

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 49 (1951)

Heft: 1

Artikel: Das Prinzip der Isostasie und seine Verwendung in der Geodäsie [Fortsetzung]

Autor: Baeschlin, C.F.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-208326>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SCHWEIZERISCHE ZEITSCHRIFT FÜR

VERMESSUNG UND KULTURTECHNIK

Revue technique Suisse des Mensurations et du Génie rural

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik. Offiz. Organ der Schweiz. Gesellschaft f. Photogrammetrie

Editeur: Société Suisse de Mensuration et du Génie rural. Organe officiel de la Société Suisse de Photogrammétrie

REDAKTION: Dr. h. c. C. F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats

Expedition, Administration und Inseratenannahme: BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR AG.

Schluß der Inseratenannahme am 6. jeden Monats

NR. 1 • II. JAHRGANG der „Schweizerischen Geometer-Zeitung“ Erscheinend am 2. Dienstag jeden Monats 9. JANUAR 1951 INSERATE: 25 Rp. per einspalt. mm-Zelle. Bei Wiederholungen Rabatt gemäß spez. Tarif	ABONNEMENTE: Schweiz Fr. 15.—, Ausland Fr. 20.— jährlich Für Mitglieder der Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie Fr. 10.— jährlich Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz. Vereins f. Vermessungswesen u. Kulturtechnik
---	--

Das Prinzip der Isostasie und seine Verwendung in der Geodäsie

Von C. F. Baeschlin, Zollikon

(Fortsetzung)

Setzen wir diese Werte in die Beziehung (26) ein, so erhalten wir

$$\frac{M_T}{FR_T, \Omega} + \frac{M_k \left(1 + \frac{2l}{R_T}\right)}{FR_T, \Omega} = 0$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit dem von Null verschiedenen FR_T, Ω , so erhalten wir

$$M_T + M_k \left(1 + \frac{2l}{R_T}\right) = 0 \quad (30)$$

oder

$$M_T + M_k = -M_k \frac{2l}{R_T}$$

Es ist aber nach (30)

$$M_k = -M_T \left(1 - \frac{2l}{R_T}\right)$$

Damit wird

$$M_T + M_k = + M_T \frac{2l}{R_T} \left(1 - \frac{2l}{R_T}\right)$$

Da wir aber Glieder zweiter Ordnung vernachlässigen, wird dies

$$M_T + M_k = + M_T \frac{2l}{R_T}$$

Es ist

$$R_T = R_0 + \frac{D_T}{2} = R_0 \left(1 + \frac{D_T}{2 R_0}\right)$$

Man sieht daher ohne weiteres, daß R_T durch R_0 ersetzt werden darf, ohne daß Glieder erster Ordnung betroffen werden. Daher schreiben wir endgültig

$$M_T + M_k = + M_T \frac{2l}{R_0} = + \vartheta_T D_T \frac{2l}{R_0} \quad (31)$$

M_k ist also dem Absolutwerte nach kleiner als M_T . Die Formel (31) stellt die Massendifferenz für das vereinfachte Prinzip des hydrostatischen Gleichgewichtes dar.

Um die Massendifferenz für das Prinzip des strengen hydrostatischen Gleichgewichtes zu erhalten, das durch die Beziehung (25 a)

$$g_T D_T \vartheta_T + g_k D_k \vartheta_K = 0$$

definiert wird, müssen wir die Beziehung zwischen g_T und g_k bestimmen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir eine unendlich ausgedehnte ebene Scheibe von der Dichte Θ . Es sei P_1 ein Aufpunkt im Innern dieser Scheibe um c_1 unterhalb der Deckfläche gelegen, wobei c_1 im Verhältnis zur Dicke b der Scheibe klein sein soll. Die Anziehung u_1 eines Zylinders von der Dicke b und dem Radius a auf den Aufpunkt P_1 , der, wie schon erwähnt, um c_1 unter der Deckfläche liegt, ist bekanntlich

$$u_1 = 2\pi f \Theta \left[b - 2c_1 + \sqrt{a^2 + c_1^2} - \sqrt{a^2 + (b - c_1)^2} \right]$$

(Siehe z. B. Baeschlin, Lehrbuch der Geodäsie, § 75, Formel (75.7), Seite 476, aber auch irgendein Buch über Potentialtheorie.)

