

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 48 (1950)

Heft: 2

Artikel: Wert des Potentials an der Oberfläche des internationalen Ellipsoides

Autor: Baeschlin, C.F.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-207430>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SCHWEIZERISCHE ZEITSCHRIFT FÜR

VERMESSUNG UND KULTURTECHNIK

Revue technique Suisse des Mensurations et du Génie rural

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik. Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft f. Photogrammetrie

Editeur: Société Suisse de Mensuration et du Génie rural. Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie

REDAKTION: Dr. h. c. C. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich).

Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

Expedition, Administration und Inseratenannahme: BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR AG.

Schluß der Inseratenannahme am 6. jeden Monats

NR. 2 • XLVIII. JAHRGANG
der „Schweizerischen Geometer-Zeitung“
Erscheinend am 2. Dienstag jeden Monats
14. FEBRUAR 1950
INSERATE: 25 Rp. per einspalt. mm-Zeile.
Bei Wiederholungen Rabatt gemäß spez. Tarif

ABONNEMENTE:
Schweiz Fr. 15.—, Ausland Fr. 20.— jährlich
Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaft für
Photogrammetrie Fr. 10.— jährlich
Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz.
Vereins f. Vermessungswesen u. Kulturtechnik

Wert des Potentials an der Oberfläche des Internationalen Ellipsoides

Von C. F. Baeschlin, Zollikon

Wir gehen aus von der Formel (77.10) von Baeschlin, Lehrbuch der Geodäsie, Zürich 1948, S. 518.

$$W_s = A V_0 + B V_1 + \frac{\omega^2}{2} p^2 \quad (1)$$

mit

$$A = \frac{2}{3} f \pi a^2 b \vartheta_m - \frac{1}{3} \frac{\omega^2 b^3 (1 + e'^2)}{1 - (3 + e'^2) \Psi(e')} \quad (2)$$

$$B = + \frac{\omega^2}{2} b^3 \frac{1 + e'^2}{1 - (3 + e'^2) \Psi(e')} \quad (3)$$

Dabei ist nach den Formeln (77.5), a. a. O. S. 515, wenn man $\lambda = a$ setzt:

$$V_0 = \frac{4}{3} A_0 \quad (4)$$

$$V_1 = \frac{4}{3} [A_0 - A_1 (x^2 + y^2) - A_3 z^2] \quad (5)$$

Nach (77.7) S. 516 ist

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{3}{2b} [1 - e'^2 \Psi(e')] \\ A_1 &= \frac{3}{4b^3} \left[\frac{1}{1 + e'^2} - \Psi(e') \right] \\ A_3 &= \frac{3}{2b^3} \Psi(e') \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

wo nach Seite 515

$$\Psi(e') = \frac{1}{e'^3} (e' - \operatorname{arc} \operatorname{tg} e') \quad (7)$$

oder nach der Reihenentwicklung von $\operatorname{arc} \operatorname{tg} e'$

$$\Psi(e') = \frac{1}{3} - \frac{e'^2}{5} + \frac{e'^4}{7} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3} e'^{2n} \quad (7a)$$

wo n die Nummer des Gliedes der Reihe bedeutet.

Da nach (5)

$$V_1 = V_0 - \frac{4}{3} A_1 (x^2 + y^2) - \frac{4}{3} A_3 z^2$$

erhalten wir für W_s nach (1)

$$W_s = (A + B) V_0 - \frac{4}{3} B A_1 (x^2 + y^2) - \frac{4}{3} B A_3 z^2 + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) \quad (8)$$

Da

$$\frac{4}{3} \pi a^2 b \vartheta_m = M$$

wo M die Masse des Erdellipsoides ist, wird

$$\frac{2}{3} f \pi a^2 b \vartheta_m = \frac{Mf}{2}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{Mf}{2} + \frac{\omega^2 b^3 (1 + e'^2)}{1 - (3 + e'^2) \Psi(e')} \left(+ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{Mf}{2} + \frac{1}{6} \frac{\omega^2 b^3 (1 + e'^2)}{1 - (3 + e'^2) \Psi(e')} \end{aligned}$$

und daraus

$$(A + B) V_0 = \frac{2}{b} \left[\frac{Mf}{2} + \frac{1}{6} \frac{\omega^2 a^2 b}{1 - (3 + e'^2) \Psi_{(e')}} \right] [1 - e'^2 \Psi_{(e')}]$$

wenn wir beachten, daß $b^2 (1 + e'^2) = a^2$.

