

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

**Band:** 52 (1954)

**Heft:** 6

**Artikel:** Die translative und die projektive Methode der astronomischen Geodäsie

**Autor:** Ledersteger, K.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-210951>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 18.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

1. Die Parallaxen in den Punkten 3 und 5 werden von Gliedern von  $\beta$  beeinflußt, die von erster Ordnung sind, während die Summe von  $p_3$  und  $p_5$  nur Glieder zweiter Ordnung enthält. Da das optisch-mechanische Verfahren die Verwendung der Summe verlangt, ist es auch in dieser Beziehung sehr günstig.

2. Sind die Parallaxen nicht sehr klein, so wird  $b_z$  leicht verfälscht und kann erst nach erfolgter Korrektur an  $\omega$  berichtigt werden.

Für  $\operatorname{tg} \alpha = 1$  und  $\operatorname{tg} \beta = 0,1$  ist der Fehler an  $b_z$  10 %. Diese Erscheinung wird allerdings praktisch kaum auffallen, da sie von anderen nicht berücksichtigten Einflüssen (unebenes Modell) überlagert ist.

## **Die translative und die projektive Methode der astronomischen Geodäsie**

*Von K. Ledersteger, Wien*

Während man bekanntlich unter „Geodätischer Astronomie“ den Inbegriff der theoretischen Grundlagen und Methoden der geographischen Ortsbestimmung einschließlich der dazu dienenden Instrumente versteht, kann man die Anwendung der astronomischen Messungsergebnisse auf die Lösung geodätischer Probleme als „Astronomische Geodäsie“ bezeichnen. Die astronomische Geodäsie umfaßt daher im wesentlichen die Theorie der Lotabweichungen und ihre Verwertung für die Bestimmung der Erdfigur einerseits und für die Lagerung und Orientierung der Dreiecksnetze andererseits. Beim Problem der Erdfigur scheidet man gewöhnlich die auf den Lotabweichungen beruhenden Lösungsversuche als „geometrische“ Methoden von den auf den Schweremessungen beruhenden „physikalischen“ Methoden, insoferne dabei, wie bei der Ableitung der bestanschließenden Ellipsoide, das analytische Gesetz der gesuchten Fläche vorgegeben ist oder, wie beim astronomischen Nivellement, eine bis zu einem gewissen Grade willkürliche rotationsellipsoidische Bezugsfläche zugrundegelegt wird. Diese Unterscheidung ist jedoch nicht ganz korrekt. Denn einmal liefert die astronomische Ortsbestimmung die absolute Richtung des Schwerevektors, die ebenso wie dessen Intensität, die Schwerebeschleunigung, eine physikalische Größe ist; zum anderen hat die exakte Bestimmung des Normalsphäroides der Erde oder des mittleren Erdellipsoides die Kenntnis der Undulationen des Geoides zur Voraussetzung, ist also sicherlich ein physikalisches Problem, wiewohl auch hier das mathematische Bildungsgesetz der Fläche vorgegeben ist.

Verursacht wurde diese etwas irreführende Unterscheidung von geometrischen und physikalischen Methoden durch den Umstand, daß die notwendige punktweise Beschreibung des irdischen Schwerfeldes zum Vergleich mit einer idealisierten Bezugsfläche zwingt. Dies gilt aber nicht nur für die Lotabweichungen, sondern ebenso für die Schwerestörungen und für die Undulationen des Geoides. Es geht daher nicht an, die Lotabweichungen als geodätische Fiktion zu bezeichnen. Mit gleichem Rechte

müßten sonst auch die Schwerestörungen und die Undulationen des Geoides als Fiktionen gelten! Selbstverständlich gibt es in jedem Punkt des Schwerfeldes nur eine Lotrichtung, die mit der Normalenrichtung im korrespondierenden Bildpunkt auf dem Referenzellipsoid verglichen werden kann. Somit ist die Kennzeichnung der „Lotabweichungen“ als geodätische Fiktion durch eine sprachliche Unkorrektheit begünstigt; nach einem Vorschlag *Brenneckes* dürfte man statt von Lotabweichungen nur von „Normalenabweichungen“ sprechen.

