

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

**Band:** 47 (1949)

**Heft:** 7

**Artikel:** Graphische Interpolationsausgleichung eines Doppelstreifens

**Autor:** Zarzycki, Jerzy

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-206574>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 18.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

SCHWEIZERISCHE ZEITSCHRIFT FÜR

# VERMESSUNG UND KULTURTECHNIK

Revue technique Suisse des Mensurations et du Génie rural

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik. Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft f. Photogrammetrie

Editeur: Société Suisse de Mensuration et du Génie rural. Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie

REDAKTION: Dr. h. c. C. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

Expedition, Administration und Inseratenannahme: BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR AG.

Schluß der Inseratenannahme am 6. jeden Monats

NR. 7 • XLVII. JAHRGANG

der „Schweizerischen Geometer-Zeitung“  
Erscheinend am 2. Dienstag jeden Monats

12. JULI 1949

INSERATE: 25 Rp. per einspalt. mm-Zelle.  
Bei Wiederholungen Rabatt gemäß spez. Tarif

ABONNEMENTE:

Schweiz Fr. 15.—, Ausland Fr. 20.— jährlich  
Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaft für  
Photogrammetrie Fr. 10.— jährlich

Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz.  
Vereins f. Vermessungswesen u. Kulturtechnik

## Graphische Interpolationsausgleichung eines Doppelstreifens

Von Dipl.-Ing. Jerzy Zarzycki, Photogrammetrisches Institut der ETH.

Die räumliche Lufttriangulation, die dank der erreichten Resultate immer mehr Beachtung findet und schon sehr oft mit bestem Erfolg verwendet worden ist, erfordert eine einfache, durchsichtige, rasche und zugleich genügend genaue Methode der Ausgleichung.

Die praktischen Resultate der Lufttriangulation zeigen, daß eine absolut strenge Ausgleichung, die sehr viel Zeit erfordern würde, i. a. nicht zweckmäßig ist.

Eine den praktischen Bedürfnissen entsprechende analytische Behandlung des Problems ist im „Beispiel für die Ausgleichung eines Doppelstreifens mit Statoskopangaben“ von Prof. Dr. M. Zeller und Dr. A. Brandenberger publiziert worden (siehe „Mitteilungen aus dem geodätischen Institut der ETH.“, Heft 4).

Durch meine Arbeiten am Photogrammetrischen Institut bin ich auf den Gedanken gekommen, eine graphische Interpolationsausgleichung anzuwenden, die eine sehr rasche und genaue Bestimmung der verschiedenen Verbesserungen erlaubt. Herr Prof. Dr. M. Zeller hatte die Freundlichkeit, mich dabei zu beraten und die vorliegende Arbeit durchzusehen, wofür ich ihm meinen besten Dank ausspreche.

Sind in einem Doppelstreifen drei Punktgruppen gegeben, so erkennt man, daß für die  $x$ -,  $y$ - und Höhenfehler je eine Fehlerfläche konstruiert werden kann, wobei angenommen wird, daß die Längsschnitte (parallel

zur  $x$ -Achse) dieser Fehlerflächen parabolische Form haben. Der grundsätzliche Unterschied zwischen der graphischen Methode und der analytischen Ausgleichung besteht nun darin, daß bei der ersten nicht die Deformation des ganzen Streifens aus genäherten Formeln berechnet wird, sondern daß die Fehler aus Quer- und Längsschnitten der entsprechenden Fehlerflächen interpoliert werden.

Sind die Höhenunterschiede im einzelnen Modell relativ klein, so kann der Einfluß der Höhenunterschiede auf die Fehler bzw. die Verbesserungen  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta H$  vernachlässigt werden. Letztere können wir dann als Funktion der Autographenkoordination betrachten und demnach schreiben:

$$\Delta x = f_x(x, y), \quad (1a)$$

$$\Delta y = f_y(x, y), \quad (1b)$$

$$\Delta H = f_H(x, y). \quad (1c)$$

Jede der drei Gleichungen (1) stellt eine Fehlerfläche dar, wobei die Verbesserungen  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  bzw.  $\Delta H$  in  $Z$ -Richtung des gewählten Koordinatensystems anzunehmen sind. Ein beliebiger Punkt  $P_i$  der Fläche (1a) hat also die Koordinaten  $x_i, y_i, \Delta x_i$ , ein solcher der Fläche (1b) die Koordinaten  $x_i, y_i, \Delta y_i$  und ein solcher der Fläche (1c) die Koordinaten  $x_i, y_i, \Delta H_i$ . Sobald die Funktionen  $f_x, f_y$  und  $f_H$  bekannt sind, kann man die einzelnen Verbesserungen eines beliebigen Punktes berechnen.