Damit wird

$$(A + B) V_0 = \frac{Mf}{b} [1 - e'^2 \Psi_{(e')}] + \frac{1}{3} \frac{\omega^2 a^2}{1 - (3 + e'^2) \Psi_{(e')}} [1 - e'^2 \Psi_{(e')}] \quad (9)$$

Wir setzen in (8) $z = b$; $x = y = 0$ und erhalten

$$W_s = (A + B) V_0 - \frac{4}{3} b^2 BA_3 \quad (10)$$

Nach (3) und (6₃) wird

$$BA_3 = \frac{3}{4} \omega^2 \frac{(1 + e'^2) \Psi_{(e')}}{1 - (3 + e'^2) \Psi_{(e')}} \quad (11)$$

Mit (9) und (11) finden wir

$$W_s = \frac{Mf}{b} [1 - e'^2 \Psi_{(e')}] + \frac{1}{3} \frac{\omega^2 a^2}{1 - (3 + e'^2) \Psi_{(e')}} [1 - e'^2 \Psi_{(e')}]$$

$$- \frac{\omega^2 a^2 \Psi_{(e')}}{1 - (3 + e'^2) \Psi_{(e')}}$$

oder unter Zusammenfassung der Glieder mit $\omega^2 a^2$

$$W_s = \frac{Mf}{b} [1 - e'^2 \Psi_{(e')}] + \frac{\omega^2 a^2}{1 - (3 + e'^2) \Psi_{(e')}} \left[\frac{1}{3} - \frac{e'^2}{3} \Psi_{(e')} - \Psi_{(e')} \right]$$

Die eckige Klammer des zweiten Gliedes der rechten Seite wird gleich

$$+ \frac{1}{3} [1 - e'^2 \Psi_{(e')} - 3 \Psi_{(e')}] = \frac{1}{3} [1 - (3 + e'^2) \Psi_{(e')}]$$

damit erhalten wir

$$W_s = \frac{Mf}{b} (1 - e'^2 \Psi_{(e')}) + \frac{\omega^2 a^2}{3} \quad (12)$$

Natürlich erhalten wir dasselbe Resultat, wenn wir in (8) $x = y = a$; $z = 0$ setzen, wovon man sich leicht überzeugt.

Nun gehen wir dazu über, die Schwerkraft an der Oberfläche des

Ellipsoides auszudrücken. Wir gehen aus von der zweiten Formel für g auf S. 519 a. a. O.

$$g = \frac{2A}{a^2 b h(a)} + \frac{8}{3} BA_3 b^2 h(a)$$

Dabei ist

$$h(a) = \frac{\sqrt{1+e'^2}}{a V}; \quad \frac{1}{h(a)} = \frac{a V}{\sqrt{1+e'^2}} = b V$$

mit

$$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}$$

Damit erhalten wir

$$g = \frac{2A}{a^2} V + \frac{8}{3} \frac{b}{V} BA_3 \quad (13)$$

Setzen wir die Werte für A nach (2) und für BA_3 nach (11) ein, so folgt

$$\begin{aligned} g &= \frac{Mf}{a^2} V + \frac{8}{3} \frac{b}{V} \frac{3}{4} \omega^2 \frac{(1+e'^2) \Psi(e')}{1-(3+e'^2) \Psi(e')} \\ &\quad - \frac{2}{3} \frac{\omega^2 b V}{1-(3+e'^2) \Psi(e')} \\ &= \frac{Mf}{a^2} V + 2 \frac{b}{V} \omega^2 \frac{(1+e'^2) \Psi(e')}{1-(3+e'^2) \Psi(e')} - \frac{2}{3} \frac{\omega^2 b V}{1-(3+e'^2) \Psi(e')} \end{aligned}$$

Setzen wir $\varphi = 0$, so wird $V = \sqrt{1+e'^2}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned} g_a &= \frac{Mf}{a^2} \sqrt{1+e'^2} + 2 \frac{b(1+e'^2)}{\sqrt{1+e'^2}} \frac{\omega^2 \Psi(e')}{1-(3+e'^2) \Psi(e')} \\ &\quad - \frac{2}{3} \frac{\omega^2 b \sqrt{1+e'^2}}{1-(3+e'^2) \Psi(e')} \\ &= \frac{Mf}{a b} + \frac{2 a \omega^2 \Psi(e')}{1-(3+e'^2) \Psi(e')} - \frac{2}{3} \frac{\omega^2 a}{1-(3+e'^2) \Psi(e')} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$ag_a = \frac{Mf}{b} - \frac{2a^2\omega^2}{1 - (3 + e'^2)\Psi(e')} \left[\frac{1}{3} - \Psi(e') \right]$$