Damit wird

$$\frac{\partial u_1}{\partial c_1} = -4\pi f \Theta \left[1 - \frac{c_1}{2\sqrt{a^2 + c_1^2}} - \frac{b - c_1}{\sqrt{a^2 + (b - c_1)^2}} \right]$$

Dies wird für $a \rightarrow \infty$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial u_1}{\partial c_1} \right) = -4\pi f \Theta.$$

Ersetzen wir die Differentiale durch kleine endliche Größen, so wird

$$\Delta u_1 = - 4 \pi f \Theta l \quad (32)$$

wenn l eine kleine Verschiebung nach unten bedeutet.

Zu dieser Änderung infolge der Anziehung der Platte tritt noch die Änderung infolge Annäherung an den Erdschwerpunkt hinzu. Diese Änderung ist bekanntlich für einen Aufpunkt an der Oberfläche einer Kugel vom Radius R und der homogenen Dichte Θ_m

$$d u_1 = - 2 f \frac{4}{3} \pi \Theta_m d r_1.$$

Da in unserem Falle die Verschiebung l gegen den Kugelmittelpunkt zu vorausgesetzt worden ist, wird

$$\Delta u_a = + 2 \pi \frac{4}{3} \pi \Theta_m l \quad (33)$$

Die Anziehung G auf einen Aufpunkt an der Oberfläche unserer Kugel ist, wie leicht zu erkennen ist,

$$G = \frac{4}{3} \pi f \Theta_m R \quad (34)$$

Also ist

$$\frac{4}{3} \pi f \Theta_m = \frac{G}{R}$$

Damit wird

$$\Delta u_a = 2 \frac{G}{R} l \quad (33a)$$

Die Gesamtänderung der Schwerkraft beim Übergang des Aufpunktes vom Schwerpunkt der Topographie zum Schwerpunkt der Compensation, welche Verschiebung wir früher mit l bezeichnet haben, wird, wenn wir noch beachten, daß aus (34) folgt

$$4 \pi f = \frac{3 G}{R \Theta_m}$$

$$g_k - g_T = G \frac{2 l}{R} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\Theta}{\Theta_m} \right) \quad (35)$$

Setzen wir $\Theta = 2.67$, $\Theta_m = 5.504$, so erhalten wir

$$g_k - g_T = G \frac{2 l}{R} 0.274 = G \frac{2 l}{R} \cdot \varepsilon \quad (35a)$$

Oft setzt man $\frac{\Theta}{\Theta_m} = \frac{1}{2}$, was zu dem möglichen Dichtewert $\Theta =$

2.75 führt; dann wird $\varepsilon = 0.25$. Damit wird aus (25 a)

$$g_T D_T \vartheta_T + g_k D_k \vartheta_k = 0$$

$$g_T D_T \vartheta_T + \left(g_T + \varepsilon G \frac{2l}{R} \right) \vartheta_k D_k = 0$$

Mit denselben Überlegungen, die wir vorhin für das Prinzip des einfachen hydrostatischen Gleichgewichtes durchgeführt haben, finden wir jetzt

$$\begin{aligned} M_T + M_k &= M_T \frac{2l}{R_0} \left(2 - \frac{3}{2} \frac{\Theta}{\Theta_m} \right) \\ &= 1.274 \vartheta_T D_T \end{aligned} \quad (36)$$

Mit $\frac{\Theta}{\Theta_m} = \frac{1}{2}$ wird

$$M_T + M_k = \frac{5}{4} \vartheta_T D_T \frac{2l}{R_0} \quad (36a)$$

Die Berücksichtigung der Veränderung der Schwerkraft beim Prinzip des strengen hydrostatischen Gleichgewichtes erhöht also die Differenz der absolut genommenen Massen von Topographie und Kompensation um 25 bis 27 % gegenüber dem Prinzip des vereinfachten hydrostatischen Gleichgewichtes.