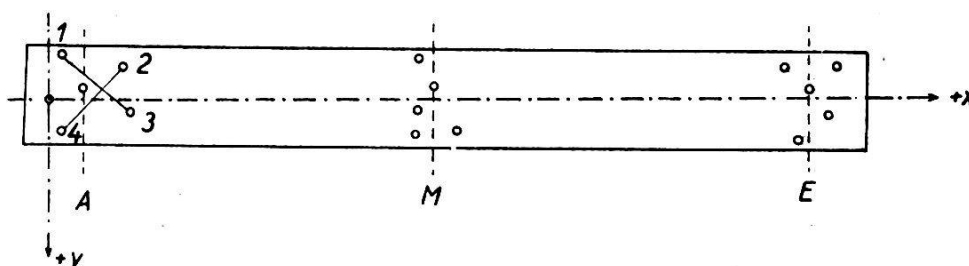


Fig. 1

In der Praxis verfügen wir über die gegebenen Punktgruppen am Anfang, in der Mitte und am Ende des Streifens, also können wir den Wert der Funktion (1) für diese Punktgruppen berechnen. Die Verbesserungen sind:

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x_{i \text{ soll}} - x_i, \\ \Delta y_i &= y_{i \text{ soll}} - y_i, \\ \Delta H_i &= H_{i \text{ soll}} - H_i. \end{aligned} \quad (2)$$

Wenn wir die ganze Ausgleichung in Autographenkoordinaten durchführen, so müssen wir, um die Sollwerte zu bekommen, die gegebenen Punkte ebenfalls in Maschinenkoordinaten umrechnen. Zu diesem Zwecke verwenden wir, wie üblich, die Azimute der Verbindungsgeraden in der ersten Punktgruppe, z. B. 1–3 und 2–4 (Fig. 1). Die bekannten Werte  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta H$  für die Punktgruppen am Anfang, in der Mitte und am Ende

des Streifens, d. h. die Werte der Funktion (1) in diesen Punktgruppen, gestatten uns, die drei Fehlerflächen zu konstruieren, also die Werte  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_i$ ,  $\Delta H_i$  eines beliebigen Punktes des Streifens zu bestimmen.

Die analytische Lösung dieser Aufgabe ist rechnerisch ziemlich mühsam und wiegt die Vorteile der Schnelligkeit der photogrammetrischen Methoden beinahe auf. Diese Aufgabe kann aber auch in einfacher Weise und rascher mit Hilfe von Quer- und Längsschnitten der Fehlerflächen gelöst werden. Dieses Verfahren hat dazu noch den Vorteil, daß auch der nicht lineare Verlauf der Fehler in den Querschnitten berücksichtigt wird.

Unter den gemachten Voraussetzungen der parabolischen Form der Längsschnitte der Fehlerflächen, gelten für diese die Formeln:

$$\Delta x_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 \quad \text{für die } x\text{-Fehlerfläche,} \quad (3a)$$

$$\Delta y_i = b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^2 \quad \text{für die } y\text{-Fehlerfläche,} \quad (3b)$$

$$\Delta H_i = c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2 \quad \text{für die } H\text{-Fehlerfläche.} \quad (3c)$$

