

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 49 (1951)

Heft: 3

Artikel: Graphische Ausgleichung

Autor: Säuberli, R.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-208332>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Graphische Ausgleichung

Von Rud. Säuberli, Reinach

Die graphische Ausgleichung ist in letzter Zeit durch das analytische Verfahren verdrängt worden; sie hatte ihrer Anschaulichkeit wegen viele Anhänger, hauptsächlich in Süddeutschland und Frankreich. Im folgenden soll die Theorie der graphischen Ausgleichung weitergeführt und eine Methode erörtert werden, die es gestattet, Bestimmungselemente in beliebiger Anzahl auszugleichen, das Vor- und Rückwärtseinschneiden zu kombinieren und auch gemessene Distanzen mit in die Rechnung einzubeziehen.

Als erstes Beispiel soll die Aufgabe in § 88 im Handbuch Jordan, Seite 380, VII. Auflage, nachgerechnet und behandelt werden: Vorwärtseinschneiden mit fehlerzeigender Figur. Die Winkel und Azimuthe sind in neue Teilung umgerechnet. Gegeben sind 4 Punkte, A , B , C , D , mit folgenden Koordinaten:

	y	x
A	— 44,904.30	+ 15,967.50
B	— 39,554.90	+ 14,032.80
C	— 36,479.40	+ 16,760.50
D	— 39,392.10	+ 20,170.80

Bestimmt wird ein Punkt P durch Vorwärtseinschneiden von diesen 4 Punkten aus. Der Näherungspunkt P_0 ist angenommen zu:

$$y_0 = -41,316.00, \quad x_0 = +17,493.00$$

Von den Punkten A , B , C und D aus werden nun die Azimuthe nach dem Punkt P_0 gerechnet, ebenso die Distanzen und mit den Resultaten der Messung (Beobachtung) verglichen. Darüber gibt die untenstehende Tabelle Aufschluß:

Strahl 1, Visur $A-P_0$ Azimut $74^\circ 40' 89''$ beobachtet $74^\circ 40' 82''$
 Strahl 2, Visur $B-P_0$ Azimut $370^\circ 02' 86''$ beobachtet $370^\circ 03' 38''$
 Strahl 3, Visur $C-P_0$ Azimut $309^\circ 56' 89''$ beobachtet $309^\circ 57' 37''$
 Strahl 4, Visur $D-P_0$ Azimut $239^\circ 66' 20''$ beobachtet $239^\circ 66' 17''$

Man erstellt nun um den Punkt P_0 ein Trefferbild im großen Maßstab; in Betracht kommen die Verhältnisse 1:10, 1:5, 1:2,5 oder wenn nötig 1:1, falls die Strahlenbüschel sich in engem Raume schneiden und man die Ausgleichung auf den Millimeter genau wünschen will. Vom Punkt P_0 aus, der im Schnittpunkt der Koordinatenachsen $y = 41316.0$ und $x = 17493.0$ liegt, werden nun mit einem Transporteur die Azimute nach den 4 Ausgangspunkten aufgetragen. Dies muß schon mit einiger Schärfe erfolgen, weil in diesem Beispiel der Punkt zu weit abseits liegt. Die beobachteten Azimute werden nun als Parallelvisuren zu den vorläufigen, auf Punkt P_0 berechneten eingetragen. Mit den Beziehungen zwischen Winkel- und Bogenmaß im Kreis hat sich der Vermessungsfachmann sehr häufig zu befassen. Man hat zu berechnen:

den Kreisbogen (b) aus Radius (r) und Zentriwinkel (a),
 den Radius aus Zentriwinkel und Bogen, und
 den Zentriwinkel aus Radius und Bogen. Es besteht die

Proportion: $\frac{400}{2 \cdot r \cdot \pi} = \frac{a}{b}$, da $\frac{200}{\pi} = 63,66^\circ = \rho$, so berechnet sich:

$$b = \frac{r \cdot a}{63,66}$$

$$a = \frac{b \cdot 63,66}{r}$$

$$r = \frac{b \cdot 63,66}{a}, \text{ will man z. B. die Distanz (Ra-}$$

dus) berechnen, die zum Zentriwinkel 1° und Bogen 1 Meter gehört, so ergibt sich $r = d = \frac{1 \cdot 63,66}{1} = 63,66$ m. Folgendes kleine Schema wird die Berechnungen erleichtern.