Vom physikalischen Gesichtspunkt aus ist das Prinzip des strengen hydrostatischen Gleichgewichtes wohl das empfehlenswerteste. Zuzugeben ist, daß die Bestimmung der Massendifferenz, die mit dem Prinzip verbunden ist, auf einigen Annahmen beruht, die sicher nicht genau der Wirklichkeit entsprechen (unendlich ausgedehnte Platte, Schätzung des Verhältnisses $\frac{\Theta}{\Theta_m}$). Es sei hier übrigens bemerkt, daß man zu der Formel

(35) für $g_k - g_T$, innerhalb der Glieder erster Ordnung, auch gelangt, wenn man statt der unendlich ausgedehnten Scheibe um die ganze Erde geschlossene Kugelschalen konstanter Dicke annimmt.

Mit dem Prinzip des hydrostatischen Gleichgewichtes ist aber grundsätzlich eine absolute Verkleinerung der Masse der Kompensation verbunden. Damit ergibt sich aber, daß bei den Anwendungen, wo wir die Topographie und die Kompensation entfernen, um zu der hypothetischen Idealerde zu gelangen, eine Veränderung der Gesamtmasse dieser hypothetischen Erde gegenüber dem wirklichen Zustand, bei dem die Topo-

graphie und die Kompensation vorhanden sind, auftritt. Den Prozeß der Entfernung der Topographie und der Kompensation nennen wir die „Regularisierung“ der Erde. Er hat zur Folge, daß die äußere Begrenzung der regularisierten Erde sehr nahe mit einer Niveaufläche des Erdschwerefeldes zusammenfällt und daß, wenn die Hypothese der Isostasie sich mit dem wirklichen Zustand der Erde deckt, diese Erdrinde homogen ist, gegenüber der beträchtlichen Inhomogenität beim wirklichen Zustand. Da auf der Erde die Ozeane eine viel größere Ausdehnung haben als die Kontinente ($\frac{7}{11}$ der Erdoberfläche sind vom Meer bedeckt), tritt durch die Regularisierung eine Vergrößerung der Erdmasse gegenüber dem wirklichen Zustand ein.

Dies tritt selbstverständlich nicht ein, wenn man der Isostasie das Prinzip der Mastengleichheit zugrunde legt. Wir unterlassen es aber, hier weiter auf die Konsequenzen der Massenvergrößerung der regularisierten Erde beim hydrostatischen Gleichgewicht einzutreten.

Anwendungen der Hypothese der Isostasie in der praktischen Geodäsie

Die erste Anwendung der Hypothese erfolgte bei der Berechnung der Lotabweichungen aus den sichtbaren Massenunregelmäßigkeiten der Topographie. Statt aber nur die Anziehung der Topographie auf einen betrachteten Aufpunkt wird jetzt auch die Anziehung der Kompensation berechnet, die, je nachdem die Dichte der Kompensation positiv ist (unter den Ozeanen), eine wirkliche Anziehung oder im Falle negativer Dichte der Kompensation (unter den Kontinenten) eine Abstoßung, also eine negative Anziehung ist. Die Anziehung der Topographie ist positiv für Kontinentalmassen, negativ für Ozeanmassen. Um zu bequemen Formeln für die Anziehung der Topographie und der durch sie bedingten Kompensation zu gelangen, werden um den Aufpunkt Rotationskegel mit geeignet gewähltem halbem Öffnungswinkel Ψ gelegt. Außerdem legt man durch das Lot des Aufpunktes, d. h. also die Kegelachse, Vertikalebene, deren Azimut entweder gleichmäßig über den Horizont verteilt ist, oder man wählt nach dem Vorschlag von *Hutton* die Azimute dieser Vertikalebene so, daß $(\sin \alpha_r - \sin \alpha_e)$, respektive $(\cos \alpha_e - \cos \alpha_r)$ konstant gleich $1/n$ wird, wo n eine ganze Zahl bedeutet. Auf diese Weise erhält man ohne weitere Multiplikation die Komponenten Y_i , respektive X_i der Horizontalanziehung und in Kombination mit der Stationsschwere die Komponenten η_i und ξ_i der Lotabweichung. Diese Methode von *Hutton* hat aber den Nachteil, daß man zwei getrennte Ablesungen der mittleren Höhen der Kompartimente vornehmen muß, wenn beide Komponenten der Lotabweichung bestimmt werden sollen. Die Zahl n bewegt sich im allgemeinen zwischen 8 und 16. Auf diese Weise werden aus der Meereskugel vom Radius R_0 trapezförmige Figuren herausgeschnitten, die wir „Kompartimente“ nennen. Sie sind durch zwei Kreisbogen und zwei Geradenstücke begrenzt. Die von den Mantellinien der vom Kugelmittelpunkt ausgehenden Kegel aus der Topographie herausgeschnittenen Flächenstücke werden ersetzt durch eine zur Meeresfläche konzentrische Ku-