### 1. Projektion und Netzausbreitung

Nach der Wahl eines Referenzellipsoides, das in eine bestimmte achsenparallele Lage zum Geoid gebracht wird, entsprechen jedem Punkt  $P$  der physischen Erdoberfläche zwei Bildpunkte: der eine ist der Fußpunkt  $\bar{P}$  der Lotlinie von  $P$  auf dem Geoid, während für den Bildpunkt  $P^x$  auf dem Referenzellipsoid eine rein geometrische oder eine mehr analytische Definition offensteht. Unabhängig davon eröffnen sich für die Definition der Lotabweichung zunächst zwei Möglichkeiten, indem man entweder nach *Helmert* die Lotrichtung im Oberflächenpunkt  $P$  mit

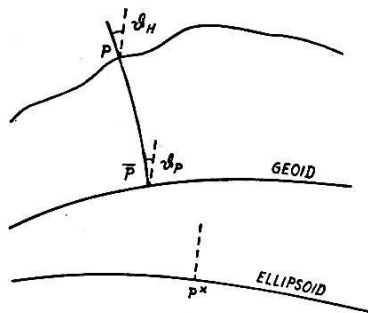


Fig. 1

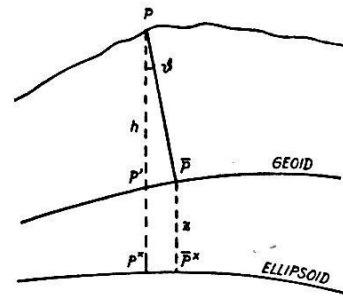


Fig. 2

der Normalenrichtung im zugehörigen Ellipsoidpunkt  $P^x$  oder nach *Pizetti* die Lotrichtung im Fußpunkt  $\bar{P}$ , d. h. die Geoidnormale, mit der Ellipsoidnormalen von  $P^x$  vergleicht. Wegen der Nichtparallelität der Niveaulächen sind die Lotlinien schwach gekrümmte Raumkurven. Vernachlässigt man diese Lotkrümmung, betrachtet also die Lotlinien genähert als Gerade, so fallen die beiden Definitionen von *Helmert* und *Pizetti* zusammen, sofern nicht zusätzliche Forderungen für die Korrespondenz der Punkte in die Definition einbezogen werden. Erfolgt die Punktkoordination, wie in Fig. 1 angenommen, nicht durch eine Projektion, so werden die Lotrichtung in  $P$  oder  $\bar{P}$  und die Normalenrichtung in  $P^x$  im allgemeinen windschief sein. Dann muß man zur Darstellung des Lotabweichungswinkels  $\vartheta$  entweder in  $P^x$  eine Parallele zur Lotrichtung von  $P$ , bzw. von  $\bar{P}$ , oder in  $P$  ( $\bar{P}$ ) eine Parallele zur Ellipsoidnormalen von  $P^x$  legen.

*Helmert* hat seiner Definition der Lotabweichungen die zusätzliche Vorstellung zugrundegelegt, daß die Oberflächenpunkte mittels der Ellipsoidnormalen auf das Referenzellipsoid projiziert werden, wodurch

sich der Winkel  $\vartheta$  unmittelbar in den Punkten  $P$  ergibt (Fig. 2). Auch die Reduktion der Beobachtungen der Triangulierung auf das Ellipsoid wird nach diesem Projektionsgedanken vorgenommen. Freilich wäre für die exakte Durchführung dieser Reduktionen die Kenntnis der Höhe der physischen Erdoberfläche über dem Referenzellipsoid erforderlich, die sich aus der Meereshöhe  $h$  und der Höhe  $z$  des Geoides über dem Ellipsoid algebraisch zusammensetzt. Die Unkenntnis der Geoidhöhen schadet für die Reduktion der Richtungen nicht, zumal über die Höhenlage des Ellipsoides derart verfügt wird, daß es die erste, auf das Geoid reduzierte Basis in ihrem Mittelpunkt schneidet. Hingegen macht sich diese Unkenntnis in größeren Netzen bei der Verwertung weiterer Grundlinien bereits störend bemerkbar. Wiewohl auch diese Grundlinien dann nur auf das Geoid und nicht, wie es eigentlich sein sollte, auf das Ellipsoid reduziert werden können, glaubt *Helmert* im Hinblick auf den Genauigkeitsabfall im trigonometrischen Netze nicht auf die Basisgleichungen verzichten zu müssen.

