A propos de deux invariants relatifs aux projections conformes en géodésie

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **53 (1955)**

Heft 6

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-211778

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse des ingénieurs du Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 6 • LIII. Jahrgang | Erscheint monatlich | 14. Juni 1955

A propos de deux invariants relatifs aux projections conformes en géodésie

par A. Ansermet

A l'occasion du 100^e anniversaire de la mort de C. F. Gauß notre Rédacteur en chef, qui comme on le sait est un des meilleurs connaisseurs des travaux du génial mathématicien et géodésien, a rappelé tout ce que lui doit la science géodésique. Le but de la présente note est de rendre plus accessible aux lecteurs de notre Revue certains de ces problèmes en les présentant sous une forme aussi peu abstraite que possible.

Remarques préliminaires

Faisons tout d'abord l'hypothèse que le domaine considéré autour de l'origine des coordonnées est relativement restreint; les calculs se prêtent alors à des développements en série.

Partons de l'équation initiale ([1] p. 253):

$$(1) \qquad \Lambda = \frac{1+n}{2n} \cos h \left(\frac{\sqrt{n}}{R}\,x\right) - \frac{1-n}{2n} \cos \left(\frac{\sqrt{n}}{R}\,y\right) \qquad o \leq n \leq 1$$

définissant une projection conforme dite parfois à «variables séparées». Λ est le rapport de similitude, n le paramètre de la projection tandis que $R = \sqrt{MN}$ (rayon sphère de référence). En faisant subir aux axes de coordonnées (x, y) une rotation les variables ne sont plus séparées mais les invariants dont il sera question ici sont indépendants de l'orientation des axes; les calculs sont seulement un peu moins simples.

L'équation (1), développée, devient ([4] p. 109):

$$(2) \qquad (\Lambda - 1) = + \frac{1}{4R^2}(1+n)\,x^2 + \frac{1}{48R^4}(1+n)\,n\,x^4 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{4R^2}(1-n)\,y^2 - \frac{1}{48R^4}(1-n)\,n\,y^4 + \ldots\ldots$$

Pour le calcul des déformations et altérations de courbure géodésique on peut s'en tenir en général aux valeurs principales (2e ordre). Pour Λ donné et n variable l'équation (2) représente donc un faisceau linéaire de coniques (Büschel) circonscrit à un carré. Si Λ varie (n constant) ce sont des ellipses homothétiques. Ces notions connues étant rappelées il est aisé de calculer

l'altération totale de courbure géodésique
subie par un contour fermé (invariant).

L'équation initiale sera ici ([1] p. 260):

$$d\vartheta = \frac{1}{\Lambda}\left(\frac{\delta\Lambda}{\delta x}\sin\vartheta - \frac{\delta\Lambda}{\delta y}\cos\vartheta\right) ds \tag{3}$$

qui exprime, en *radians*, l'angle de contingence relatif à la transformée plane d'un arc de géodésique et calculons, pour un arc ou côté $P_1\,P_2$, l'expression (voir [6]):

$$\int_{P_1}^{P_2} d\vartheta = \Sigma = \Sigma_0 + \Sigma_n \tag{4}$$

qui est fractionnée en un terme indépendant de n et un terme variant linéairement avec n:

$$\Sigma_0 \cong \frac{1}{2R^2}(x_1\,y_2 - x_2\,y_1); \quad \Sigma_n \cong \frac{n}{2R^2}(x_2\,y_2 - x_1\,y_1) \tag{5}$$

Σ_0 étant l'excès sphérique ou sphéroïdique du triangle $OP_1\,P_2$ (O = origine), tandis que pour $n = 1$:

(6) $\quad \Sigma \cong \dfrac{1}{2R^2}(x_1 + x_2)(y_2 - y_1)$, toujours en radians, qui est l'excès sphérique relatif au trapèze compris entre la transformée $P_1 P_2$ et sa projection orthogonale sur l'axe *neutre* ($x = o$) de la projection conforme. Ces résultats ne sont pas nouveaux.

Considérons maintenant un contour $P_1\,P_2\,P_3\,\ldots\,P_i$, inscrit par ex. dans une ellipse de centre O, l'indice i pouvant croître indéfiniment. Pour ce contour fermé on a:

$$\oint d\vartheta = \Sigma_{01} + \Sigma_{02} + \ldots + \Sigma_{0i} + \frac{n}{2R^2}\Big\{(x_2\,y_2 - x_1\,y_1) + \\ + (x_3\,y_3 - x_2\,y_2) + \ldots + (x_1\,y_1 - x_i\,y_i)\Big\} = \text{excès sph. total} \tag{7}$$

Le groupe de termes en n est éliminé et l'*invariance*, par rapport à n, de l'altération totale de courbure géodésique du contour fermé est vérifiée. Ceci bien entendu dans la mesure où on peut s'en tenir aux valeurs principales, ainsi qu'on l'a déjà énoncé. Cette solution d'un problème fondamental paraît simple. C'est ce théorème que C. F. Gauß a traité de façon magistrale sous une forme tout à fait générale.