Distanz	63,66 m	Winkel	$10''$	Bogen	0,001 m
Distanz	63,66 m	Winkel	$1'$	Bogen	0,01 m
Distanz	63,66 m	Winkel	$10'$	Bogen	0,10 m
Distanz	63,66 m	Winkel	1°	Bogen	1,00 m
Distanz	636,62 m	Winkel	$10''$	Bogen	0,01 m
Distanz	6366,20 m	Winkel	$10''$	Bogen	0,10 m

In nachstehender Figur im Maßstab 1:10 werden nun, ausgehend von den auf den provisorischen Punkt P_0 berechneten Richtungen, die

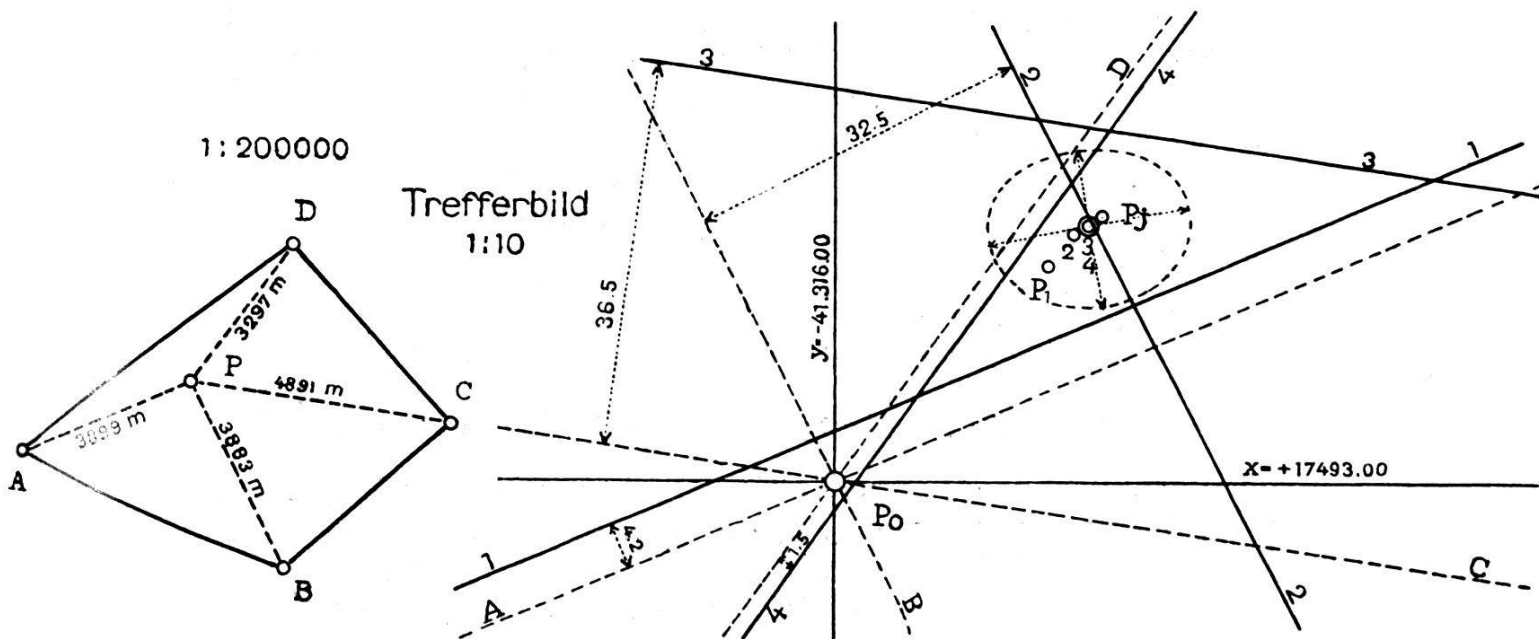


Fig. 1

Resultate der Beobachtung als parallele Linien eingetragen. Die linearen Verschiebungen (l) sind:

$$\text{Strahl 1, } A-P: - 7'', l_1 = - \frac{7.3899}{6366} = - 4,2 \text{ cm (nach links)}$$

$$\text{Strahl 2, } B-P: + 52'', l_2 = + \frac{52.3883}{6366} = + 32,5 \text{ cm (nach rechts)}$$

$$\text{Strahl 3, } C-P: + 48'', l_3 = + \frac{48.4891}{6366} = + 36,5 \text{ cm (nach rechts)}$$

$$\text{Strahl 4, } D-P: - 3'', l_4 = - \frac{3.3297}{6366} = - 1,5 \text{ cm (nach links)}$$

Somit wäre dieselbe fehlerzeigende Figur entstanden, wie sie in § 88, Handbuch Jordan, 2. Band, Seite 382, 7. Aufl., abgebildet ist.

