

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 52 (1954)

Heft: 3

Artikel: Beitrag zur Bestimmung von regelmässigen Kreisteilungsverbesserungen

Autor: Ansermet, A.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-210936>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Beitrag zur Bestimmung von regelmäßigen Kreisteilungsverbesserungen

Von A. Ansermet

Die regelmäßigen Kreisteilungsfehler werden näherungsweise als periodische Funktion in der Form einer trigonometrischen Summe entwickelt. Die Elemente, d. h. die Konstanten der Summe sollen so bestimmt werden, daß die Funktionswerte sich gegebenen Beobachtungen möglichst gut anschließen. Wir betrachten eine Ausgleichung von Messungen, welche, ihrem Charakter nach, einen periodischen Verlauf haben. Hierzu wird ein Winkel in mehreren gleichmäßig verteilten Lagen gemessen; die Beobachtungen erfolgen an zwei diametral liegenden Stellen.

Die Verbesserungsgleichung erhält, für jede Messung L_i , die Form:

$$(1) \quad L_i + v_i = x + f_i(a, b, c \dots A, B, C \dots \alpha), \quad i = 1, 2 \dots n \quad (\text{Gruppe } \alpha)$$

$$f_i = a (\sin [2 \varphi_i + A] - \sin [2 \varphi_i + 2 \alpha + A]) + b (\sin [4 \varphi_i + B] - \sin [4 \varphi_i + 4 \alpha + B]) + c (\sin [6 \varphi_i + C] - \sin [6 \varphi_i + 6 \alpha + C]) + \dots$$

α ist der aus der Messung erhaltene Wert des Winkels und x der endgültige Wert. Wir wollen gleichzeitig mehrere Gruppen ausgleichen:

$$(2) \quad L'_h + v'_h = x' + f'_h(a, b, c \dots A, B, C \dots \alpha'), \quad h = 1, 2 \dots n' \quad (\text{Gr. } \alpha')$$

$$(3) \quad L''_k + v''_k = x'' + f''_k(a, b, c \dots A, B, C \dots \alpha'') \quad k = 1, 2 \dots n'' \quad (\text{Gr. } \alpha'')$$

Die vermittelnden Größen sind nicht immer unabhängig voneinander; die Bedingungsgleichungen lauten:

$$(4) \quad f_I(x, x', x'' \dots) = 0, \quad f_{II}(x, x', x'' \dots) = 0$$

und die Ausgleichungsbedingung: $[vv + v'v' + v''v''] = \text{Minimum}$.

Die Gleichungen (1) sind umzuformen ([4], [5]):

$$\begin{aligned} f_i &= 2a \sin \alpha (-\cos [\alpha + A] \cos 2 \varphi_i + \sin [\alpha + A] \sin 2 \varphi_i) \\ &+ 2b \sin 2 \alpha (-\cos [2 \alpha + B] \cos 4 \varphi_i + \sin [2 \alpha + B] \sin 4 \varphi_i) + \dots \\ &= a_1 \cos 2 \varphi_i + b_1 \sin 2 \varphi_i + a_2 \cos 4 \varphi_i + b_2 \sin 4 \varphi_i + \dots \end{aligned}$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial f_i}{\partial a} = \frac{a_1}{a} \cos 2 \varphi_i + \frac{b_1}{a} \sin 2 \varphi_i & \frac{\partial f_i}{\partial A} = b_1 \cos 2 \varphi_i - a_1 \sin 2 \varphi_i \\ \frac{\partial f_i}{\partial b} = \frac{a_2}{b} \cos 4 \varphi_i + \frac{b_2}{b} \sin 4 \varphi_i & \frac{\partial f_i}{\partial B} = b_2 \cos 4 \varphi_i - a_2 \sin 4 \varphi_i \\ \frac{\partial f_i}{\partial c} = \frac{a_3}{c} \cos 6 \varphi_i + \frac{b_3}{c} \sin 6 \varphi_i & \frac{\partial f_i}{\partial C} = b_3 \cos 6 \varphi_i - a_3 \sin 6 \varphi_i \end{array} \right.$$

$$\varphi_i = \underbrace{\varphi_1 + (i-1) \frac{\pi}{n}}_{\text{Bogenmaß}} = \underbrace{\varphi_1 + \frac{i-1}{n} 180^\circ}_{\text{Winkelmaß}} \quad i = 1, 2 \dots n$$

wobei angenommen wird, daß die erste Messung dieser Gruppe $\varphi_1 = 0$.