Wird jetzt das Netz nach seinen rein geometrischen Bedingungen ausgeglichen und ausgehend von den astronomischen Daten im Fundamentalpunkt durch geodätische Übertragung auf dem Referenzellipsoid ausgebreitet, so bleibt die Frage zu diskutieren, wieweit durch diesen Vorgang die angestrebte Projektion erzielt wird. Die Berechnung der Dreiecksexzesse wird weder von der Wahl der Ausgangskordinaten noch von den Parametern der Referenzfläche und von den vernachlässigten Geoidhöhen nennenswert beeinflusst. Auch die lokalen Verbiegungen des Geoides, die in rasch wechselnden, beträchtlichen Schwankungen der Krümmungsradien ihren Ausdruck finden, fallen kaum ins Gewicht. Denn bei der Projektion kommt es nur auf die Neigungsunterschiede zwischen Geoid und Ellipsoid an; ersetzt man beide Flächen durch ihre Schmiegungskugeln im Mittelpunkt des Vermessungsgebietes, so erzeugt z. B. bereits ein relativer Geoidan- und-abstieg von 1 m auf je  $2,5^\circ$  oder 278 km eine Verkürzung des Geoidradius von rund 1 km! Tatsächlich ergibt sich aus der folgenden Fig. 3 für einen Öffnungswinkel  $\gamma = 5^\circ$  eine relative Geoidhebung  $h = 96$  cm. Anders verhält es sich mit den systematischen Neigungsunterschieden zwischen Geoid und Referenzellipsoid bei den Großraumvermessungen. Solche systematische Neigungen sind durch drei Ursachen bedingt. Erstens verlaufen die Geoidundulationen in großen kontinentalen Wellen, so daß im allgemeinen auch für große Gebiete die mittlere Neigung zwischen Geoid und Erdellipsoid nicht verschwindet. Zweitens entstehen solche Unterschiede auch in dem Falle, daß im Fundamentalpunkt die relative Lotabweichung Null ist, daß sich also daselbst Geoid und Ellipsoid berühren, wenn die Achse des Referenzellipsoides merklich von der Achse des bestanschließenden Ellipsoides abweicht. Diese Unterschiede nehmen mit wachsendem Abstand vom Fundamentalpunkt zu. Ist z. B. die Achse des Referenzellipsoides um 1 km zu klein, so bewirkt dies in  $10^\circ$  Abstand vom Fundamentalpunkt eine relative Geoidhebung von 15 m, wie man aus der dritten der projektiven Lotabweichungsgleichungen (19) leicht findet. Dies wäre freilich nicht

schlimm; doch steigt der Fehler quadratisch an: in  $20^\circ$  Abstand erreicht die Geoidhebung schon 60 m, der zugehörige Maßstabfehler fast 1:100 000. Drittens entsteht ein systematischer Neigungsunterschied aus der Zulassung einer Lotabweichung  $\vartheta_0$  im Fundamentalpunkt, also aus einer relativen Parallelverschiebung des Ellipsoides. Im Azimut der Lotabweichung  $\vartheta_0$  bedingt dies in  $\psi^\circ$  Abstand vom Fundamentalpunkt zufolge derselben Gleichung eine Geoidhebung von  $-31 \sin \psi \cdot \vartheta_0''$  m; für  $\vartheta_0 = +10''$  und  $\psi = 10^\circ$  resultiert z. B. eine Geoidsenkung von 54 m, der eine Maßstabvergrößerung von rund 1:118 000 entsprechen würde. Diese Betrachtungen zeigen, daß der Maßstab der Projektion gar nicht einheitlich ist. Dies ist auch selbstverständlich; denn die Punktkonfiguration der Projektion ändert sich jeweils mit der relativen Lage von Geoid und Ellipsoid.