Beachten wir (7a), so finden wir

$$ag_a = \frac{Mf}{b} - \frac{2a^2\omega^2}{1 - (3 + e'^2)\Psi(e')} \left[+ \frac{e'^2}{5} - \frac{e'^4}{7} + \frac{e'^6}{9} - \frac{e'^8}{11} + \frac{e'^{10}}{13} \right]$$

und durch Ausklammern von $\frac{e'^2}{5}$

$$ag_a = \frac{Mf}{b} - \frac{2a^2\omega^2 e'^2}{5 [1 - (3 + e'^2)\Psi(e')]} \left[1 - \frac{5}{7} e'^2 + \frac{5}{9} e'^4 - \frac{5}{11} e'^6 + \right. \\ \left. + \frac{5}{13} e'^8 - \frac{1}{3} e'^{10} \right]$$

Damit wird

$$\frac{Mf}{b} = ag_a + \frac{2a^2\omega^2 e'^2}{5 [1 - (3 + e'^2)\Psi(e')]} \left[1 - \frac{5}{7} e'^2 + \right. \\ \left. + \frac{5}{9} e'^4 - \frac{5}{11} e'^6 + \frac{5}{13} e'^8 - \frac{e'^{10}}{3} \right]$$

Setzen wir diesen Ausdruck für $\frac{Mf}{b}$ in (12) ein, so finden wir

$$W_s = ag_a [1 - e'^2 \psi(e')] + \frac{\omega^2 a^2}{3} \\ + \frac{2\omega^2 a^2 e'^2 [1 - e'^2 \Psi(e')]}{5 [1 - (3 + e'^2)\Psi(e')]} \left[1 - \frac{5}{7} e'^2 + \frac{5}{9} e'^4 - \dots \right] \quad (13)$$

Mit Hilfe von (7a) bilden wir die Reihenentwicklung für

$$1 - (3 + e'^2) \Psi(e') \quad \text{und finden}$$

$$1 - (3 + e'^2) \Psi(e') = \frac{4}{15} e'^2 \left[1 - \frac{6}{7} e'^2 + \frac{5}{7} e'^4 - \right. \\ \left. - \frac{20}{33} e'^6 + \frac{75}{143} e'^8 - \frac{6}{13} e'^{10} \right] \quad (14)$$

Setzen wir das in (13) ein, so erhalten wir

$$W_s = ag_a [1 - e'^2 \Psi(e')] + \frac{\omega^2 a^2}{3} + \frac{3}{2} \frac{\omega^2 a^2 \left[1 - \frac{5}{7} e'^2 + \frac{5}{9} e'^4 - \frac{5}{11} e'^6 + \frac{5}{13} e'^8 - \frac{1}{3} e'^{10} \right] [1 - e'^2 \Psi(e')]}{1 - \frac{6}{7} e'^2 + \frac{5}{7} e'^4 - \frac{20}{33} e'^6 + \frac{75}{143} e'^8 - \frac{6}{13} e'^{10}}$$

Den Nenner des letzten Gliedes schreiben wir

$$1 - \left[\frac{6}{7} e'^2 - \frac{5}{7} e'^4 + \frac{20}{33} e'^6 - \frac{75}{143} e'^8 + \frac{6}{13} e'^{10} \right] = 1 - x$$

Da $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$

können wir den Nenner als Faktor in den Zähler hinaufbringen. Wir erhalten

$$\frac{1}{1 - (3 + e'^2) \Psi(e')} = \frac{15}{4 e'^2} \left[1 + \frac{6}{7} e'^2 + \frac{1}{49} e'^4 + \frac{128}{11\,319} e'^6 - \frac{3392}{343\,343} e'^8 + \frac{56\,320}{7\,210\,203} e'^{10} \right] \quad (15)$$

Vorher multiplizieren wir noch die beiden Reihen im Zähler, indem wir in $1 - e'^2 \Psi(e')$ die Reihe (7a) einsetzen. Wir erhalten

$$[1 - e'^2 \Psi(e')] \left[1 - \frac{5}{7} e'^2 + \frac{5}{9} e'^4 - \dots \right] = 1 - \frac{22}{21} e'^2 + \frac{313}{315} e'^4 - \frac{1924}{2079} e'^6 + \frac{54\,259}{63\,063} e'^8 - \frac{7226}{9009} e'^{10} + \dots \quad (16)$$