Second problème d'invariance; le critère de G. Darboux

Notre Revue a déjà fait allusion à cette théorie: L'éminent mathématicien français, trouvant «quelque peu confuse» la théorie connue de Tissot, ([1] p. 246) a énoncé le principe ci-après repris du reste de Tchebychef ([3], [5]):

1° Le contour du territoire à cartographier est une isomètre de la projection conforme (Λ constant).

2° La valeur moyenne du carré du gradient de Log Λ, pour le dit territoire, est un extrêmum (critère de G. Darboux).

$$(8) \qquad \int\int\left[\left(\frac{\delta\, Lg\, \Lambda}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta\, Lg\, \Lambda}{\delta y}\right)^2\right] dx\, dy \rightarrow \text{extrêmum}$$

Ce problème a été suffisamment étudié ([3], [5]):

Comparons l'équation des isomètres homothétiques (n donné)

$$(9) \qquad (\Lambda - 1) \cong \frac{1}{4R^2}\left[(1+n)\, x^2 + (1-n)\, y^2\right]$$

et (10) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ qui est l'équation de l'ellipse circonscrite au territoire.

Il faut distinguer 2 cas:

$$(11) \qquad n = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1-n}{1+n} = \frac{a^2}{b^2}$$

c'est celui qui répond à la condition (8)

$$\text{ou} \qquad n \neq \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \qquad \left(\text{paramètre } n' = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}\right)$$

Le calcul de l'extrêmum est facile en fonction des moments d'inertie:

$$\int\int x^2\, d\sigma = \frac{\pi}{4}\, a^3 b \quad \text{et} \quad \int\int y^2 d\sigma = \frac{\pi}{4}\, ab^3 \quad \text{où} \quad d\sigma = dx\,.\,dy$$

et en remarquant que $\int\int d\sigma = \pi\, ab$.

La fonction variable a la forme, après division par $\pi\, ab$:

$$(12) \qquad C\left\{(1+n)^2\, a^2 + (1-n)^2\, b^2\right\}$$

où C est un facteur. Il y a extrêmum pour:

$$(1+n)\, a^2 - (1-n)\, b^2 = o$$

L'ellipse-enveloppe est une isomètre et, en comparant les expressions (9) et (12), on voit que:

$$(1+n)^2 \frac{(\Lambda - 1)}{1+n} + (1-n)^2 \cdot \frac{(\Lambda - 1)}{1-n}$$

est indépendant du paramètre de forme n. Pour une valeur Λ donnée c'est un invariant.

En d'autres termes la valeur moyenne du carré du gradient de Log Λ demeure inchangée pour toutes les ellipses-enveloppes appartenant à un même faisceau linéaire (circonscrites à un carré).

L'orientation des axes de coordonnées ne joue pas de rôle; il suffit de considérer qu'une des courbes du faisceau est un cercle.

La question se pose encore de savoir ce que devient cette propriété d'invariance dans le cas général où le territoire est étendu et la surface quelconque. C'est un problème de mathématiques pures.

Il faut se baser sur la théorie de G. Darboux ([3]); ce dernier a posé:

$$\operatorname{Log} \Lambda = \varphi$$

et, remarquant que le gradient de φ est égal à $\sqrt{\Delta\varphi}$, introduit comme relation initiale le paramètre différentiel de 1er ordre:

$$\Delta\varphi = \frac{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2} \tag{13}$$

appelé aussi 1er différentiateur de Beltrami (voir [2]). La condition à réaliser est donc:

$$\iint \Delta\varphi \, . \, d\sigma \rightarrow \text{extrêmum.} \tag{14}$$

On sait que E, F, G sont les grandeurs fondamentales de 1er ordre tandis que u et v sont des coordonnées curvilignes. Pour le surplus le mémoire susmentionné contient tous les développements.

En résumé il a paru opportun de consacrer quelques lignes, d'une part à un célèbre théorème de Gauß que l'on ne peut guère présenter sous une forme plus simple. D'autre part une très modeste contribution à l'étude des projections fait l'objet de la seconde partie de cet exposé.

Littérature:

[1] *Baeschlin C. F.* Lehrbuch der Geodäsie (Zürich, Orell-Füßli).
[2] *Blaschke W.* Differentialgeometrie (Berlin, Springer).
[3] *Darboux G.* Sur la construction des cartes géographiques. – Sur une méthode de Tissot relative à la construction des cartes (Bulletin sciences mathématiques 1911, p. 23 et 55).
[4] *Laborde J.* Traité des projections, fasc. 4 (Paris, Hermann).
[5] *Ansermet A.* L'application à la géodésie d'un théorème de Tchebychef.
[6] *Ansermet A.* Calcul des déformations dans les réseaux géodésiques (Revue suisse des mensurations, Nos 4, 5, 1944, et 4, 1949).