$$(6) \quad L_i + v_i = x + a_1 \cos 2 \varphi_i + b_1 \sin 2 \varphi_i + a_2 \cos 4 \varphi_i + b_2 \sin 4 \varphi_i + a_3 \cos 6 \varphi_i + b_3 \sin 6 \varphi_i \dots$$

mit den Normalgleichungen (7) in impliziter Form:

$$(7) \quad [v] = 0 = [\cos 2 \varphi \cdot v] = [\sin 2 \varphi \cdot v] = [\cos 4 \varphi \cdot v] = [\sin 4 \varphi \cdot v] = [\cos 6 \varphi \cdot v] = [\sin 6 \varphi \cdot v]$$

Damit entfallen die Glieder mit nichtquadratischen Summenkoeffizienten. Die Bestimmung der Hilfsgrößen und der Konstanten ist einfach; diese Näherungswerte kann man sich durch Rechnung mit einem Teil der Messungen verschaffen. Für diese Rechnung sind die klassischen Gleichungen von Bessel (8) oder die Formeln von Tchebycheff zu benutzen:

$$(8) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{2}{n} [y \cdot \cos 2 \varphi] & a_2 = \frac{2}{n} [y \cdot \cos 4 \varphi] & a_3 = \frac{2}{n} [y \cdot \cos 6 \varphi] \\ b_1 = \frac{2}{n} [y \cdot \sin 2 \varphi] & b_2 = \frac{2}{n} [y \cdot \sin 4 \varphi] & b_3 = \frac{2}{n} [y \cdot \sin 6 \varphi] \end{cases}$$

$$y_i = L_i - x.$$

Für Näherungswerte sind diese Formeln nicht immer zu empfehlen. *Verfahren von Tchebycheff*. Diese Methode ist zu empfehlen, wenn die Beobachtungszahl n groß ist ([3]). Wir wählen noch eine Näherungsfunktion 3. Ordnung:

$$y_i \cong a'_0 + a_1 \cos 2 \varphi_i + a_2 \cos 4 \varphi_i + a_3 \cos 6 \varphi_i + b_1 \sin 2 \varphi_i + b_2 \sin 4 \varphi_i + b_3 \sin 6 \varphi_i$$

mit der Periode 2π :

$$\nu = nu \quad 0, \frac{2 \pi}{\nu}, 2 \cdot \frac{2 \pi}{\nu} \dots (\nu - 1) \frac{2 \pi}{\nu}$$

Die ν sind ganze Zahlen, provisorisch willkürlich gewählt

$$(\nu, 2 \nu, 3 \nu \dots \leq 3).$$

Tchebycheff hat gefunden:

$$(9) \begin{cases} a_\nu + a_{3\nu} + a_{5\nu} + a_{7\nu} + \dots \\ \cong \frac{1}{2\nu} \left[y(0) - y\left(\frac{\pi}{\nu}\right) + y\left(\frac{2\pi}{\nu}\right) - y\left(\frac{3\pi}{\nu}\right) + \dots - y\left((2\nu-1)\frac{\pi}{\nu}\right) \right] \\ b_\nu - b_{3\nu} + b_{5\nu} - b_{7\nu} + \dots \\ \cong \frac{1}{2\nu} \left[y\left(\frac{\pi}{2\nu}\right) - y\left(\frac{3\pi}{2\nu}\right) + y\left(\frac{5\pi}{2\nu}\right) - \dots - y\left((4\nu-1)\frac{\pi}{2\nu}\right) \right] \end{cases}$$

Gültig ist die Periode, welche mit 0 (oder $\frac{\pi}{2\nu}$) anfängt.

