

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 56 (1958)

Heft: 3

Artikel: Normalsphäroid und Niveauellipsoid [Schluss]

Autor: Ledersteger, K.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-214364>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 11.12.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse des ingénieurs du Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 3 • LVI. Jahrgang

Erscheint monatlich

11. März 1958

Normalsphäroid und Niveauellipsoid

Von K. Ledersteger, Wien

(Schluß)

Bringt man die Gleichung (13) für K in die Form:

$$J = \frac{K}{a^2} = \frac{2}{3} \alpha + \frac{2}{21} \delta - 11536 \cdot 10^{-7}, \quad (13a)$$

so könnte man schon aus der empirischen Unsicherheit von K und aus dem geringen Einfluß von δ die praktische Berechtigung des Niveauellipsoides erschließen. Trotzdem berechnen wir zunächst für J in Funktion von α und δ innerhalb eines gewissen Wahrscheinlichkeitsbereiches eine kleine Tabelle mit doppeltem Eingang. In der letzten Zeile sind die zugehörigen maximalen Erhebungen h_m des Niveausphäroides über sein achsengleiches Rotationsellipsoid ausgewiesen. Schließlich ist der für das Niveauellipsoid mit der Hayfordschen Abplattung 1 : 297 resultierende internationale Näherungswert durch Kursivschrift ausgezeichnet.

J (in Einheiten 10^{-7})

$\alpha \backslash \delta$	+ 45	+ 65	+ 85	+ 105	+ 125	+ 145	+ 165
1 : 300	10 691	10 692	10 694	10 696	10 698	10 700	10 702
1 : 299	765	767	769	771	772	774	776
1 : 298	840	842	843	845	847	849	851
1 : 297	915	917	919	<i>10 921</i>	923	925	926
1 : 296	991	993	995	997	998	11 000	002
1 : 295	11 067	069	071	073	075	077	079
1 : 294	144	146	148	150	152	154	155
h_m	+ 9,6	+ 6,4	+ 3,2	0,0	— 3,2	— 6,4	— 9,6 m

Die Größe J läßt sich empirisch aus den Störungen in der Bewegung des Mondes bestimmen. Denn der abgeplattete Erdkörper übt auf den Mond eine andere Anziehungskraft aus als eine homogene oder geschichtete Kugel, deren Masse im Mittelpunkt vereinigt gedacht werden darf. Hierdurch erfährt die Mondbahn Abweichungen von der idealen Kepler-Bewegung, und die Ungleichheiten der Mondbewegung in Breite und Länge gestatten einen Rückschluß auf die Differenz der Hauptträgheitsmomente der Erde. Nach *F. Tisserand* [5] ist die Wirkung von J auf die Länge des Mondes durch

$$\Delta \lambda_{\zeta} = +6540'' J \sin \Omega \quad (25a)$$

und auf seine Breite durch

$$\Delta \beta_{\zeta} = -7439'' J \sin \lambda_{m\zeta} \quad (25b)$$

gegeben; erstere hat eine Periode von rund $18\frac{2}{3}$ Jahren, letztere von etwa 27 Tagen. Somit kann die Störung in Breite sicherer bestimmt werden als die in Länge, weshalb *P. A. Hansen* [6] allein aus der beobachteten Breitenstörung auf Grund seiner eigenen theoretischen Entwicklungen für die Mondbewegung 1865 den Wert

$$J = 0,001070 \quad (26a)$$

ableitete, dem die Abplattung 1:299,95 des Niveauellipsoides entspricht. Ähnlich folgt aus der Störung in Länge

$$J = 0,001103 \text{ und } \alpha = 1:295,56. \quad (26b)$$

Helmert [7] erschließt aus der Diskussion der Hansenschen Werte im Mittel

$$J = 0,0010865, \quad (26c)$$

entsprechend einer Abplattung 1:297,74 des Niveauellipsoides.