Demgegenüber ist die übliche Netzausgleichung wesentlich durch die Konstanz des Maßstabes gekennzeichnet, und es muß daher noch die Rolle der Basisgleichungen bei der Netzausgleichung erörtert werden, wozu wir folgende vereinfachende Annahmen machen. Das Geoid falle im Vermessungsgebiet mit seinem bestanschließenden Ellipsoid zusammen, dessen Achse um 1 km kleiner sei als die Achse des Referenzellipsoides. Unter Vernachlässigung der Abplattung werden beide Ellipsoide durch Kugeln vom Radius 6378, bzw. 6377 km ersetzt. Die beiden durch eine Dreieckskette verbundenen

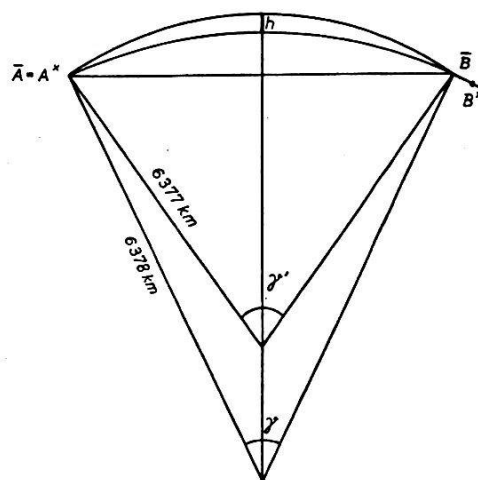


Fig. 3

Punkte  $A$  und  $B$  mögen demselben Meridian angehören und auf dem Schnittkreis der zwei Kugeln liegen. Eine bei  $A$  auf dem Geoid gemessene Grundlinie bestimmt den Maßstab der auf der Referenzkugel ausgebreiteten Kette. Hält man  $\bar{A} = A^x$  fest, so wird  $B^x$  um denselben Betrag rechts von  $\bar{B}$  zu liegen kommen, um den der Geoidbogen  $b$  größer ist als der Bogen  $b'$ . Auf elementarem Wege findet man z. B. für die zwei Öffnungswinkel  $10^\circ$  und  $50^\circ$  des Bogens:

$$\gamma = 10^\circ, \gamma' = 10^\circ + 5.67'', (b - b') = 0.9 \text{ m}, h = 3.8 \text{ m};$$

$$\gamma = 50^\circ, \gamma' = 50^\circ + 30.20'', (b - b') = 61.0 \text{ m}, h = 103.7 \text{ m}.$$

In letzterem Falle bedeutet dies wegen  $b = 5565.916$  km bei der üblichen Netzausbreitung gegenüber der Projektion der Geoidpunkte eine mittlere Maßstabvergrößerung von rund 1:90 000, während bei dem kleinen Öffnungswinkel der Effekt weit unter der Triangulierungsgenauigkeit liegt. Wäre außer in  $A$  auch in  $B$  und  $C$  je eine Basis gemessen worden und die mittlere wegen  $h = 103.7$  m auf die Referenzfläche reduziert worden, so entspricht dem eine Verkürzung um  $157.10^{-9} \cdot h_m$  oder eine



Maßstabreduktion von 1 : 61500. Setzt man diese Verkürzung proportional dem Abstand  $s$  vom Punkte  $A$ , dann wird:

$$b'_{/2} = \int_A^C (1 - ks) ds = \frac{b}{2} - k \cdot \frac{b^2}{8} = b_{/2} - 22.6 \text{ m} \quad (1)$$

mit 
$$k = \frac{157 \cdot 10^{-9} \cdot h_m}{(b_{/2})_m} = \frac{32 \cdot 52 \cdot 10^{-6}}{b_m}$$

Es bleibt also noch immer ein Fehler von 7.9 m auf 2783 km (1 : 350000). Man erkennt, daß die Anpassung der Netzausbreitung an die Projektion u. a. von der Zahl und Verteilung der Grundlinien abhängt, die möglichst exakt wegen der Geoidhöhen auf das Referenzellipsoid reduziert werden müssen. Die Grundlinien sind bei geringer Dichte namentlich an den Stellen der Extrema der Geoidhöhen erforderlich; wären im vorliegenden Beispiel nur bei  $A$  und  $B$  Grundlinien gemessen, so würde die Basisgleichung überhaupt keine Verbesserung des mittleren Netzmaßstabes bringen.

