frac{h^2}{a^2}$ |  |
| (5)        | $(\kappa_B)_M - (\kappa_B)_0 =$   | $+\frac{1}{b}$                                | .                  | .                          | .                          | .                          | .                          | $+\frac{1}{b}$ | .                             | .                             |  |
| (6)        | $(pv_1)_M$                        | $+1$                                          | .                  | .                          | .                          | .                          | .                          | .              | .                             | .                             |  |
| (7)        | $(pv_2)_M$                        | .                                             | .                  | .                          | .                          | .                          | .                          | $+1$           | .                             | .                             |  |
| (8)        | $(pv_3)_M$                        | $+1$                                          | $-1$               | $+\frac{1}{2}$             | .                          | $-\frac{1}{2}$             | .                          | .              | $+\frac{1}{2}$                | $+\frac{1}{2}$                |  |
| (9)        | $(pv_4)_M$                        | .                                             | $-1$               | .                          | $+\frac{1}{2}$             | .                          | $-\frac{1}{2}$             | $+1$           | $+\frac{1}{2}$                | $+\frac{1}{2}$                |  |
| (10)       | $(pv_5)_M$                        | $+1$                                          | $-1$               | $-\frac{1}{2}$             | .                          | $+\frac{1}{2}$             | .                          | .              | $+\frac{1}{2}$                | $+\frac{1}{2}$                |  |
|            |                                   |                                               |                    |                            | $1$                        |                            | $1$                        |                | $1$                           | $1$                           |  |

$$(14) \quad Q_{w_B w_B} = \frac{3}{2} \frac{h^2}{a^4} \quad Q_{by_B by_B} = 1 + \frac{3}{2} \frac{h^4}{a^4} \quad Q_{\kappa_B \kappa_B} = \frac{2}{b^2}$$

$$\mu^2 p_{v_1} = \mu^2 \quad \therefore \quad Q_{p_{v_1} p_{v_1}} = 1.$$

Aus den Gleichungen (6) bis (11) erhalten wir somit

$$(15) \quad \begin{aligned} Q_{p_{v_1} p_{v_1}} &= 1 & Q_{p_{v_2} p_{v_2}} &= 1 \\ Q_{p_{v_3} p_{v_3}} &= Q_{p_{v_4} p_{v_4}} = Q_{p_{v_5} p_{v_5}} = Q_{p_{v_6} p_{v_6}} &= 3. \end{aligned}$$

Jetzt fehlen uns aber noch die Korrelationskoeffizienten der Orientierungsunbekannten. Auch da kann man, wenn man unbedingt die symbolische Gewichtsrechnung vermeiden will, mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz durchkommen. Zu diesem Zwecke gehen wir folgendermaßen vor: Es sei

$$(16) \quad \xi = x + y$$

eine Funktion der *abhängigen* Unbekannten  $x$  und  $y$ , welche zum Beispiel durch vermittelnde Ausgleichung von Beobachtungen, oder auf eine beliebige andere Art, bestimmt worden sind. Wie dem auch sei, man hat immer die gut bekannte Formel

$$\mu^2 \xi = (Q_{xx} + 2 Q_{xy} + Q_{yy}) \mu^2$$

oder

$$(17) \quad Q_{\xi\xi} = Q_{xx} + 2 Q_{xy} + Q_{yy}$$

die in jedem Falle richtig ist. Wir erhalten somit für  $Q_{xy}$  den Wert

$$Q_{xy} = \frac{1}{2} \left\{ Q_{\xi\xi} - Q_{xx} - Q_{yy} \right\} \quad \text{oder}$$

$$(18) \quad Q_{xy} = \frac{1}{2} \left\{ Q_{(x+y)(x+y)} - Q_{xx} - Q_{yy} \right\}.$$

Um zum Beispiel  $Q_{\varphi_B bz_B}$  zu berechnen, bilden wir zuerst die Funktion  $d\varphi_B + dbz_B$ ; die ersten beiden Gleichungen der Tabelle I ergeben

$$d\varphi_B + dbz_B = \left\{ (\varphi_B)_M - (\varphi_B)_0 \right\} + \left\{ (bz_B)_M - (bz_B)_0 \right\}$$

$$d\varphi_B + dbz_B = -\frac{1}{2} \frac{h}{ab} (v_3 - v_5) + \frac{1}{2} \frac{h}{ab} (1 + b) (v_4 - v_6)$$

$$Q(\varphi_B + bz_B)(\varphi_B + bz_B) = \frac{1}{4} \frac{h^2}{a^2 b^2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \frac{h^2}{a^2 b^2} (1 + 2b + b^2) 2$$

$$Q(\varphi_B + bz_B)(\varphi_B + bz_B) = \frac{1}{2} \frac{h^2}{a^2 b^2} \{2 + 2b + b^2\}$$

$$Q_{\varphi_B bz_B} = \frac{1}{2} \left\{ Q(\varphi_B + bz_B)(\varphi_B + bz_B) - Q_{\varphi_B \varphi_B} - Q_{bz_B bz_B} \right\}.$$