Die Multiplikation der beiden Reihen von (15) und (16) ergibt

$$1 - \frac{4}{21} e'^2 + \frac{256}{2205} e'^4 - \frac{42\,692}{509\,255} e'^6 + \frac{3\,045\,624}{46\,351\,305} e'^8 - \frac{650\,068}{12\,017\,005} e'^{10} + \dots \quad (17)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 W_s = ag_a & \left(1 - \frac{1}{3} e'^2 + \frac{1}{5} e'^4 - \frac{1}{7} e'^6 + \frac{1}{9} e'^8 - \frac{1}{11} e'^{10} + \frac{1}{13} e'^{12} \right) \\
 & + \frac{3}{2} a^2 \omega^2 \left[1 - \frac{4}{21} e'^2 + \frac{256}{2205} e'^4 - \frac{42\,692}{509\,255} e'^6 \right. \\
 & \left. + \frac{3\,045\,624}{46\,351\,305} e'^8 - \frac{650\,068}{12\,017\,005} e'^{10} \right] + \frac{a^2 \omega^2}{3}
 \end{aligned}$$

Fassen wir die Hauptglieder mit $a^2 \omega^2$ zusammen und schreiben die Formel in für die numerische Rechnung geeigneter Form, so finden wir das Schlußresultat

$$\begin{aligned}
 W_s = ag_a & \left. \begin{aligned} & + \frac{11}{6} a^2 \omega^2 - \frac{e'^2}{3} ag_a \\ & - \frac{2}{7} e'^2 a^2 \omega^2 + \frac{e'^4}{5} ag_a \\ & + \frac{128}{735} e'^4 a^2 \omega^2 - \frac{e'^6}{7} ag_a \\ & - \frac{64\,038}{509\,255} e'^6 a^2 \omega^2 + \frac{e'^8}{9} ag_a \\ & + \frac{1\,522\,812}{15\,450\,435} e'^8 a^2 \omega^2 - \frac{e'^{10}}{11} ag_a \\ & - \frac{975\,102}{12\,017\,003} e'^{10} a^2 \omega^2 + \frac{e'^{12}}{13} ag_a \end{aligned} \right\} \quad (18)
 \end{aligned}$$

Wir verwenden nun diese Formel zur Berechnung der Kräftefunktion W_s an dem als Niveaufläche aufgefaßten Internationalen Ellipsoid, indem wir g_a aus der Internationalen Schwereformel entnehmen. Es ist

$$a = 637\,838\,800 \text{ cm}$$

$$\log a = 8.8047\,1093\,4024\,8020\,3272$$

$$\alpha = \frac{1}{297}$$

$$\begin{aligned} e'^2 &= 0.006\,768\,170\,197\,224\,251\,27 \\ \log e'^2 &= 7.8304\,7127\,1246\,3854\,4150 - 10 \\ g_a &= 978.0490\,\text{cm sec}^{-2} \\ \log g_a &= 2.990\,3606\,134 \\ \omega &= 0.000\,072\,921\,151\,466\,700\,400\,43 \\ \log \omega &= 5.862\,8535\,178 - 10 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$W_s = 626\,397\,870\,099\,\text{cm}^2\,\text{sec}^{-2}.$$

Die beiden letzten Glieder von (18) tragen nicht mehr zum Resultat bei; sie sind -0.0025 und $+0.0046$, zusammen also $+0.0021$.

Die drei ersten Glieder wurden mit der Rechenmaschine, alle folgenden mit Hilfe von Logarithmen von geeigneter Stellenzahl bestimmt. Selbstverständlich ist die verwendete Genauigkeit von $1\,\text{cm}^2\,\text{sec}^{-2}$ nur eine rechenmäßige. Nachdem aber die Daten des Internationalen Ellipsoides durch a und α , die Internationale Schwereformel durch g_a definitionsmäßig festgelegt sind, während ω , die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation außerordentlich genau feststeht, durfte die Aufgabe, die Kräftefunktion W_s am Internationalen Ellipsoid rechnerisch festzulegen, wohl unternommen werden.

Zollikon, Ende Oktober 1949.

F. Baeschlin.

Der Präzisions-Theodolit Wild T 3 mit photographischer Registrierung

Von H. Kasper, Heerbrugg

Es ist wohl unbestritten; daß von allen Theodoliten für höhere Genauigkeitsansprüche der Präzisions-Theodolit Wild T 3 die größte Verbreitung gefunden hat und sich dank seiner genialen Bauart seit mehr als 20 Jahren in der ganzen Welt konkurrenzlos behaupten kann. Nur wenige geodätische Instrumente, die in den letzten Jahrzehnten entwickelt wurden, haben sich als so langlebig erwiesen wie der Wild T 3. Die Wild'schen Baugrundsätze, – Verwendung von verdeckten Glaskreisen mit Koinzidenzablesung, Kreisablesung neben dem Fernrohrkular, zylindrische Achsen und eine leichte, aber stabile Bauart, – haben sich ausgezeichnet bewährt und rasch durchgesetzt.