Zusammenfassend darf festgestellt werden: Der Unterschied zwischen der gewöhnlichen Netzausbreitung und einer reinen Projektion ist für kleine Netze unerheblich. Faßt man die Längen- und Breitendifferenzen der Netzpunkte gegenüber dem Ursprung als kleine Größen 1.0. auf, so ist, wie man aus den späteren Lotabweichungsgleichungen (14) und (19) nachweisen kann, der Effekt auf die Punktlage klein von dritter, auf die Azimute der Netzseiten klein von zweiter Ordnung. Für die derzeit im Vordergrund des Interesses stehenden kontinentalen Netze übertrifft dieser Effekt aber beträchtlich die innere Unsicherheit der Triangulierungen. Mithin scheiden sich an diesem Punkte die „translative“ und die „projektive“ Methode der astronomischen Geodäsie. Um aber die typischen Charakteristika der beiden Methoden streng systematisch beschreiben zu können, müssen noch eingehende Betrachtungen über die *Laplacesche* Gleichung vorangestellt werden.

## 2. Die *Laplacesche* Gleichung und ihre theoretischen Widersprüche

Durch die *Laplacesche* Gleichung werden bekanntlich die azimutale und longitudinale Komponente der Lotabweichung miteinander verknüpft und es tritt daher in ihr neben dem Standpunkt  $P_1$  auch der Zielpunkt  $P_2$  der Azimutmessung in Erscheinung. Nach *Helmert* ist die theoretische Gültigkeit der Gleichung

$$(\alpha' - \alpha)_1 - (\lambda' - \lambda)_1 \sin \varphi_1 = 0 \quad (2)$$

an die beiden Voraussetzungen gebunden, daß die Achsen von Geoid und Referenzellipsoid parallel sind und daß der Zielpunkt der Azimutmessung im Horizont des Standpunktes liegt, widrigenfalls das ellipsoidische Azimut vor seiner Einführung in die Gleichung eine Reduktion  $d_1\alpha$  wegen

der Lotabweichung des Standpunktes erfordert, die man besser als Reduktion vom astronomischen auf das ellipsoidische Zenit bezeichnet. Könnte der tatsächliche Zielpunkt beibehalten werden, so wäre damit die Frage der azimutalen Lotabweichungskomponente bereits gelöst. Weil aber in die *Laplacesche* Gleichung natürlich die definitiven geodätischen Azimute und Längen des ausgeglichenen Netzes eingeführt werden und weil bei der gewöhnlichen Netzausbreitung die Punkte  $P$  und  $P^x$  gar nicht in derselben Ellipsoidnormalen liegen, hat die Verknüpfung der *Helmertschen* Lotabweichungsdefinition mit der Netzausbreitung zu mancherlei Irrtümern Anlaß gegeben.

Auch *Pizzettis* Lotabweichungsdefinition ist in Wirklichkeit enger als sie eingangs gegeben wurde. Bei ihm erfolgt die Koordination der Geoidpunkte  $\bar{P}$  und der Ellipsoidpunkte  $P^x$  gleichfalls durch eine reine Projektion, wobei es wegen der verhältnismäßig geringen Normalabstände von Geoid und Ellipsoid gleichgültig ist, ob diese Projektion mittels der Geoidnormalen oder mittels der Ellipsoidnormalen vorgenommen wird. Denkt man überdies an das eindeutig gelagerte mittlere Erdellipsoid, das fast vollständig mit dem Normalsphäroid zusammenfällt und mit diesem Mittelpunkt und Achse gemeinsam hat, so ergeben sich damit die „absoluten Lotabweichungen“ im Gegensatz zu den bisherigen relativen Lotabweichungen, die ja von der Wahl des Referenzellipsoides und seiner Lage, d. h. von der Wahl der Ausgangsdaten im Fundamentalpunkt abhängen. Um aber sowohl der Netzausbreitung wie auch der Projektion gerecht zu werden, behalten wir von *Pizzettis* Definition nur die exakte Gegenüberstellung geoidischer und ellipsoidischer Elemente bei. Ohne uns hinsichtlich der Punktkoordination von vornherein festzulegen, definieren wir also die azimutale Lotabweichungskomponente durch

$$(\alpha \bar{P}_1' \bar{P}_2 - \alpha P^x_1 P^x_2) \quad (3)$$

Sie gilt gleicherweise für die Projektion der Oberflächenpunkte oder der Geoidpunkte und für die übliche Netzausbreitung, wobei aber jeder dieser drei Fälle eine andere Reduktion des ellipsoidischen Azimutes erfordert. Damit ist aber die dritte, fast stillschweigende Voraussetzung *Helmerts* für die theoretische Richtigkeit der *Laplaceschen* Gleichung gefallen, nämlich die Identität des astronomischen und ellipsoidischen Zielpunktes.