I. Stufe der Bestimmung: Für $\nu = 1, 3, 5, \dots$ erhält man

$$a_1 + a_3 \cong \frac{1}{2} [y(0) - y(\pi)]$$

$$b_1 - b_3 \cong \frac{1}{2} \left[y\left(\frac{\pi}{2}\right) - y\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right]$$

II. Stufe: Für $\nu = 2, 4, 6, \dots$ findet man

$$a_2 \cong \frac{1}{4} \left[y(0) - y\left(\frac{\pi}{2}\right) + y(\pi) - y\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right]$$

$$b_2 \cong \frac{1}{4} \left[y\left(\frac{\pi}{4}\right) - y\left(\frac{3\pi}{4}\right) + y\left(\frac{5\pi}{4}\right) - y\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right]$$

III. Stufe: Für $\nu = 3, 6, 9, \dots$

$$a_3 \cong \frac{1}{6} \left[y(0) - y\left(\frac{\pi}{3}\right) + y\left(\frac{2\pi}{3}\right) - y(\pi) + y\left(\frac{4\pi}{3}\right) - y\left(\frac{5\pi}{3}\right) \right]$$

$$b_3 \cong \frac{1}{6} \left[y\left(\frac{\pi}{6}\right) - y\left(\frac{\pi}{2}\right) + y\left(\frac{5\pi}{6}\right) - y\left(\frac{7\pi}{6}\right) + y\left(\frac{3\pi}{2}\right) - y\left(\frac{11\pi}{6}\right) \right]$$

Beispiel: $n = 24$

	$2\varphi =$	$y =$		$2\varphi =$	$y =$		$2\varphi =$	$y =$		$2\varphi =$	$y =$
1	0	+2".98	7	$\pi/2$	-0".99	13	π	-1".25	19	$3\pi/2$	-0".81
2	$\pi/12$	+4 .10	8	$7\pi/12$	-0 .86	14	$13\pi/12$	-1 .72	20	$19\pi/12$	-1 .56
3	$\pi/6$	+4 .02	9	$2\pi/3$	-0 .34	15	$7\pi/6$	-1 .62	21	$5\pi/3$	-2 .10
4	$\pi/4$	+2 .90	10	$3\pi/4$	+0 .11	16	$5\pi/4$	-1 .13	22	$7\pi/4$	-1 .96
5	$\pi/3$	+1 .27	11	$5\pi/6$	+0 .08	17	$4\pi/3$	-0 .55	23	$11\pi/6$	-0 .75
6	$5\pi/12$	-0 .25	12	$11\pi/12$	-0 .50	18	$17\pi/12$	-0 .39	24	$23\pi/12$	+1 .08

Diese Zahlen sind in den endgültigen Formeln einzuführen:

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} a_2 \cong \frac{1}{4} (y_1 - y_7 + y_{13} - y_{19}) \quad b_2 \cong \frac{1}{4} (y_4 - y_{10} + y_{16} - y_{22}) \\ a_3 \cong \frac{1}{6} (y_1 - y_5 + y_9 - y_{13} + y_{17} - y_{21}); \quad b_3 \cong \frac{1}{6} (y_3 - y_7 + y_{11} - y_{15} + y_{19} - y_{23}) \\ a_1 \cong \frac{1}{2} (y_1 - y_{13}) - a_3 \quad b_1 \cong \frac{1}{2} (y_7 - y_{19}) + b_3; \quad a'_0 = \frac{1}{24} [y] \end{array} \right.$$

und schließlich:

	$a_1 =$	$b_1 =$	$a_2 =$	$b_2 =$	$a_3 =$	$b_3 =$
Bessel	+1.40	+1.03	+0.87	+0.90	+0.70	+1.12
Tchebycheff	+1.42	+1.02	+0.88	+0.91	+0.70	+1.11

Die Konstanten a, b, c, A, B, C lassen sich auch provisorisch ableiten.