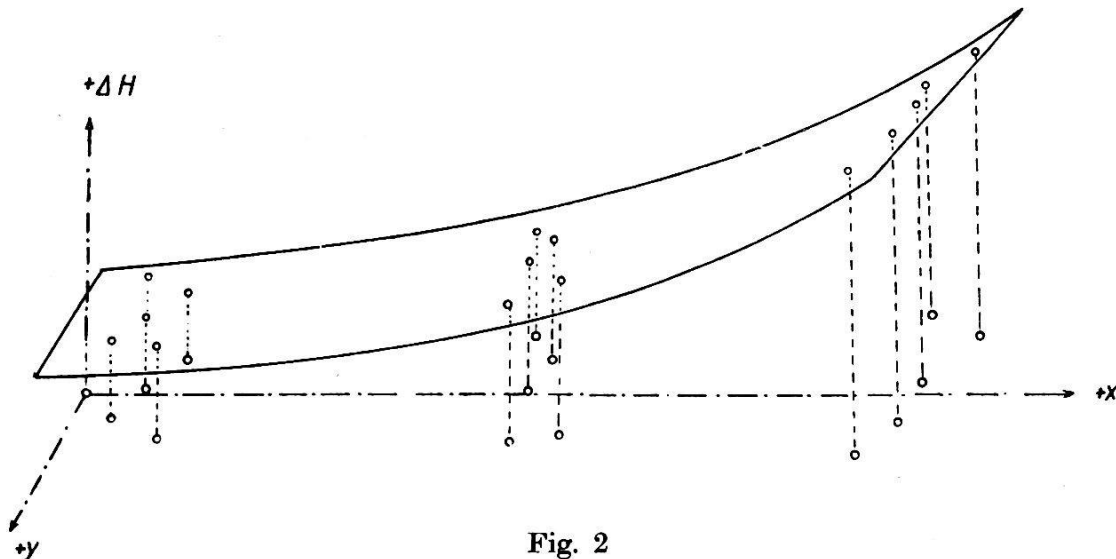


Fig. 2

Betrachten wir z. B. die  $H$ -Fehlerfläche (Fig. 2). Wir schneiden diese Fläche mit drei senkrechten Ebenen parallel zur  $yz$ -Ebene, d. h. senkrecht zur  $x$ -Achse, in Abständen  $x_A$ ,  $x_M$ ,  $x_E$ , wobei diese Abstände den Abszissen von Punkten entsprechen, die sich möglichst in der Mitte der Punktgruppe am Anfang bzw. in der Mitte und am Ende des Streifens befinden. Da die Verbesserungen  $\Delta H_i$  mit wachsendem  $x$  zunehmen, muß man, um einen Querschnitt zu zeichnen, die  $\Delta H_i$ -Werte am Anfang auf  $x_A$ , in der Mitte auf  $x_M$  und am Ende des Streifens auf  $x_E$  reduzieren. Hierfür genügt eine zu  $x$  lineare Reduktion. Haben wir diese Werte, so können wir die drei Querschnitte der Fehlerfläche zeichnen (Fig. 3).

Die einzelnen Punkte des Querschnittes verbinden wir durch gerade Linien. Theoretisch sollten diese Punkte durch eine Kurve verbunden werden; die aus der gradlinigen Verbindung resultierenden Restfehler sind aber erfahrungsgemäß so klein, daß eine genaue Konstruktion der Querschnitte nicht notwendig ist.

Der Maßstab für  $\Delta H$  ist so zu wählen, daß in den Querschnitten die gewünschte Genauigkeit (z. B. 0,1 m) bequem abgelesen werden kann. Der Maßstab für  $y$  richtet sich nach dem Auswertungsmaßstab und der Ausbiegung der Querschnitte. Die Anzahl und die Lage der Längsschnitte ist von der Anzahl der zur Ausgleichung verwendeten Festpunkte, von der Verteilung der Übergangspañpunkte und von der mehr oder weniger komplizierten Form der Querschnitte abhängig. Praktisch brauchen wir mindestens drei, jedoch nicht mehr als fünf Längsschnitte, die in entsprechend gewählten Abständen von der  $x$ -Achse zu konstruieren sind.