gelfläche, deren Lage so gewählt wird, daß sie in der mittleren Höhe der zu dem betrachteten Kompartiment gehörigen Topographie liegt. Damit machen wir die Masse zwischen Meereskugel und der der mittleren Höhe entsprechenden Kugel gleich der Masse der über (oder unter) dem betreffenden Kompartiment liegenden Masse der Topographie. Wenn die Kompartimente nicht zu groß gewählt werden, darf man annehmen, daß die Anziehung der horizontal abgedeckten Säule gleich der Anziehung der wirklichen Topographie ist. Man trachtet danach, den Kompartimenten, soweit man nicht die Methode von *Hutton* verwendet, zirka quadratförmige Gestalt zu geben. Indem man die Begrenzung der Kompensation für die ganze dem Kompartiment entsprechende Säule gemäß der Mittelhöhe der Topographie bestimmt, sieht man, daß die Kompensation ebenfalls durch zur Meereskugel konzentrische Kugelflächen begrenzt wird. Man hat die Horizontalanziehung von Kugelschalenausschnitten zu berechnen; auf die betreffenden Formeln treten wir hier nicht ein. Damit erhält man durch Multiplikation mit $\cos \alpha$ respektive $\sin \alpha$ die Komponenten der Horizontalanziehung von Topographie und von Kompensation auf den Aufpunkt in zwei zueinander senkrechten Richtungen, sobald die Mittelhöhen der Topographie für alle Kompartimente bestimmt sind. Meistens wählt man die zwei zueinander senkrechten Richtungen in der Meridianebene nach Norden und im Azimut 90° nach Osten positiv. Kombiniert man diese Komponenten der Horizontalanziehung mit der Schwerkraft der Station, so erhält man eine süd-nördliche und eine west-östliche Komponente der Lotabweichung herrührend von der Topographie und von der Kompensation des betrachteten Kompartimentes. Wir nennen sie topographische, respektive Kompensations-Lotabweichung, bezeichnet mit ξ_T, η_T , soweit sie von der Topographie erzeugt wird, mit ξ_K, η_K , soweit sie von der Kompensation herrührt.

$$\xi_T + \xi_K, \text{ respektive } \eta_T + \eta_K$$

nennen wir die isostatische Lotabweichungskomponente, die wir mit ξ_i, η_i bezeichnen. Indem man nun die algebraische Summe der ξ_i und der η_i für alle um die Station herumliegenden Kompartimente bildet, $\Sigma \xi_i, \Sigma \eta_i$, erhält man die Komponenten der gesamten isostatischen Lotabweichung

$$\begin{aligned} X_i &= \Sigma \xi_i = \Sigma (\xi_T + \xi_K) \\ Y_i &= \Sigma \eta_i = \Sigma (\eta_T + \eta_K) \end{aligned} \tag{37}$$

der betrachteten Station. Bei der Verwendung der Methode von *Hutton* kann man es durch geeignete Wahl der Zonenradien erreichen, daß X_i , respektive Y_i , auf die Addition der Mittelhöhen h in den Kompartimenten zurückgeführt werden kann. Diese Σh hat man dann nur noch mit einem geeigneten Faktor zu multiplizieren, um X_i , respektive Y_i zu erhalten.

(Schluß folgt)