Genauigkeit der bedingten Ausgleichung mit Unbekannten : zwischen denen Bedingungsgleichungen bestehen

Autor(en): **Tschapanow, Christo**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **57 (1959)**

Heft 6

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-215234

Bibliographie

[1] *Arnold K.*, Fehlertheorie der streckenmessenden Triangulation. Berlin 1952.

[2] *Baeschlin F.*, Sphärische Berechnung von Streckennetzen. Comm. géodésique 1951.

[3] *Eika Tor*, Untersuchungen über Triangulationsnetze. Potsdam 1924.

[4] *Großmann W.*, Ausgleichungsrechnung. Springer, Berlin 1953.

[5] *Wolf H.*, Ausgleichung von Streckennetzen. Zeitschrift für Vermessungswesen 1958.

[6] *Ansermet A.*, Compensation de mesures linéaires. Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie 1955.

Genauigkeit der bedingten Ausgleichung mit Unbekannten, zwischen denen Bedingungsgleichungen bestehen

Dipl.-Ing. Christo Tschapanow, Haskovo (Bulgarien)

In der vorliegenden Arbeit werden Formeln für die Genauigkeit der Ausgleichung nach der bedingten Methode mit Unbekannten, wobei zwischen den Unbekannten noch Bedingungsgleichungen bestehen, hergeleitet. Die Ausgleichung wurde gleichzeitig von Prof. Tarczy-Hornoch [1] und von Prof. H. Wolf [2] behandelt.

Der mittlere Quadratfehler (m) stellt bekanntlich das Genauigkeitskriterium dar und wird angewandt:

1. als mittlerer Fehler der Gewichtseinheit, das heißt einer Beobachtung mit dem Gewicht $= 1$;
2. als mittlerer Fehler einer Funktion der ausgeglichenen Werte unbekannter und beobachteter Größen;
3. als mittlerer Fehler des ausgeglichenen Wertes einer beobachteten Größe;
4. als mittlerer Fehler des ausgeglichenen Wertes einer notwendigen Unbekannten.

Mittlerer Fehler der Gewichtseinheit

Die allgemeine Formel für den mittleren Fehler der Gewichtseinheit lautet bekanntlich:

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}} = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{r}} \tag{1}$$

Hier bedeuten p die Gewichte, v die wahrscheinlichsten Verbesserungen und n die Anzahl der beobachteten Größen, ferner u die Anzahl der notwendigen Unbekannten und r die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen beziehungsweise der Bedingungsgleichungen für die Verbesserungen.

Bei der bedingten Ausgleichung mit Unbekannten, zwischen denen Bedingungsgleichungen bestehen, ist charakteristisch:

a) daß in den Bedingungsgleichungen für die Verbesserungen m zusätzliche Unbekannte enthalten sind und

b) daß die Anzahl der Bedingungsgleichungen um 9 (Anzahl der Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten) erhöht wird.

Die Gleichung (1) muß demzufolge geschrieben werden:

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{[pvv]}{r + q - m}}. \tag{2}$$

Sie gibt den mittleren Fehler der Gewichtseinheit bei der bedingten Ausgleichung mit Unbekannten mit Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten an.

Mittlere Fehler einer Funktion der ausgeglichenen Werte der beobachteten Größen und der Unbekannten

Es soll m_Φ, der mittlere Fehler der Funktion Φ, berechnet werden. Er hängt von L der ausgeglichenen Werte der Beobachtungen und von den ausgeglichenen Werten der Unbekannten X, Y, Z ab. Führen wir die l als Beobachtungen, die x_0, y_0 und z_0 als Näherungswerte ein, so gelten die Gleichungen:

$$L = l + v; \quad X = x_0 + x; \quad Y = y_0 + y; \quad Z = z_0 + z \tag{3}$$

Die allgemeine Form der funktionellen Abhängigkeit zwischen Φ und L, X, Y, Z soll lauten:

$$= (L_1, L_2 \ldots L_n, X, Y, Z) \tag{4}$$

Wären L, X, Y und Z voneinander unabhängige Größen, so würde nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz der mittlere Fehler m_Φ der Größe Φ leicht zu finden sein. Die wahrscheinlichsten Werte der unbekannten und beobachteten Größen sind aber voneinander abhängig, denn die Normalgleichungen der Korrelate verbinden sie. Daher muß Formel (4), um m_Φ nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz zu finden, in der Weise modifiziert werden, daß Φ eine Funktion der unmittelbar gemessenen Größen wird. Zu diesem Zweck gehen wir zunächst zur Taylorschen Reihenentwicklung von (4) gemäß (3) über, wodurch (4) eine lineare Form erhält:

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi(L_1, L_2, \ldots, L_n, X, Y, Z) = \Phi(l_1, l_2, \ldots, l_n, x_0, y_0, z_0) + \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial l_1} v_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial l_2} v_2 + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial l_n} v_n + \frac{\partial \Phi}{\partial x_0} x + \frac{\partial \Phi}{\partial y_0} y + \frac{\partial \Phi}{\partial z_0} z \end{aligned} \tag{5}$$

Bezeichnen wir:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l_i} = \varphi_i; \ \frac{\partial \Phi}{\partial x_0} = \varphi_x; \ \frac{\partial \Phi}{\partial y_0} = \varphi_y; \ \frac{\partial \Phi}{\partial z_0} = \varphi_z;$$
$$\Phi\,(l_1, l_2, \ldots, l_n, x_0, y_0, z_0) = \varphi_0 \tag{6}$$

so erhält (5) gemäß (6) die Form

$$\begin{aligned} \Phi = \varphi_0 + \varphi_1 \cdot v_1 + \varphi_2 \cdot v_2 + \ldots + \varphi_n \cdot v_n + \\ + \varphi_x \cdot x + \varphi_y \cdot y + \varphi_z \cdot z \end{aligned} \tag{7}$$

Nach den Gleichungen der Korrelate ist bekanntlich

$$v = \frac{a}{p} K_1 + \frac{b}{p} K_2 + \ldots + \frac{r}{p} K_r \tag{8}$$

das heißt, die Werte von v sind ebenfalls voneinander abhängig. Daher setzen wir die v-Werte aus (8) in (7) ein und erhalten nach Umformung:

$$\begin{aligned} \Phi = \varphi_0 + \left[\frac{a\varphi}{p}\right] K_1 + \left[\frac{b\varphi}{p}\right] K_2 + \ldots + \left[\frac{r\varphi}{p}\right] K_r + \\ + \varphi_x \cdot x + \varphi_y \cdot y + \varphi_z \cdot z \end{aligned} \tag{9}$$

Die Korrelate K und die Unbekannten x, y und z sind aber ebenfalls miteinander verbunden und müssen eliminiert werden. Zu diesem Zweck bedienen wir uns der Normalgleichungen der Korrelate, deren allgemeines Bild ist:

$$\begin{array}{lr}
\left[\frac{aa}{p}\right] K_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] K_2 + \ldots + \left[\frac{ar}{p}\right] K_r + A_1 x + B_1 y + C_1 z & + w_1 = 0 \\
\left[\frac{ab}{p}\right] K_1 + \left[\frac{bb}{p}\right] K_2 + \ldots + \left[\frac{br}{p}\right] K_r + A_2 x + B_2 y + C_2 z & + w_2 = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\left[\frac{ar}{p}\right] K_1 + \left[\frac{br}{p}\right] K_2 + \ldots + \left[\frac{rr}{p}\right] K_r + A_r x + B_r y + C_r z & + w_n = 0 \\
A_1 K_1 + A_2 K_2 + \ldots + A_r K_r \quad + \mathfrak{A}_1 K_{r+1} + \mathfrak{B}_1 K_{r+2} & = 0 \\
B_1 K_1 + B_2 K_2 + \ldots + B_r K_r \quad + \mathfrak{A}_2 K_{r+1} + \mathfrak{B}_2 K_{r+2} & = 0 \\
C_1 K_1 + C_2 K_2 + \ldots + C_r K_r \quad + \mathfrak{A}_3 K_{r+1} + \mathfrak{B}_3 K_{r+2} & = 0 \\
\mathfrak{A}_1 x + \mathfrak{A}_2 y + \mathfrak{A}_3 z & + \mathfrak{A}_0 = 0 \\
\mathfrak{B}_1 x + \mathfrak{B}_2 y + \mathfrak{B}_3 z & + \mathfrak{B}_0 = 0
\end{array} \tag{10}$$