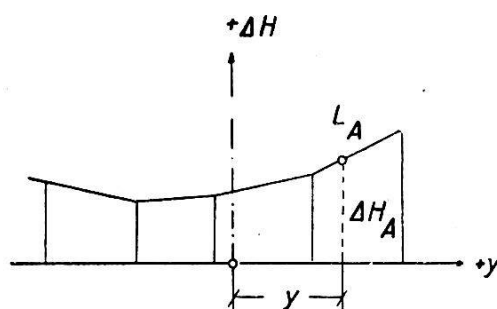


Fig. 3 a

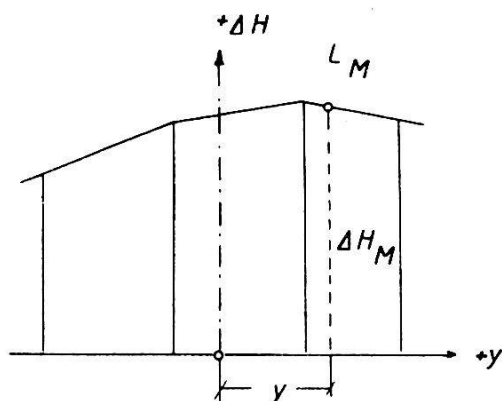


Fig. 3 b

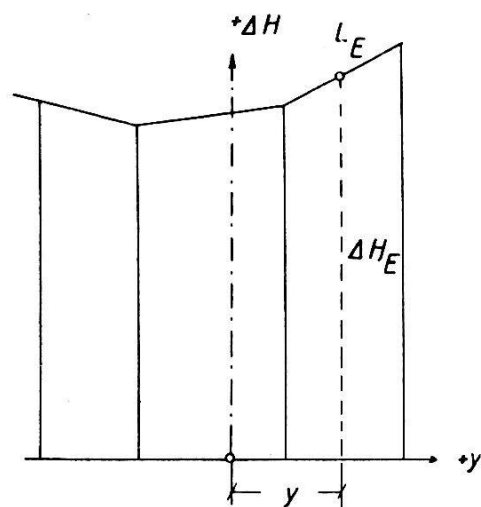


Fig. 3 c

Zur Konstruktion eines Längsschnittes (Fig. 4) lesen wir aus den drei Querschnitten die Verbesserungen  $\Delta H_A$ ,  $\Delta H_M$ ,  $\Delta H_E$  für das gewählte  $y$  ab, tragen diese Werte in  $x_A$ ,  $x_M$  und  $x_E$  auf und legen durch diese Ordinaten-Endpunkte  $L_A$ ,  $L_M$ ,  $L_E$  eine Parabel nach der Gleichung (3c). Setzen wir

$$x'_M = x_M - x_A \quad \text{und} \quad x'_E = x_E - x_A,$$

so erhalten wir aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta H_A &= c_0 \\ \Delta H_M &= c_0 + c_1 x'_M + c_2 x'^2_M \\ \Delta H_E &= c_0 + c_1 x'_E + c_2 x'^2_E \end{aligned} \quad (4)$$

die Koeffizienten  $c_0$ ,  $c_1$  und  $c_2$  nach den Formeln:

$$\begin{aligned} c_0 &= \Delta H_A \\ c_1 &= \frac{x'^2_E (\Delta H_M - c_0) - x'^2_M (\Delta H_E - c_0)}{x'_M \cdot x'_E (x'_E - x'_M)} \\ c_2 &= \frac{x'_M (\Delta H_E - c_0) - x'_E (\Delta H_M - c_0)}{x'_M \cdot x'_E (x'_E - x'_M)}. \end{aligned} \quad (5)$$