Für den ausgeglichenen Punkt P gilt die Bedingung, daß die Quadratsumme der Winkelverschiebungen (v) an den beobachteten Visuren ein Minimum wird. Bezeichnet man die linearen Abweichungen mit e_1 ,

$$e_2, e_3, e_4, \text{ so ist } v_1 = \frac{e_1}{d_1}, v_2 = \frac{e_2}{d_2} \text{ usw.}$$

$$\text{Es soll also: } \left(\frac{e_1}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{e_2}{d_2}\right)^2 + \left(\frac{e_3}{d_3}\right)^2 + \left(\frac{e_4}{d_4}\right)^2 \text{ ein Minimum sein.}$$

Nun sind $\frac{1}{d_1^2} = p_1$ usw. die Gewichte der betreffenden Visuren. Es ist

also: $p_1 \cdot e_1^2 + p_2 \cdot e_2^2 + p_3 \cdot e_3^2 + p_4 \cdot e_4^2$ zum Minimum zu machen. Demzufolge ist die Ableitung dieser Funktion gleich 0 zu setzen und man erhält: $p_1 \cdot e_1 + p_2 \cdot e_2 + p_3 \cdot e_3 + p_4 \cdot e_4 = 0$. Dies ist die Formel für das allgemeine arithmetische Mittel und stimmt auch überein mit dem Momentensatz in der Statik. Denkt man sich die 4 Visuren unseres Ausgleichungsproblems alle parallel, dann bewegen sich die e senkrecht dazu in einer Axe. Genügt ein erstmals angenommener Wert von P obiger Be-

dingung nicht, so ist die Verbesserung $x = \frac{[p \cdot e]}{[p]}$

Der ausgeglichene Punkt P ist der Schwerpunkt des Strahlensystems; dieser muß nach 2 Seiten hin fixiert werden und dazu benützen

wir die Regeln der graphischen Statik. Im Ausdruck $x = \frac{[p \cdot e]}{[p]}$ ent-

spricht der Zähler $[p \cdot e]$ dem Kräftepoligon, der Nenner $[p]$ dem Seilpolygon. Wenn wir mit $p_1 \cdot e_1, p_2 \cdot e_2$ usw. das Kräftepolygon auftragen, so muß dieses Polygon wieder auf den Anfangspunkt zurückkehren, wenn wir uns im Schwerpunkt P befinden. Es gibt vielleicht verschiedene Wege, den Schwerpunkt zu finden; am gangbarsten hat sich der folgende erwiesen:

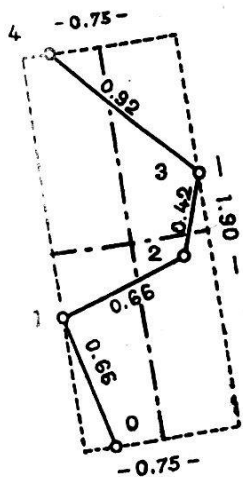
Im Trefferbild 1:10 nehmen wir nach Gutdünken einen Ausgangspunkt an, der nach Augenmaß dem Schwerpunkt entspricht.

Dieser Ausgangspunkt sei P_1 mit den Koordinaten: $y = -41315.80$, $x = +17493.20$. Wir erstellen vorerst den Seilzug, $[p]$ indem wir die Gewichte der Visuren der Reihe nach zusammensetzen, senkrecht zum dazugehörigen Strahl, wobei rückläufige Linien zu vermeiden sind, so daß ein gestrecktes Polygon entsteht, siehe Figur.

Hierauf stellen wir eine kleine Tabelle auf, worin die Ausrechnung für die Verbesserungen eingetragen werden.