Umformung der Gleichungen (1), (2), (3):

Setzt man nun: $x = x_0 + dx, x' = x'_0 + dx', x'' = x''_0 + dx''$

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \delta a, & b &= b_0 + \delta b, & c &= c_0 + \delta c, \\ A &= A_0 + \delta A, & B &= B_0 + \delta B, & C &= C_0 + \delta C \end{aligned}$$

dann erhält man

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} l_i + v_i = \delta x + \frac{\partial f_i}{\partial a} \delta a + \frac{\partial f_i}{\partial b} \delta b + \frac{\partial f_i}{\partial c} \delta c + \frac{\partial f_i}{\partial A} \delta A + \frac{\partial f_i}{\partial B} \delta B + \frac{\partial f_i}{\partial C} \delta C \\ l'_h + v'_h = \delta x' + \frac{\partial f'_h}{\partial a} \delta a + \frac{\partial f'_h}{\partial b} \delta b + \frac{\partial f'_h}{\partial c} \delta c + \dots \quad \begin{array}{l} i = 1, 2 \dots n \\ h = 1, 2 \dots n' \end{array} \\ l''_k + v''_k = \delta x'' + \frac{\partial f''_k}{\partial a} \delta a + \frac{\partial f''_k}{\partial b} \delta b + \frac{\partial f''_k}{\partial c} \delta c + \dots \quad k = 1, 2 \dots n'' \end{array} \right.$$

Die Normalgleichungen lauten abgekürzt geschrieben:

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} [v] = [v'] = [v''] = 0, \\ \left[\frac{\partial f}{\partial a} v + \frac{\partial f'}{\partial a} v' + \frac{\partial f''}{\partial a} v'' \right] = 0, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial b} v + \frac{\partial f'}{\partial b} v' + \frac{\partial f''}{\partial b} v'' \right] = 0 \\ \left[\frac{\partial f}{\partial c} v + \frac{\partial f'}{\partial c} v' + \frac{\partial f''}{\partial c} v'' \right] = 0 \dots \quad \left[\frac{\partial f}{\partial C} v + \frac{\partial f'}{\partial C} v' + \frac{\partial f''}{\partial C} v'' \right] = 0 \end{array} \right.$$

In diesen Gleichungen bleiben nur die absoluten und quadratischen Glieder übrig ([2]).

Bedingungsgleichung

Wir wollen annehmen, daß die Größen x, x', x'' nicht unabhängig voneinander sind: $x + x' = x''$ (3 Strahlen kombiniert).

Um die Gewichtsreziproken der Unbekannten zu bestimmen, wählen wir die Gleichung ([1] s. 312): $(VU) = [\varphi \psi] - \frac{[P\varphi]^2}{[Pp]}$

$\frac{[P\varphi]^2}{[Pp]}$ ist ein Korrektionsglied für die Gewichtsreziproken von x, x', x'' .

Man erkennt, daß $[P\varphi] = 0$ für die Unbekannten $a, b, c \dots$

Gewichte der Amplituden

Die Gewichte der Konstanten a, b, c erhält man aus den Normalgleichungen (12); es seien P_a, P_b, P_c diese Gewichte:

Zum Beispiel:

$$P_a = \left[\frac{\partial f}{\partial a} \frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f'}{\partial a} \frac{\partial f'}{\partial a} + \frac{\partial f''}{\partial a} \frac{\partial f''}{\partial a} \right], \quad P_b = \left[\frac{\partial f}{\partial b} \frac{\partial f}{\partial b} + \frac{\partial f'}{\partial b} \frac{\partial f'}{\partial b} + \frac{\partial f''}{\partial c} \frac{\partial f''}{\partial c} \right]$$