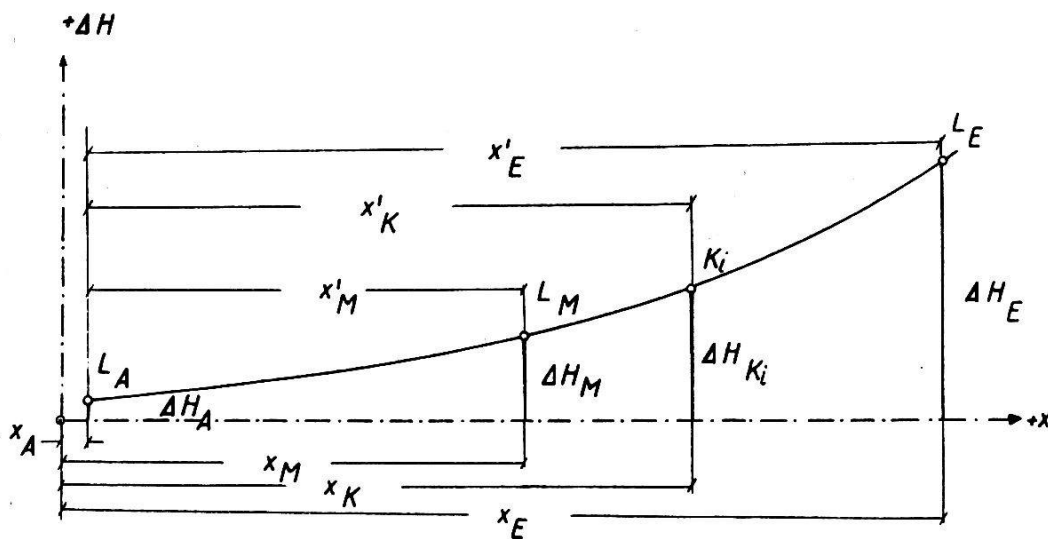


Fig. 4

Um die Parabel möglichst genau zeichnen zu können, müssen wir auch die einzelnen Zwischenpunkte  $K_i$  berechnen. Dazu benützen wir die Formel:

$$\Delta H_i = c_0 + c_1 x'_i + c_2 x'^2_i. \quad (6)$$

Die Berechnung (6) erfolgt mit dem Rechenschieber. In gleicher Weise zeichnen wir die übrigen Längsschnitte der  $H$ -Fehlerfläche und diejenigen für die  $x$ - und  $y$ -Fehlerflächen.

Der zu wählende Maßstab für  $x$  ergibt sich aus der Streifenlänge im Maschinenmaßstab. Ist diese z. B. 7000 mm, so wählt man für  $x$  zweckmäßig den Maßstab 1:10. Dabei ist es vom praktischen Standpunkt aus gesehen bequemer, wenn für alle Längsschnitte derselbe Maßstab gewählt wird.

Mittels der Quer- und Längsschnitte der Fehlerfläche erhält man in einfacher Weise die Verbesserung  $\Delta H_i$  für einen beliebigen Punkt  $P_i$  des Streifens. Der Punkt  $P_i$  habe die Koordinaten  $x_i$ ,  $y_i$ . Wählen wir zwei Längsschnitte, die in den Abständen  $y_1$  und  $y_2$  von der  $x$ -Achse konstruiert worden sind, und zwar so, daß  $y_1 < y_i < y_2$ , dann befindet sich  $P_i$  zwischen den beiden Längsschnitten. Zeichnet man nun den Querschnitt in der Entfernung  $x_i$  zwischen den zwei gewählten Längsschnitt-

ten, so kann die Ordinate  $\Delta H_i$  im Abstand  $y_i$  ohne weiteres abgelesen oder einfach interpoliert werden (Fig. 5). In gleicher Weise erhalten wir die entsprechenden Verbesserungen  $\Delta x_i$  und  $\Delta y_i$ .

Da die Parabeln für die verschiedenen Längsschnitte einer Fehlerfläche im allgemeinen nur wenig voneinander abweichen, ist es unbequem, alle Parabeln für eine Fehlerfläche in derselben Zeichnung darzustellen; es ist zweckmäßiger, die Längsschnitte für ein bestimmtes  $y$  für alle drei Fehlerflächen in einer Zeichnung zur Darstellung zu bringen. Man kann dann gleichzeitig die drei Verbesserungen  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  und  $\Delta H$  in den betreffenden Längsschnitten ablesen.