	p	1			2		
		e	$p \cdot e$	$p \cdot e^2$	e	$p \cdot e$	$p \cdot e^2$
1. $p_1 = \frac{1}{3899^2} = 0,66$		6,5	4,29	27,88	8,3	5,48	45,48
2. $p_2 = \frac{1}{3883^2} = 0,66$		5,4	3,56	19,22	2,0	1,32	2,64
3. $p_3 = \frac{1}{4891^2} = 0,42$		13,3	5,59	74,35	10,0	4,20	42,00
4. $p_4 = \frac{1}{3297^2} = 0,92$		2,8	2,58	7,22	3,0	2,76	8,28
	2,66			128,67			98,40

p	3			4			Jordan		
	e	$p \cdot e$	$p \cdot e^2$	e	$p \cdot e$	$p \cdot e^2$	e	$p \cdot e$	$p \cdot e^2$
1. $p_1 = 0,66$	8,6	5,68	48,85	8,7	5,74	49,94	9,0	5,94	53,46
2. $p_2 = 0,66$	0,4	0,26	0,10	0,2	0,13	0,03	1,2	0,79	0,95
3. $p_3 = 0,42$	9,0	3,78	34,02	8,8	3,70	32,56	8,0	3,36	26,88
4. $p_4 = 0,92$	3,6	3,31	11,92	3,5	3,22	11,27	4,0	3,68	14,72
			94,89			93,80			96,01



Seilzug 1:0,5

Kräftezüge 1:5

$$y = -41315.80$$

$$x = +17493.20$$

$$41315.777$$

$$17493.230$$

$$41315.763$$

$$17493.240$$

P_1

P_2

P_3

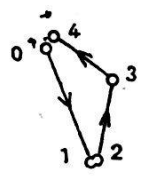
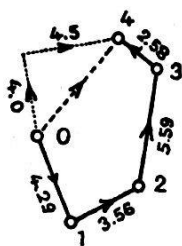


Fig. 2

In der Kolonne e sind die aus dem Trefferbild abgegriffenen Abstände von den betreffenden Visuren enthalten. Die Produkte $p \cdot e$ dienen zum Auftragen des Kräftezuges. Sie sind als Kräfte zu betrachten mit Pfeilrichtung nach der dazu gehörenden Visur. Im Kräftezug für den Punkt P_1 ersieht man, daß eine Lücke besteht, da der Ausgangspunkt 1 mit dem Schlußpunkt 4 zusammenfallen sollte. Nr. 0 soll in der Richtung nach (4) verschoben werden. Die fehlende Kraft 0-4 wird in 2 Komponenten zerlegt, die parallel mit den Axen des Seilzuges verlaufen. Im Kräftezug für den Punkt P_1 betragen diese Komponenten 4 Einheiten in der Richtung der Längsaxe und 4,5 Einheiten in der Richtung der Queraxe. Wie leicht ersichtlich, müssen diese Beträge noch durch die Axensummen des Seilzuges dividiert werden, um die Verbesserungen des Punktes P_1 zu erhalten.

In der Längsaxe beträgt die Verschiebung somit $\frac{4,0}{1,9} = 2,1 \text{ cm}$

In der Queraxe beträgt die Verschiebung somit $\frac{4,5}{1,5} = 3,0 \text{ cm}$

(Als Queraxe muß die doppelte Breite des Parallelogramms eingesetzt werden.) Wir tragen nun die erhaltenen Resultate im großen Maßstab auf die Axen des Seilzuges auf und erhalten durch Transformierung auf das Koordinatennetz die Verbesserungen im y (2,3 cm) und im x (3,0 cm) und kommen so zum verbesserten Punkt P_2 mit den Koordinaten: $y = -41315.777$, $x = +17493.230$. Diese Prozedur wird fortgesetzt bis wir zum geschlossenen Kräftepolygon kommen und die Verbesserungen belanglos werden.

Wir hätten also als ausgeglichenen Punkt P_4 mit den Koordinaten:

$$y = -41315.761 \quad x = +17493.243.$$

Im Buch Jordan ist das analytisch berechnete Resultat mit

$$y = -41315.75, \quad x = +17493.25$$

angegeben; allein die Quadratsumme für diesen Wert ergibt 96,01, während dem sie für den graphisch berechneten Punkt P_4 auf 93,80 steht. Die Winkelverbesserungen auf den Punkt P_4 werden berechnet nach der

Formel
$$v = \frac{e \cdot 6366}{d}.$$

Strahl 1,	Distanz 3899	Abgriff (e) 8,7	$v = 14,2''$	$v = 201,6$
Strahl 2,	Distanz 3883	Abgriff 0,2	$v = 3,3''$	$v = 10,9$
Strahl 3,	Distanz 4891	Abgriff 8,8	$v = 11,4''$	$v = 130,0$
Strahl 4,	Distanz 3297	Abgriff 3,5	$v = 6,7''$	$v = 44,9$
				387,4

Der mittlere Fehler einer Visur berechnet sich nach:

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-2}} = \sqrt{\frac{387 \cdot 4}{2}} = 13,9''.$$