Werden in dieser Formel die gefundenen Werte für  $Q_{\varphi_B \varphi_B}$ ,  $Q_{bz_B bz_B}$  und  $Q(\varphi_B + bz_B)(\varphi_B + bz_B)$  eingeführt, so erhält man

$$Q_{\varphi_B bz_B} = \frac{1}{4} \frac{h^2}{a^2 b^2} \{2 + 2b + b^2\} - \frac{1}{2} \frac{h^2}{a^2 b^2} - \frac{1}{4} \frac{h^2}{a^2}$$

$$Q_{\varphi_B bz_B} = + \frac{1}{2} \frac{h^2}{a^2 b} + \frac{1}{4} \frac{h^2 b^2}{a^2 b^2} - \frac{1}{4} \frac{h^2}{a^2}$$

(19)

$$Q_{\varphi_B bz_B} = + \frac{1}{2} \frac{h^2}{a^2 b}.$$

Auf genau gleiche Art können die andern Korrelationskoeffizienten der Unbekannten, sowie auch diejenigen der Vertikalparallaxen, berechnet werden. Da diese Bestimmung nun keine Schwierigkeiten mehr bietet, wollen wir sie dem Leser überlassen. Die Resultate, welche man so erhält, stimmen mit denjenigen, die ich früher gegeben habe, überein.

Wir haben somit alle Formeln auf elementarem Wege, lediglich unter Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes, abgeleitet. Vergleicht der Leser aber diese Entwicklungen mit denjenigen, welche ich früher in der eingangs zitierten Publikation angegeben habe, so wird er konstatieren müssen, daß die symbolische Gewichtsrechnung halt doch bequemer und einfacher zum Ziele führt, als das Fehlerfortpflanzungsgesetz. Um jeden Zweifel wegzuschaffen, wollen wir noch kurz zeigen, wie  $Q_{\varphi_B bz_B}$  mit Hilfe der symbolischen Gewichtsrechnung im vorliegenden Falle bestimmt werden kann. Die Tabelle I gibt uns, wenn wir die ersten beiden Gleichungen ins Auge fassen,

$$\begin{aligned} Q_{\varphi_B} &= + \frac{1}{2} \frac{h}{ab} (-Q_{v_3} + Q_{v_4} + Q_{v_5} - Q_{v_6}) \\ Q_{bz_B} &= + \frac{1}{2} \frac{h}{a} ( \quad + Q_{v_4} \quad - Q_{v_6} ) \\ \hline Q_{\varphi_B bz_B} &= + \frac{1}{4} \frac{h^2}{a^2 b} ( \quad + 1 \quad + 1 ) = + \frac{1}{2} \frac{h^2}{a^2 b} \end{aligned}$$

und schon steht das fertige Resultat da.

Planbeilage zu:

„Die magnetische Deklination als vermessungstechnisches Orientierungsmittel“

## II.

### Messungen Landestopographie

#### Präzisions-Koinzidenzbusssole

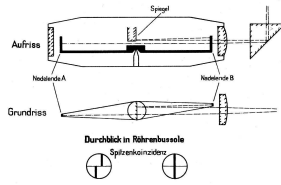


Fig. 3a

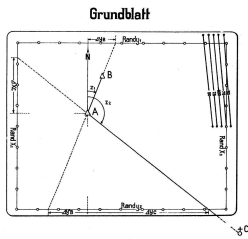


Fig. 3b

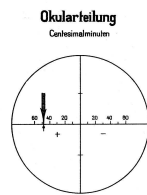


Fig. 3c

#### Tagesmessungen 1946

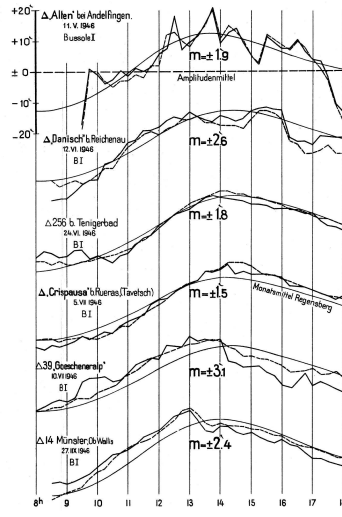
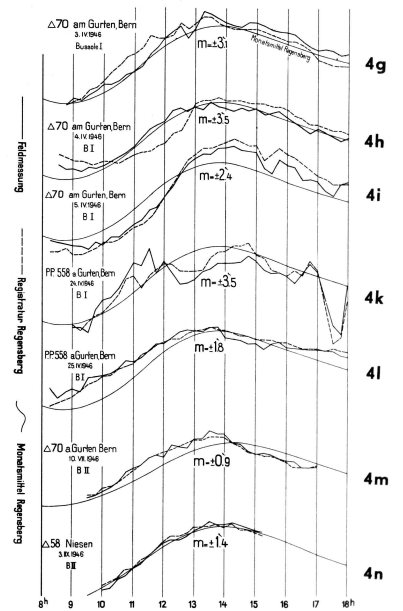


Fig. 4



Die elementare Ableitung der Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung, die von Prof. Kasper, in einer etwas andern Form, publiziert worden ist, wird bestimmt vielen Fachleuten das Studium dieses Problemcs beträchtlich erleichtern oder erst ermöglichen. Dagegen wird sich der mit den modernen Theorien vertraute Fehlertheoretiker, zu denen bestimmt auch Prof. Kasper zu zählen ist, sowie der junge Student, der frühzeitig genug in die symbolische Gewichtsrechnung eingeführt worden ist, eher der symbolischen Berechnung, oder besser noch einer Kombination der beiden Methoden zuwenden, wenn er die größtmögliche Einfachheit und Allgemeinheit seiner Entwicklungen anstrebt. Im übrigen steht es jedem frei, diejenige Rechenmethode zu verwenden, die ihm am besten paßt. Die Hauptsache ist ja, daß wir nun wissen, *wie* dieses Problem *korrekt* gelöst werden kann, und da bildet der gedanklich neue Beweis von Prof. Kasper eine recht willkommene Verifikation der Resultate, welche ich früher auf ganz andere Art erhalten habe.

Handelt es sich jedoch lediglich darum, ein bestimmtes Orientierungsverfahren fehlertheoretisch zu beurteilen, ohne die Gewichts- und Korrelationskoeffizienten der Unbekannten berechnen zu wollen, so muß man unbedingt dem Rechenverfahren Prof. Kaspers den Vorzug geben.

## **Die magnetische Deklination als vermessungstechnisches Orientierungsmittel**

(Schluß)

### *2. Instrumentelles*

Wenn eingangs von Bussolentheodoliten deutscher und schweizerischer Herkunft, mit Ablesegenauigkeiten von ca. 1 Min. (a. Tlg.) die Rede war, so läßt dies darauf schließen, daß Konjunktur und Bedürfnis diesen Instrumententypus gerufen haben. Der renditenverpflichteten Privatindustrie muß das Zeugnis ausgestellt werden, feinstes Fingerspitzengefühl für wirtschaftliche Gegebenheiten zu entwickeln. Wo Reichenbach'sche Distanzmessung mit Vertikallatte genügt, wird nicht Präzisionsdistanzmessung mit Horizontallatte ausgeführt; wo Bussolenzüge mit Sprungständen und einem Gehülfen zum Ziele führen, wird nicht mit zweien gearbeitet und auf allen Punkten gemessen – und wo gar der Meßtisch mit graphischer Wiedergabe der Meßresultate Innehaltung der Toleranzen verspricht, wird sicher die teure Koordinatenrechnung gerne umgangen. Es ist also ganz unzweifelhaft, daß der Einsatz guter Bussolensinstrumente für topographische Belange sehr bedeutsam ist. Hunderte von Beobachtungsserien mit Röhren-Koinzidenz-Bussolen (Kern-Prinzip), Fig. 3a und 3 b) und magnetischem Vollkreis (Wild-Prinzip) haben den Beweis erbracht, daß wir tatsächlich bei einem mittleren Nadel-Einstellfehler von ca. 1 Min. a. Tlg. angelangt sind. Erinnern wir uns indessen der reichen Variationen einer Deklinationskurve, so verwundern wir uns