

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

**Band:** 46 (1948)

**Heft:** 5

**Artikel:** Zwei Erweiterungen der Theorie der vermittelnden Ausgleichung

**Autor:** Baeschlin, C.F.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-205589>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

der große Mann in der kleinen Stadt. Die Früchte seiner mathematischen Tätigkeit blieben aber auch in dem kleinen Basel nicht aus. Johann Bernoulli durfte es erleben, daß der von ihm entdeckte und leidenschaftlich geförderte Schüler und Mitbürger Leonhard Euler zum größten Mathematiker des 18. Jahrhunderts heranwuchs. Der Fünfundsiebzigjährige drückte das Verhältnis zu seinem Schüler, anläßlich der Herausgabe seiner gesammelten Werke, die er Euler als Geschenk übersandte, wie folgt aus: «Ich zeige in diesen Büchern die höhere Mathematik dar, wie sie in der Kindheit war, Du stellst sie uns vor im Mannesalter.»

## Zwei Erweiterungen der Theorie der vermittelnden Ausgleichung

von C. F. Baeschlin

### I. Einführung fingierter Beobachtungen

Bei der Behandlung der vermittelnden Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate wird im allgemeinen stillschweigend angenommen, daß es möglich sei, die wahren Werte der Beobachtungsgrößen,  $L_i$ , als Funktion der wahren Werte der Unbekannten  $X, Y, Z, \dots U$  aufzustellen.

$$(1) \quad L_i = f_i(X, Y, Z, \dots U) \quad i = 1, 2, \dots n.$$

Bei der praktischen Behandlung des Problems kennen wir weder die wahren Werte  $L_i$  der Beobachtungsgrößen, noch der Unbekannten. Durch Beobachtungen gewinnen wir die *Beobachtungswerte*  $l_i$ . Setzen wir die  $l_i$  in die Beziehungen (1) ein, so werden sie nicht mehr erfüllt sein. Bei der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate verlangen wir bekanntlich, daß die Beziehungen (1) auch gelten, wenn wir  $L_i$  durch  $l_i + v_i$ ,  $X, Y, Z, \dots U$  durch  $x, y, z, \dots u$  ersetzen. Wir nennen die  $x, y, z, \dots u$  die *ausgeglichenen Werte* der Unbekannten, während  $l_i + v_i$  der ausgeglichene Wert der Beobachtungsgröße genannt wird.  $v_i$  heißt die *plausible* Verbesserung des Beobachtungswertes  $l_i$ . Das System (1) geht dann über in

$$(1a) \quad l_i + v_i = f_i(x, y, z, \dots u) \quad i = 1, 2, \dots n \quad n > u.$$

Dieses System (1a) von  $n$  Gleichungen für  $(n + u)$  Unbekannte (da ja auch die Verbesserungen  $v$  unbekannt sind) ist  $u$ -fach unbestimmt. In der Meth. d. kl. Qu. machen wir das Problem bestimmt, indem wir die Minimumsbedingung

$$(2) \quad [g_i v_i v_i]_{i=1}^{i=n} = \text{Minimum}$$

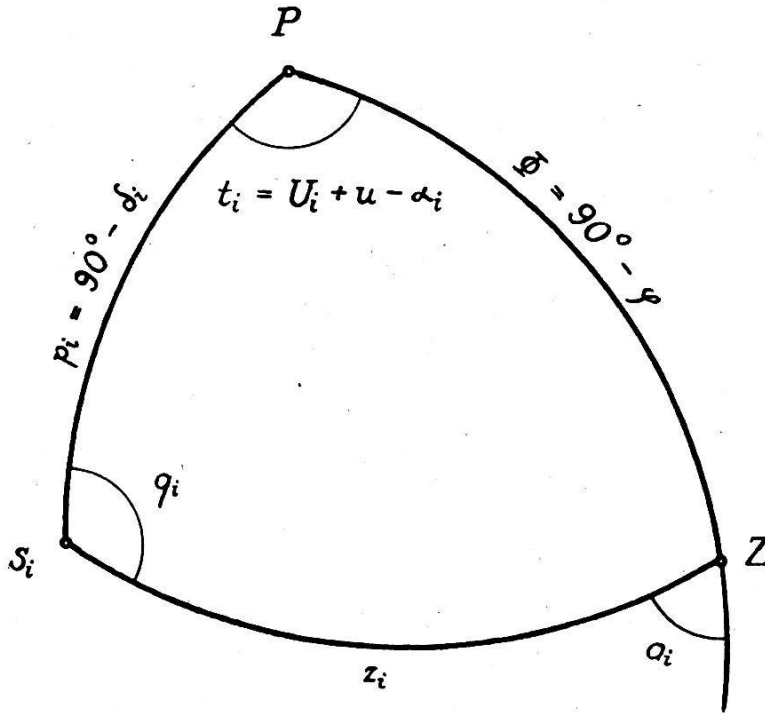
beifügen.