Für die gemittelte Distanz von 3900 m beträgt die lineare Abweichung

$$e = \frac{13,9 \cdot 3900}{6366} = 8,5 \text{ cm.}$$

Die Unsicherheit des Punktes P_4 wäre also ein Kreis mit dem Radius 8,5 cm. Da das Trefferbild unregelmäßig ist, so entsteht immer eine Ellipse, deren Längsaxe parallel den kurzen Visuren verläuft, somit senkrecht zur Längsaxe des Seilzuges. Das Axenverhältnis des Seilzuges ist 1,9:1,5 und dasselbe Verhältnis wird auch für die Ellipse des mittlern Fehlers gelten. Wir hätten also die Kreisfläche in eine gleich große Ellipsenfläche umzurechnen. Bezeichnet a die große Axe, b die kleine Axe, und r den Kreisradius so wäre $r^2 = a \cdot b$, und als zweite Bedingung $a:b = 1,9:1,5$; daraus berechnet sich

$$a = 8,5 \cdot \sqrt{\frac{1,9}{1,5}} = 9,5 \text{ cm}; b = 8,5 \cdot \sqrt{\frac{1,5}{1,9}} = 7,5 \text{ cm.}$$

Diese Fehlerellipse ist nach Lage und Größe im Trefferbild 1:10 eingetragen.

Es sei nun noch erörtert, wie sich die Schwerpunktbestimmung in 2 einfachen Figuren nach dem graphischen Verfahren gestaltet.

1. Beim gleichseitigen Dreieck als Trefferbild, wo die Gewichte alle gleich sind, ergibt der Kräftezug wieder ein gleichseitiges Dreieck, das wieder auf den Anfangspunkt zurückkehrt.

2. Beim gleichschenkligen Dreieck ist dies ebenfalls zutreffend, nur hat man als Gewichte statt der reziproken Quadratsumme der Längen, die der Längen selbst einzusetzen.

Die Abmessungen sind folgende:

l_1 1,50	l_1^2 2,25	e_1 0,63	$l_1^2 \cdot e_1$ 1,42
l_2 2,00	l_2^2 4,00	e_2 0,46	$l_2^2 \cdot e_2$ 1,84
l_3 2,00	l_3^2 4,00	e_3 0,46	$l_3^2 \cdot e_3$ 1,84

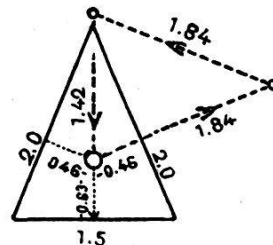
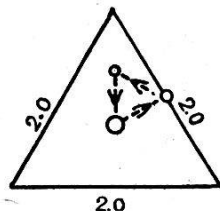


Fig. 3

Als Kuriosum soll noch eine Aufgabe erwähnt werden, deren Lösung sich scheinbar für das graphische Verfahren weniger gut eignet, siehe

untenstehendes Trefferbild: Bei rechtwinklig sich schneidenden Visuren könnte man beim Aufzeichnen des Seilzuges im Zweifel sein, ob man nach links oder nach rechts abbiegen soll. In solchem Falle

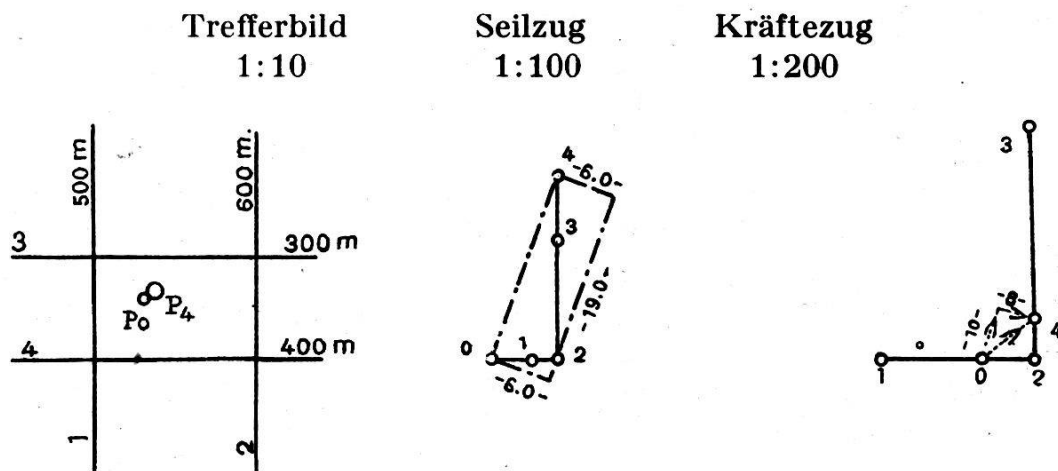


Fig. 4

wird man dem Seilzug eine dem ersten Kräftepoligon, bzw. dessen Schlußkraft ähnliche Richtung geben. Ob der Seilzug günstig konstruiert ist, sieht man daran, daß die erste oder zweite Verbesserung bereits schon das Quadratminimum aufweist.