Zufolge (3) erfahren die beobachteten astronomischen Azimute in allen Fällen dieselbe Reduktion, für die *Vening Meinesz*<sup>1</sup> unter Vernachlässigung der Lotlinienkrümmung, jedoch unter Beachtung der Lotabweichungen  $\xi, \eta$  im Standpunkt und Zielpunkt die zweite Näherung

$$da' = \frac{h_2}{s} [(\xi_2 - \xi_1) \sin \alpha_{12} - (\eta_2 - \eta_1) \cos \alpha_{12}] + \frac{h_2 e^2}{2a} \rho'' \cos^2 \varphi_1 \sin 2\alpha_{12} \quad (4)$$

<sup>1</sup> F. A. *Vening Meinesz*: Physical Geodesy, Koninkl. Nederl. Akademie v. Wetenschappen Amsterdam, Proceedings, Series B, 56, Nr. 1, 1953.

gefunden hat. Die Formel gibt die Drehung der astronomischen Vertikalschnittsebene beim Übergang vom tatsächlichen Zielpunkt  $P_2$  auf den geoidischen Fußpunkt  $\bar{P}_2$ , also die Reduktion wegen der Meereshöhe  $h_2$  des Zielpunktes, die aus der windschiefen Lage der beiden Lotlinien zueinander folgt. In (4) bedeuten ferner  $\alpha_{12}$  das Azimut der Visur,  $s$  die Seite  $Px_1Px_2$ ,  $a$  und  $e^2$  Achse und Exzentrizität des Referenzellipsoides. Legt man die Zahlenwerte des *Hayfordschen* Ellipsoides zugrunde, so kann der zweite Term auch

$$0'' \cdot 1087 h_{2, \text{ km}} \cos^2 \varphi_1 \sin 2\alpha_{12} \quad (4a)$$

geschrieben werden.

(Fortsetzung folgt)

## Trinkwasser aus Seen

*Bn.* Der Trinkwasserverbrauch nimmt ständig zu und hat heute vor allem in den dichtbesiedelten Industriegebieten einen derartigen Umfang angenommen, daß die Wasserbeschaffung immer schwieriger wird.

Um die Mitte des vorigen Jahrhunderts, als man in den Städten noch mit 30 bis 40 Liter Wasser pro Kopf und Tag der Bevölkerung auskam, genügten im allgemeinen die in der Nähe der Orte gelegenen natürlichen Quellen. Das ständige Anwachsen der Städte und die Industrialisierung, die wachsende Hygiene, wobei der Verbrauch zu Beginn des 20. Jahrhunderts im Mittel bereits 160–170 Liter Wasser pro Tag und Einwohner betrug, führte zum Anzapfen des Grundwassers. Die Behörden und Fachleute waren überzeugt, mit dem Grundwasser für alle Zeiten einen unerschöpflichen und einwandfreien Wasserlieferanten gefunden zu haben. Heute, da die Städte im Mittel zirka 400 Liter Wasser pro Kopf und Tag benötigen, dazu das Abwasser meist ohne Klärung dem Vorfluter übergeben wird, beginnen sich auch die Grundwasser zu erschöpfen oder zu verunreinigen.

Vor diesem wasserwirtschaftlichen Grundproblem, das sich nicht nur in den Industriegebieten, sondern früher oder später in ganz Europa abzeichnen wird, steht gegenwärtig die Stadt Stuttgart. Diese süddeutsche Industriestadt von rund 500 000 Einwohnern kann ihren Wasserbedarf nur noch knapp durch Quellen und Grundwasserfassungen decken und begann vor einigen Jahren nach einem geeigneten Wasserlieferanten Umschau zu halten. Die süddeutsche Landesplanung, die sich für diese wichtige Frage zu interessieren begann, stellte nun zuerst einmal fest, daß nicht nur die Stadt Stuttgart, sondern auch viele kleinere Industriestädte wie Rottweil, Tübingen, Ludwigsburg, Eßlingen, Spaichingen usw., zusätzliches Wasser benötigten und daher eine gemeinsame Großanlage volkswirtschaftlich am zweckmäßigsten wäre. Der gesamte Wasserzuschuß für die ganze Mangelregion wurde auf maximal 250 000 m<sup>3</sup> pro Tag berechnet.