Interessant ist das Verhältnis:

$$P_a : P_b : P_c = K_a : K_b : K_c \quad (\text{für } n = n' = n'')$$

$$K_a = \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha' + \sin^2 \alpha'', \quad K_b = \sin^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha' + \sin^2 2\alpha''$$

$$K_c = \sin^2 3\alpha + \sin^2 3\alpha' + \sin^2 3\alpha''$$

Beispiele:

$$\alpha = \alpha' = \alpha''$$

$$P_a : P_b : P_c = 0,5 : 1 : 0,5$$

$$\alpha \cong \alpha' \cong 45^\circ \quad \alpha'' \cong \alpha + \alpha' \quad (3 \text{ Strahlen kombiniert})$$

$$P_a = P_b = P_c \quad \text{da} \quad K_a = K_b = K_c = 2,00$$

$$\alpha = 40^\circ \quad \alpha' = 50^\circ \quad \alpha'' \cong \alpha + \alpha', \quad x'' = x + x'$$

(Kombination von 3 Strahlen)

$$P_a : P_b : P_c = 2,01 : 1,94 : 2,00$$

Trigonometrische Summe IV. Ordnung:

Es seien noch 3 Messungsgruppen a, α', α'' und $n = n' = n''$. Wir haben 4 Koeffizienten a, b, c, d und 4 Gewichte P_a, P_b, P_c, P_d . Es sind andere Winkel zu wählen, sonst kann $P_d = 0$ sein.

Ziemlich günstig ist die folgende Lösung:

$\alpha \cong \alpha' \cong 36^\circ \quad \alpha'' \cong \alpha + \alpha', \quad x'' = x + x'$ (Kombination von 3 Strahlen)

$$P_a : P_b : P_c : P_d = K_a : K_b : K_c : K_d = 1,6 : 2,1 : 2,1 : 1,6$$

$$K_a = \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha' + \sin^2 \alpha'' \dots \quad K_d = \sin^2 4 \alpha + \sin^2 4 \alpha' + \sin^2 4 \alpha''$$

Für $\alpha = \alpha' = \alpha''$ ist das Verhältnis

$$\begin{aligned} P_a : P_b : P_c : P_d &= 0,34 : 0,90 : 0,90 : 0,34 = \\ &= \sin^2 36^\circ : \sin^2 72^\circ : \sin^2 108^\circ : \sin^2 144^\circ \end{aligned}$$

weniger günstig.

Theoretisch wäre $P_a = P_b = P_c = P_d$ bei der Messung von 4 Strahlen in allen Kombinationen ([4] s. 134) mit 6 Gruppen ($3 \times 36^\circ$, $2 \times 72^\circ$, $1 \times 108^\circ$). ($n = n' = n'' = n''' = \dots$)

Literatur

- [1] Baeschlin C. F. Ausgleichungsrechnung & Landesvermessung II (Zürich 1935/36) Autographie
- [2] Czerski Z. Verallgemeinerung des Heuvelink-Verfahrens (Zeitschr. f. Verm. 1935)
- [3] Fréchet & Romann. Représentation des lois empiriques (Eyrolles, Paris 19030)
- [4] Großmann W. Grundzüge der Ausgleichungsrechnung (Hannover 1952)
- [5] Heuvelink. Bestimmung der regelmäßigen Kreisteilungsfehler (Zeitschr. f. Verm. 1913)

Impressions d'Allemagne

A. Jeanneret, *ing. rural cantonal, Neuchâtel*

Les «Journées bavaoises du Génie rural», en août 1953, devaient donner l'occasion à plusieurs de nos collègues suisses et étrangers de faire un séjour plus ou moins bref à Munich et en Bavière.

Pour étendre leurs connaissances en géographie physique, économique ou historique, les jeunes gens d'aujourd'hui parcourent les pays d'Europe en auto-stop, ou s'établissent pendant leurs vacances en un endroit où ils pourront vivre en étroit contact avec les indigènes. Les uns donc se déplacent beaucoup et cherchent à «faire des kilomètres», les autres, en revanche, s'efforcent d'apprendre et d'étudier. Nous en savons de ces derniers qui ont pris de simples occupations (juste pour pouvoir vivre) en Grèce, en Angleterre, dans les pays scandinaves et même en Afrique du Nord et qui sont rentrés au pays, enrichis et enthousiasmés d'une nouvelle expérience de la vie.