Berechnung für oben stehende Aufgabe

	Dist. d	$\frac{1}{d^2}=p$	e cm	$p \cdot e$	$p \cdot e^2$	e	$p \cdot e$	$p \cdot e^2$	e	$p \cdot e$	$p \cdot e^2$
			P_0			P_1			P_2		
1.	500	4,0	4,7	18,80	88,36	5,4	21,60	116,64	5,8	23,20	134,56
2.	600	2,8	10,7	29,96	320,57	10,0	28,00	280,00	9,6	26,88	258,04
3.	300	11,1	4,0	44,40	177,60	3,4	37,74	128,32	3,9	43,29	168,83
4.	400	6,3	5,8	36,54	211,93	6,4	40,32	258,05	5,9	37,17	219,30
					798,46						
			P_3			P_4					
1.	500	4,0	6,1	24,40	148,84	6,3	25,20	158,76			
2.	600	2,8	9,3	26,04	242,17	9,1	25,48	231,87			
3.	300	11,1	3,6	39,96	143,86	3,5	38,85	135,97			
4.	400	6,3	6,2	39,06	242,17	6,3	39,69	250,04			
					777,04						

Wir wären also mit der 4. Verbesserung beim ausgeglichenen Punkt angelangt. Bei aufmerksamer Betrachtung der Tabelle ersehen wir, daß

wir dieses Resultat noch rascher hätten erhalten können durch Überspringen der Zwischenpunkte P_1-P_3 .

In der Kolonne $p \cdot e$ zum Punkt P_0 sieht man je 2 einander entgegengesetzte Kräfte, die sich aufheben müssen. Man hat also jeweilen die Differenz dieser Beträge durch die Summe der dazugehörigen Gewichte zu dividieren, um die Korrektur von P_0 bis P_4 zu erhalten.

$$\text{In West-Ostrichtung} \quad \frac{29,96 - 18,80}{4,0 + 2,8} = 1,6 \text{ cm nach Osten}$$

$$\text{In Nordsüdrichtung} \quad \frac{44,40 - 36,54}{11,1 + 6,3} = 0,5 \text{ cm nach Norden.}$$

Damit hat man den Abstand des Punktes P_4 vom Strahl

$$\text{Nr. 1: } 4,7 + 1,6 = 6,3 \text{ cm,}$$

$$\text{Nr. 3: } 4,0 - 0,5 = 3,5 \text{ cm,}$$

also genaue Übereinstimmung mit den Abmessungen für den endgültigen Punkt P_4 in der Kolonne e .

Somit ist die Lösung der Aufgabe auf die Bildung des allgemeinen arithmetischen Mittels zurückgeführt.

Mitteilung der eidg. Vermessungsdirektion

Communication de la direction fédérale des mensurations cadastrales

Der Bundesrat hat in seiner Sitzung vom 15. Dezember 1950 den Rücktrittsgesuchen von Prof. Dr. e.h. F. Baeschlin, Zollikon, Prof. Dr. P. Aeby, Freiburg, und P. Kübler, Adjunkt des Kantonsgeometers, Bern, als Mitglieder der eidg. Kommission für Grundbruchgeometerprüfungen entsprochen und für die während vieler Jahre geleisteten Dienste den Dank ausgesprochen.

Die Kommission wurde für die Amtsdauer vom 1. Januar 1951 bis 31. Dezember 1953 folgendermaßen neu bestellt:

Dans sa séance du 15 décembre 1950, le Conseil fédéral a accepté les démissions de M. le Dr h.c. F. Baeschlin, professeur à l'E.P.F., à Zollikon, de M. le Dr P. Aeby, professeur de droit à l'Université, à Fribourg, et de M. P. Kübler, adjoint du géomètre cantonal, à Berne, comme membres de la Commission fédérale des examens de géomètres, avec remerciements pour les services rendus au cours de nombreuses années.