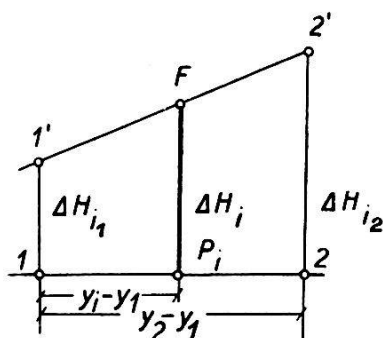


Fig. 5

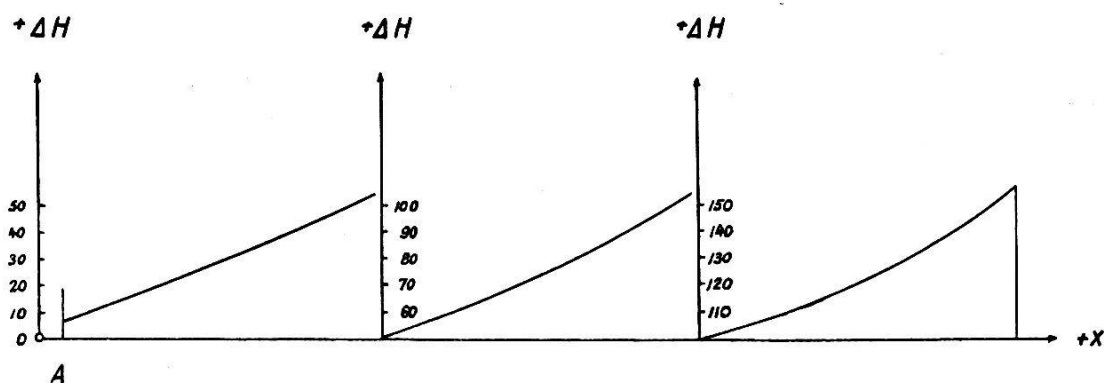


Fig. 6

Die Verbesserungen  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  und  $\Delta H$  sind i. a. am Ende des Streifens ziemlich groß und die Darstellung der Längsschnitte würde bei zweckmäßig gewähltem Maßstab zu umfangreich. Um die Parabeln auf einem schmalen Papierstreifen zeichnen zu können, teilen wir sie auf, wie dies in Fig. 6 dargestellt ist. Auf diese Weise erhalten wir eine „Treppenparabel“, wobei für die verschiedenen  $x$ -Abschnitte einfach die Skala für die Verbesserungen  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  bzw.  $\Delta H$  verschoben ist.

Nach dieser Methode hat der Verfasser die Ausgleichung für den 100 km langen Streifen „Payerne-Schönenwerd“ durchgeführt. (Weitwinkel-Filmkammer Wild, Flughöhe 4600 m über Grund, 70 % Überdeckung, unabhängige Bildpaare mit Stoskopangaben, ausgewertet am Wild-Autographen A 5). Der mittlere Höhenfehler  $m_H$  ergab sich dabei zu  $\pm 6,8$  m, der mittlere  $X$ -Fehler zu  $\pm 4,6$  m und der mittlere

Y-Fehler zu  $\pm 4,4$  m, gegenüber  $m_H = \pm 7,3$  m,  $m_X = \pm 7,6$  m und  $m_Y = \pm 4,7$  m der analytischen Ausgleichung.

Die graphische Interpolationsausgleichung ergibt also kleinere mittlere Fehler als die analytische. Dies rührt davon her, daß bei ersteren die Querwölbung der Fehlerflächen berücksichtigt wird, während bei der analytischen Ausgleichung die Fehler in Querrichtung als linear verlaufend angenommen werden.

In gleicher Weise wurde von Dipl.-Ing. *Schucany* der 100 km lange Streifen „Payerne-Aarau“ graphisch ausgeglichen. (Weitwinkel-Filmkammer Wild, Flughöhe 4600 m über Grund, 60 % Überdeckung, Folgebildanschluß mit Statoskopangaben, ausgewertet am Wild-Autographen A 5).

Die Ausgleichung ergab die mittleren Fehler

in Streifenkoordinaten:

$$m_x = \pm 8,4 \text{ m,}$$

$$m_y = \pm 8,9 \text{ m,}$$

$$m_H = \pm 5,1 \text{ m.}$$

in Landeskoordinaten:

$$m_X = \pm 10,9 \text{ m,}$$

$$m_Y = \pm 5,6 \text{ m,}$$

Für die Ausgleichung kann man auch die Fehlerwerte in Landeskoordinaten ( $\Delta X$  und  $\Delta Y$ ) verwenden. Die abgelesenen  $x_i$  und  $y_i$  werden in Landeskoordinaten ( $X_i$ ,  $Y_i$ ) umgerechnet und die Verbesserungen

$$\Delta X = X_{i \text{ soll}} - X_i, \quad \Delta Y = Y_{i \text{ soll}} - Y_i \quad (2a)$$

gebildet.