Bei manchen Anwendungen der Ausgleichungsrechnung nach der Meth. d. kl. Qu. sind uns aber nicht die Funktionen  $f_i$  gegeben, welche die Beobachtungsgrößen darstellen, sondern jede Beobachtungsgröße  $L_i$

ist mit den Unbekannten  $X, Y, Z, \dots U$  zusammen je in eine Funktion vereinigt.

Indem wir uns für die Zukunft der Einfachheit halber auf 3 Unbekannte  $X, Y, Z$  beschränken, erhalten wir

$$(3) \quad F_i(X, Y, Z, L_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots n.$$



Figur 1.

Diese Funktionen enthalten meist auch noch Parameter, die in jeder Funktion andere Werte annehmen. Beschränken wir uns auf 2 Parameter, die wir mit  $p_i, q_i$  bezeichnen, so haben wir in den wahren Werten

$$(4) \quad F_i(X, Y, Z, L_i, p_i, q_i) = 0.$$

In den ausgeglichenen Werten wird dies

$$4a) \quad F_i(x, y, z, l_i + v_i, p_i, q_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots n.$$

Diese Art der Formulierung tritt fast regelmäßig in der geographischen Ortsbestimmung auf, wo die Formeln der sphärischen Trigonometrie verwendet werden.

Ein Beispiel dieser Art liegt vor, wenn wir die Durchgangszeit  $U_i$  von  $n$  Sternen durch denselben Almukantarate von der wahren Zenitdistanz  $z$  beobachten. Nach dem Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie erhalten wir

$$\cos z = \cos \Phi \cos p_i + \sin \Phi \sin p_i \cos (U_i + u - \alpha_i).$$

Dabei bedeuten

$z$  = wahre Zenitdistanz des gewählten Almukantarates.

$\Phi$  = Zenitdistanz des Poles =  $90^\circ - \varphi$ , wo  $\varphi$  die geographische Breite des Beobachtungsortes ist.

$p_i$  = Poldistanz des beobachteten Sternes  $S_i = 90^\circ - \delta_i$ , wo  $\delta_i$  die Deklination des Sterns bezeichnet.

$\alpha_i$  = Rektaszension des beobachteten Sterns  $S_i$ .

$U_i$  = Durchgangszeit des Sterns  $S_i$  durch den Almukantarat  $z$ , beobachtet an einer Sternzeituhr.

$u$  = Uhrkorrektur der Uhrablesungen  $U_i$ , um sie in Orts-Sternzeit zu verwandeln.

Man kann für jeden beobachteten Stern eine solche Beziehung aufstellen. Bringen wir sie auf die Form (4a), so lautet sie:

$$(5) \quad F_i = -\cos z + \cos \Phi \cos p_i + \sin \Phi \sin p_i \cos (U + v_i + u - \alpha_i) = 0$$

$z$ ,  $\Phi$ ,  $u$  sind die 3 Unbekannten des Problems;  $U_i$  ist der Beobachtungswert.  $p_i$  und  $\alpha_i$  sind für jeden Stern gegebene Parameter. Wenn wir auf die Form (1a) gelangen wollen, müssen wir (5) noch  $U_i + v_i$  auflösen. Es wird

$$\cos (U_i + v_i + u - \alpha_i) = \frac{\cos z - \cos \Phi \cos p_i}{\sin \Phi \sin p_i}$$

und daraus

$$(6) \quad U_i + v_i = \alpha_i - u + \arccos \left\{ \frac{\cos z - \cos \Phi \cos p_i}{\sin \Phi \sin p_i} \right\} = f_i.$$

In diesem Beispiel ist die Auflösung der Funktionen  $F_i$  nach der Beobachtungsgröße  $U_i$  leicht möglich. Es gibt aber andere Fälle, in denen diese Auflösung nur sehr mühsam oder auch gar nicht gelingt.