Nach den neueren Entwicklungen für die Mondbewegung von *G. W. Hill* [8] und *E. W. Brown* [9] ist

$$J = 0,001105, \quad (26d)$$

woraus sich die Abplattung des Niveauellipsoides zu 1:295,30 ergibt. Wenn sich andererseits *Brown* auf Grund einer zusammenfassenden Übersicht über alle eigenen Ergebnisse schließlich veranlaßt sah, seinen Mondtafeln die Clarkesche Abplattung 1:294 zugrunde zu legen, so muß festgestellt werden, daß sich diese auf keinen Fall mit (26d) kombinieren läßt. Denn löst man (13a) nach δ auf:

$$\delta = 10,5 J + 121128 \cdot 10^{-7} - 7 a, \quad (13b)$$

so erhält man damit $\delta = -945 \cdot 10^{-7}$ und $h_m = +167,4$ m, ein gänzlich unmögliches Ergebnis, welches die Clarkesche Abplattung widerlegt.

Tatsächlich läßt sich diese aus der stärkeren kontinentalen Geoidkrümmung erklären, die in niederen Breiten zwangsläufig eine zu große Abplattung vortäuscht.

Der von *A. Berroth* [10] empfohlene Wert $0,00108935 \pm 2 \cdot 10^{-6}$ für die «statische Abplattung», wie er die Größe J treffend nennt*, darf hier nicht herangezogen werden, weil er das Resultat des Versuches ist, im Anschluß an *W. de Sitters* [11] Neubestimmung der astronomischen Konstanten aus allen astronomischen und geodätischen Daten ein einheitliches Wertesystem für die Masse, die Dichte und die Hauptträgheitsmomente der Erde abzuleiten. Demgegenüber führt *K. Jung* [12] lediglich aus astronomischen Beobachtungen als derzeit besten Wert wieder

$$J = 0,001106 \pm 0,00001 \quad (26e)$$

an, einem Niveauellipsoid der Abplattung $1 : (295,17 \pm 1,30)$ zugehörig.

Aus dieser kurzen Rückschau erkennt man, daß die empirische Bestimmung der Größe J aus den Ungleichheiten der Mondbewegung in Breite und Länge noch mancherlei zu wünschen übrig läßt. Dennoch hat man der statischen Abplattung seit *Laplace* eine besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Gestattet doch dieses Verhältnis

$$J = \left(C - \frac{A + B}{2} \right) : a^2 E$$

der Differenz der Hauptträgheitsmomente zum denkbar größten Trägheitsmoment, das mit der Gesamtmasse im Abstand des Äquatorradius gebildet werden kann, im Gegensatz zur dynamischen Abplattung eine völlig hypothesenfreie, weil von der Dichteverteilung im Erdinnern unabhängige Bestimmung der Abplattung. Zumindest aber kann sie als willkommene Kontrolle der aus dem Schwerfeld gewonnenen Resultate verwertet werden. Hingegen erscheint vorläufig eine halbwegs sichere Bestimmung des Parameters δ aus (13b) bei der empirischen Streuung der numerischen Werte (26) wegen seines ungünstigen Koeffizienten als ziemlich aussichtslos.

Bedenkt man aber, daß in naher Zukunft aus den Beobachtungen der künstlichen Satelliten ein wesentlich schärferer Wert für J zu erwarten ist und daß andererseits eine gleichfalls hypothesenfreie, rein gravimetrische Bestimmung der Abplattung des Normalsphäroides möglich ist [3], dann steht einer Auswertung der Gleichung (13b) nichts mehr im Wege. Freilich wird diese Gleichung auch dann den Parameter δ nur mit einer mäßigen Genauigkeit liefern können. Wären J und a je mit einem mittleren Fehler von $\pm 2 \cdot 10^{-7}$ bekannt, so würde sich δ mit einem mitt-

* Während nämlich die «dynamische» Abplattung aus der Präzessionskonstanten, also aus der Bewegung der Erdachse im Raume, abgeleitet werden kann, spielt die «statische» Abplattung eine wichtige Rolle bei der Bewegung des Mondes, um die ruhend gedachte abgeplattete Erde.

leren Fehler von $\pm 25 \cdot 10^{-7}$ ergeben. Man könnte also immerhin nicht nur gänzlich hypothesenfrei die maximale Erhebung des Normalsphäroides über das mittlere Erdellipsoid auf etwa 3 bis 4 m genau festlegen, sondern vor allem feststellen, ob der tatsächliche δ -Wert genügend nahe bei $+105 \cdot 10^{-7}$ liegt, um die an sich willkürliche Annahme des Niveauellipsoides als bequeme und brauchbare Approximation physikalisch zu rechtfertigen. Diese Berechtigung wird man aber wegen der relativ großen Unsicherheit als gegeben betrachten dürfen, wenn das resultierende δ innerhalb der Grenzen der obigen Tabelle liegt. Dann liefert J eine gänzlich unabhängige und daher sehr wichtige Kontrolle für die aus den gravimetrischen Höhen abgeleitete Abplattung des Normalsphäroides oder des mittleren Erdellipsoides.