Setzt man in den Transformationsformeln

$$\Delta X = \Delta x \cdot \cos \delta - \Delta y \cdot \sin \delta$$

$$\Delta Y = \Delta x \cdot \sin \delta + \Delta y \cdot \cos \delta$$

die Werte von  $\Delta x$  und  $\Delta y$  ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \Delta X &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \cos \delta - (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) \sin \delta \\ &= A_0 + A_1 x + A_2 x^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta Y &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \sin \delta + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) \cos \delta \\ &= B_0 + B_1 x + B_2 x^2, \end{aligned}$$

d. h. dieselbe parabolische Form wie für  $\Delta x$  und  $\Delta y$ , mit entsprechend geänderten Koeffizienten. Diese ergeben sich aus den Formeln

$$\begin{aligned} A_0 &= \Delta X_A, \\ A_1 &= \frac{x'^2_E (\Delta X_M - A_0) - x'^2_M (\Delta X_E - A_0)}{x'_E \cdot x'_M (x'_E - x'_M)}, \\ A_2 &= \frac{x'_M (\Delta X_E - A_0) - x'_E (\Delta X_M - A_0)}{x'_E \cdot x'_M (x'_E - x'_M)}, \end{aligned} \quad (5a)$$

und den entsprechenden Formeln für die Koeffizienten  $B$ .



Es ist daher zweckmäßiger, für die Konstruktion der Parabeln und der Querschnitte an Stelle der  $\Delta x$  und  $\Delta y$  die Fehler  $\Delta X$  und  $\Delta Y$  in Landeskoordinaten zu benützen, wobei für die Abszissen die Maschinenkoordinaten  $x$  bzw.  $y$  zu verwenden sind. Im übrigen ist das Verfahren dasselbe wie bei der graphischen Ausgleichung in Maschinenkoordinaten.

Der Vorteil dieses Verfahrens besteht darin, daß die Umrechnung der gegebenen Punkte in Maschinenkoordinaten wegfällt und daß die Verbesserungen  $\Delta X$  und  $\Delta Y$  eines beliebigen Punktes des Streifens direkt in Landeskoordinaten abgelesen werden. Der Verfasser hat den vorstehend angegebenen Streifen „Payerne-Schönenwerd“ zur Kontrolle auch nach dieser Methode in Landeskoordinaten ausgeglichen, wobei sich dieselben mittleren Fehler für  $X$  und  $Y$  ergeben haben.

## **Joabs Schacht und Hiskias Tunnel**

### **Dreitausend Jahre Bauingenieur-Geodäsie**

*von Prof. Dr. Ing. A. Berroth*

Wir modernen Menschen sind geneigt, im strahlenden Lichte der neuzeitlichen Technik auf die Leistungen des grauen Altertums herabzusehen. 3000 Jahre menschlichen Daseins sind eine so lange Zeit, daß sich niemand davon eine klare Vorstellung machen kann. Die Menschen sind gegangen, einige Werke sind geblieben.

Wenn wir heute Ingenieurbauten aus einer so langen Vergangenheit betreten, so ist der erste Eindruck ein Gefühl der Verehrung für die Geschichte, und daran wird auch die Vorstellung nichts ändern können, daß es sich nach heutigen Begriffen um primitive Konstruktionen handelt. Wenn wir Meißelspuren im Gestein, Stufen im Fels, die Linienführung betrachten, so drängt sich dem Techniker die Frage auf, was war hier der leitende Gedanke, warum ist das so und nicht anders gemacht, welches waren die Hilfsmittel.

Diese Fragen an einem der wohl ältesten Beispiele der Geschichte, *aus dem Zeitalter Homers*, zu betrachten, bietet einen eigenen Reiz, zumal bisher fast immer nur der Historiker und der Archäologe zu Wort gekommen sind.

Die hier behandelten Bauwerke bestehen heute noch, fast noch im gleichen Zustand wie vor 3000 Jahren, weil der schützende Fels sie behütete. Aus der Sprache der Bearbeitungsspuren, aus einer wohlerhaltenen Inschrift, aus der Form des Geländes können wir zwingende Schlüsse über die waltenden Gedanken ziehen, und das große Geschichtswerk der Bibel gibt dazu die allgemein menschliche Illustration. Dabei zeigt sich auch hier, daß den sich darauf beziehenden Stellen der Bibel ein nicht abzustreitender Wahrheitsgehalt zukommt, und den Beweis liefern die Dokumente in Stein.