Wir kehren wieder zum allgemeinen Fall zurück. Gestützt auf die Beziehungen (4) kann man stets zu einer Lösung gelangen, auch wenn die Auflösung der Funktionen  $F_i$  nach der Beobachtungsgröße  $L_i$  schwer oder gar nicht möglich ist. Wir führen in (4a) Näherungswerte  $x_0, y_0, z_0$  der Unbekannten ein, indem wir setzen:

$$(7) \quad \begin{cases} x = x_0 + \xi \\ y = y_0 + \eta \\ z = z_0 + \zeta \end{cases}$$

Damit geht (4a) mit Hilfe einer Taylorschen Reihe über in

$$F_i(x, y, z, l_i + v_i, p_i, q_i) = F_i(x_0, y_0, z_0, l_i, p_i, q_i) + \left( \frac{\partial F_i}{\partial x} \right)_0 \xi + \left( \frac{\partial F_i}{\partial y} \right)_0 \eta + \left( \frac{\partial F_i}{\partial z} \right)_0 \zeta + \left( \frac{\partial F_i}{\partial l_i} \right)_0 v_i = 0$$

wobei Glieder 2. und höherer Ordnung vernachlässigt worden sind. Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir die Abkürzungen ein:

$$(8) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x}\right)_0 = a_i; \left(\frac{\partial F_i}{\partial y}\right)_0 = b_i; \left(\frac{\partial F_i}{\partial z}\right)_0 = c_i \\ \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_i}\right)_0 = \Lambda_i \\ F_i(x_0, y_0, z_0, l_i, p_i, q_i) = f_i. \end{cases}$$

Damit erhalten wir

$$(9) \quad f_i + a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta + \Lambda_i v_i = 0.$$

Daraus folgen die *Fehlergleichungen*

Gewicht

$$(10) \quad g_i; \quad v_i = -\frac{a_i}{\Lambda_i} \xi - \frac{b_i}{\Lambda_i} \eta - \frac{c_i}{\Lambda_i} \zeta - \frac{f_i}{\Lambda_i}.$$

Daraus erhalten wir unter Zuhilfenahme von (2) die *Normalgleichungen*

$$(11) \quad \begin{cases} \left[ g \frac{aa}{\Lambda^2} \right] \xi + \left[ g \frac{ab}{\Lambda^2} \right] \eta + \left[ g \frac{ac}{\Lambda^2} \right] \zeta + \left[ g \frac{af}{\Lambda^2} \right] = 0 \\ \left[ g \frac{ab}{\Lambda^2} \right] \xi + \left[ g \frac{bb}{\Lambda^2} \right] \eta + \left[ g \frac{bc}{\Lambda^2} \right] \zeta + \left[ g \frac{bf}{\Lambda^2} \right] = 0 \\ \left[ g \frac{ac}{\Lambda^2} \right] \xi + \left[ g \frac{bc}{\Lambda^2} \right] \eta + \left[ g \frac{cc}{\Lambda^2} \right] \zeta + \left[ g \frac{cf}{\Lambda^2} \right] = 0 \end{cases}$$

Hier sind die Gleichungen (4a) zum Stimmen gebracht worden, indem man zum Beobachtungswert  $l_i$  die Verbesserung  $v_i$  zugefügt hat. Die Gewichte  $g_i$  sind aus den mittleren Fehlern der Beobachtungsgrößen gewonnen worden ( $g_i$  umgekehrt proportional zum Quadrat des mittlern Fehlers von  $l_i$ ).

Statt diesen Weg einzuschlagen, kann man die Beziehungen (4a) auch zum Stimmen bringen, indem man nicht den Beobachtungswert  $l_i$ , sondern irgend ein anderes Argument der Funktion  $F_i$  korrigiert. Wir wollen z. B. den Parameter  $p_i$  um  $\lambda_i$  korrigieren, so daß die Beziehungen bestehen

$$(12) \quad F_i(x, y, z, l_i, p_i + \lambda_i, q_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

(Fortsetzung folgt.)

## Frühjahrsversammlung der Sektion Zürich-Schaffhausen

Der Vorstand der Sektion Zürich-Schaffhausen des SVVK. hat seine Vereinsmitglieder und deren Angehörige zur ordentlichen Frühjahrstagung auf den letzten Aprilsonntag nach Zürich eingeladen. Da keine umfangreiche Geschäftsliste vorlag, bot sich Gelegenheit, die Geselligkeit zu pflegen, wozu die Anwesenheit der verehrten Damen sicherlich förderlich