Ergänzend zu der an anderer Stelle [3] vorgeschlagenen hypothesenfreien Lösung des Problems der Erdfigur sei noch folgendes bemerkt. Könnte wider Erwarten der δ -Wert des Normalsphäroides genügend sicher bestimmt werden, so bietet es natürlich keinerlei Schwierigkeit, die für das Niveauellipsoid gegebene Lösung auf das wirkliche Normalsphäroid auszudehnen. Die Ableitung der Abplattung und der Geoidundulationen ist von δ gänzlich unabhängig; diese Größen beziehen sich ja unmittelbar auf das mittlere Erdellipsoid. Hingegen muß jetzt die Formel für die theoretische Schwere auf dem Normalsphäroid

$$\gamma = \gamma_0 \left[1 + \beta \sin^2 \varphi - \frac{\beta_4}{4} \sin^2 2\varphi \right]$$

etwas anders berechnet werden. Die beiden Koeffizienten β und β_4 ergeben sich direkt aus den beiden ersten Gleichungen (13). Ferner findet man wieder mit den aus der Entwicklung der Freiluftschwerewerte gewonnenen Größen γ_0' , a' und δ' nach der dritten Gleichung (13)

$$\frac{k^2 E}{a^2} = \frac{\gamma_0'}{\left[1 - 51919 \cdot 10^{-7} + a' + \frac{4}{7} \delta' \right]}$$

Damit folgt für die Äquatorschwere auf dem Normalsphäroid

$$\gamma_0 = \gamma_0' + d\gamma_0 = \frac{k^2 E}{a^2} \left[1 - 51919 \cdot 10^{-7} + a + \frac{4}{7} \delta \right]$$

oder

$$d\gamma_0 = \frac{\gamma_0' \left[(a - a') + \frac{4}{7} (\delta - \delta') \right]}{\left(1 - 51919 \cdot 10^{-7} + a' + \frac{4}{7} \delta' \right)} \approx \gamma_0' \left(da + \frac{4}{7} d\delta \right), \quad (27)$$

wenn man

$$da = (a - a'), \quad d\delta = (\delta - \delta')$$

setzt. Da schließlich die moderne Geodäsie an einer einheitlichen Bezugsfläche sowohl für die Triangulationen wie auch für das Schwerfeld interessiert ist, müssen wir die Schwereformel vom Normalsphäroid noch auf das mittlere Erdellipsoid transformieren. Von dieser Transformation wird wegen der letzten Gleichung (13) nur der dritte Koeffizient der Schwereformel betroffen. Verwendet man zur Reduktion den Freiluftgradienten $3086 \cdot 10^{-7}$ gal/m, so wird das Korrektionsglied

$$\begin{aligned} & \left[\frac{a_m}{4} (105 \cdot 10^{-7} - \delta) 3086 \cdot 10^{-7} \sin^2 2\varphi \right] \text{gal} = \\ & = - \frac{\gamma_0}{4} \left[\frac{0,6378388 (\delta - 105 \cdot 10^{-7}) 3086}{978,049} \right] \sin^2 2\varphi = \\ & = - \frac{\gamma_0}{4} 2,01255 (\delta - 105 \cdot 10^{-7}) \sin^2 2\varphi \end{aligned}$$

und man erhält für die theoretische Schwereverteilung auf dem mittleren Erdellipsoid endgültig:

$$\begin{aligned} \gamma = \gamma_0 \left\{ 1 + \left(86524 \cdot 10^{-7} - a + \frac{2}{7} \delta \right) \sin^2 \varphi - \right. \\ \left. - (1,253 \delta - 73 \cdot 10^{-7}) \sin^2 2\varphi \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Literatur:

- [1] *F. Hopfner*: Physikalische Geodäsie, Leipzig 1933
- [2] *K. Jung*: Figur der Erde, Handbuch der Physik, Band 47, Berlin 1956
- [3] *K. Ledersteger*: Theoretischer Versuch einer exakten Lösung des gesamten Problems der Erdfigur, Sondernummer 2 der Schweizerischen Zeitschrift für Vermessung, Zürich 1957
- [4] *C. Somigliana*: Teoria del campo gravitazionale dell'ellissoide di rotazione, Mem. Soc. Astr. Ital. IV, 1929
- [5] *F. Tisserand*: Traité de Mécanique Céleste, Tome II, Paris 1892, S. 367
- [6] *P. A. Hansen*: Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen, Abh. d. kön. sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, 1864 und 1865
- [7] *F. R. Helmert*: Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie, Bd. II, Leipzig 1884, S. 472
- [8] *G. W. Hill*: Determination of the Inequalities of the Moons Motion which are Produced to the Figure of the Earth, Astr. pap. 3, 1884 = Works 2
- [9] *E. W. Brown*, Astr. Soc. Month. Not. 74 (1914), S. 563 und 75 (1915), S. 508
- [10] *A. Berroth*: Numerische Werte der Masse und Dichte der Erde sowie ihrer Hauptträgheitsmomente, Zeitschrift für Geophysik, Jg. 18, Würzburg 1943
- [11] *W. de Sitter*: On the System of Astronomical Constants, Bull. Astr. Inst. Netherlands VIII, 1938, S. 212–231
- [12] *K. Jung*: Schwerkraft und Erdfigur, in Landolt-Börnstein, Zahlenwerte aus Physik, Chemie, Astronomie, Geophysik und Technik, Bd. III, S. 262

Zusammenfassung:

Ausgehend von der Forderung, daß bei der Regularisierung der Erdmasse der Drehimpuls erhalten bleiben muß, läßt sich zeigen, daß das Normalsphäroid dieselbe statische Abplattung besitzt wie der tatsächliche Erdkörper. Mit Einschluß der Glieder 4.0. ist die statische Abplattung, das Verhältnis der Differenz der Hauptträgheitsmomente zu der mit dem Quadrat der Äquatorachse multiplizierten Gesamtmasse, eine Funktion der geometrischen Abplattung und des das Rotationsniveausphäroid vierten Ranges charakterisierenden Helmertschen Parameters δ . Die statische Abplattung kann empirisch aus den Ungleichheiten der Mondbewegung in Breite und Länge mit mäßiger Genauigkeit abgeleitet werden. Da aber die Beobachtungen der künstlichen Erdsatelliten eine starke Genauigkeitssteigerung in der Bestimmung der statischen Abplattung erwarten lassen, wird sich trotz dem kleinen Koeffizienten, mit dem der Parameter δ in den Ausdruck für die statische Abplattung eingeht, in naher Zukunft sowohl die physikalische Berechtigung des Niveauellipsoides als auch die aus gravimetrischen Höhen abgeleitete Abplattung des mittleren Erdellipsoides prüfen lassen, und zwar völlig hypothesenfrei, das heißt unabhängig von der Dichteverteilung im Erdinnern.

Summary:

Starting from the assumption, that regularising the mass of the earth the impuls of rotation must be constant, it can be shown, that the normalspheroid has the same static flattening as the real earth. Including terms of 4th order the static flattening or the ratio of the difference of moments of inertia to the mass of earth multiplied with the square of equator-axis is a function of geometrical flattening and of the parameter δ , which characterizes Helmerts rotation-niveauspheroid of 4th degree. The static flattening can be determined from the irregularities in the motion of moon in latitude and longitude. As from the observations of a close earth satellite a remarkable raising of accuracy in the determination of the static flattening can be expected, in spite of the small coefficient of parameter δ in the expression of the static flattening the physical sanction of the niveau-ellipsoid as well as the numerical value of the geometrical flattening of mean earth-ellipsoid determined from gravimetric heights can be proved without any hypothesis, that means undependant from the law of density within the earth.