Pour les gens malheureusement «embourgeoisés» comme la plupart de nos concitoyens, il y a les voyages organisés et les congrès à l'étranger. Il est curieux de voir, à propos de congrès, comme certaines personnes les fréquentent avec assiduité: elles en quittent un pour paraître à un autre... c'est du reste tout un art de s'y faire déléguer. Il faut reconnaître que l'on

Ai funerali avvenuti in forma solenne con la partecipazione di largo stuolo di amici, di autorità comunali e consortili, delle rappresentanze della protezione antiaerea e dei pompieri di Locarno di cui il geom. Biasca era capo, dissero l'elogio del defunto, con commosse parole il sig. C. Traironi per il comune e gli amici di Caslano, il Cons. di Stato Janner, comandante della P. A. ticinese, il cap. Bariffi per la federazione pompieristica Ticinese, il geom. Maderni per la società del catasto e genio rurale del Ticino e il sindaco di Muralto.

Il geom. Biasca, il caro e valentissimo collega dal sorriso buono, dall'animo gentile, non è più.

Il suo ricorso resterà sempre vivo nel nostro cuore e il suo nome rimarrà scritto nella storia del Cantone Ticino fra quelli degli uomini che hanno modestamente ma tenacemente operato per il bene del Paese.

S.

Kleine Mitteilung

Freifächervorlesungen an der Eidg. Technischen Hochschule, Zürich

Die Vorlesungen des Sommersemesters beginnen am 27. April 1954 und schließen am 17. Juli 1954. Die Einschreibung für die Freifächer kann bis zum 15. Mai auf der Kasse der ETH erfolgen. Betreffend Einschreibungen auf schriftlichem Wege verweisen wir auf Seite 246 des Jahrganges 1953 dieser Zeitschrift.

Besonders zu empfehlende Vorlesungen:

PD Dr. E. Winkler:

Spezialfragen der Landesplanung	1 Stunde
Grundzüge der Siedlungsgeographie	1 Stunde

Prof. Dr. M. Zeller:

Einführung in die Photogrammetrie	2 Stunden
---	-----------

Berichtigung

Heft Nr. 3, Seite 66, Zeile 12:

anstatt $\frac{\partial f''}{\partial c} \frac{\partial f''}{\partial c}$ ist $\frac{\partial f''}{\partial b} \frac{\partial f''}{\partial b}$ zu setzen.

Sommaire

H. Stohler, Détermination graphique de la perte de durée de la clarté du soleil produite par des hautes constructions. – A. Jeanneret, Eindrücke aus Deutschland (Fortsetzung). – H. Textor, Transformation de la place de gare à Winterthur. – Rapport annuel du Comité central pour l'année 1953. – Petite Communication: Cours libres à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich pour le semestre d'été. – Correction.

Redaktion: Vermessungswesen und Photogrammetrie: Prof. Dr. C. F. Baeschlin, Zollikon, Chefredaktor;

Kulturtechnik: Dr. Hans Lüthy, Dipl.-Ing., Wabern bei Bern, Seftigenstraße 345;

Planung und Aktuelles: Dipl.-Ing. E. Bachmann, Paßwangstraße 52, Basel

Redaktionsschluß am 1. jeden Monats

Insertionspreis: 25 Rp. per einspaltige Millimeter-Zeile + 10⁰/₀ Teuerungszuschlag. Bei Wiederholungen Rabatt. Schluß der Inseratenannahme am 6. jeden Monats. Abonnementspreis: Schweiz Fr. 15.-; Ausland Fr. 20.- jährlich.

Expedition, Administration und Inseratenannahme: Buchdruckerei Winterthur AG., Telefon (052) 2 22 52