Die entsprechende Gleichung aus (10) wird mit den unbekannten Koeffizienten $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r, Q_x, Q_y, Q_z, Q_{r+1}, Q_{r+2}$ multipliziert und der Formel (9) hinzugefügt, und wir erhalten nach Umformung:

$$
\begin{aligned}
\Phi = {} & \varphi_0 + w_1 Q_1 + w_2 Q_2 + \ldots + w_r Q_r + 0\, Q_x + 0\, Q_y + 0\, Q_z + \\
& \qquad + \mathfrak{A}_0 Q_{r+1} + \mathfrak{B}_0 Q_{r+2} + \\
& + \left\{\left[\frac{aa}{p}\right] Q_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] Q_2 + \ldots + \left[\frac{ar}{p}\right] Q_r + A_1 Q_x + B_1 Q_y + C_1 Q_z + \left[\frac{a\varphi}{p}\right]\right\} K_1 + \\
& + \left\{\left[\frac{ab}{p}\right] Q_1 + \left[\frac{bb}{p}\right] Q_2 + \ldots + \left[\frac{br}{p}\right] Q_r + A_2 Q_x + B_2 Q_y + C_2 Q_z + \left[\frac{b\varphi}{p}\right]\right\} K_2 + \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
& + \left\{\left[\frac{ar}{p}\right] Q_1 + \left[\frac{br}{p}\right] Q_2 + \ldots + \left[\frac{rr}{p}\right] Q_r + A_r Q_x + B_r Q_y + C_r Q_z + \left[\frac{r\varphi}{p}\right]\right\} K_r + \\
& + \left\{ A_1 Q_1 + A_2 Q_2 + \ldots + A_r Q_r + \mathfrak{A}_1 Q_{r+1} + \mathfrak{B}_1 Q_{r+2} + \varphi_x \right\} x + \\
& + \left\{ B_1 Q_1 + B_2 Q_2 + \ldots + B_r Q_r + \mathfrak{A}_2 Q_{r+1} + \mathfrak{B}_2 Q_{r+2} + \varphi_y \right\} y + \\
& + \left\{ C_1 Q_1 + C_2 Q_2 + \ldots + C_r Q_r + \mathfrak{A}_3 Q_{r+1} + \mathfrak{B}_3 Q_{r+2} + \varphi_z \right\} z + \\
& + \left\{ \mathfrak{A}_1 Q_x + \mathfrak{A}_2 Q_y + \mathfrak{A}_3 Q_z \right\} K_{r+1} + \\
& + \left\{ \mathfrak{B}_1 Q_x + \mathfrak{B}_2 Q_y + \mathfrak{B}_3 Q_z \right\} K_{r+2}
\end{aligned} \tag{11}
$$

Mit Rücksicht auf (11) stellen wir folgende Bedingungen:

$$
\begin{aligned}
& \left[\frac{aa}{p}\right] Q_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] Q_2 + \ldots + \left[\frac{ar}{p}\right] Q_r + A_1 Q_x + B_1 Q_y + C_1 Q_z + \left[\frac{a\varphi}{p}\right] = 0 \\
& \left[\frac{ab}{p}\right] Q_1 + \left[\frac{bb}{p}\right] Q_2 + \ldots + \left[\frac{br}{p}\right] Q_r + A_2 Q_x + B_2 Q_y + C_2 Q_z + \left[\frac{b\varphi}{p}\right] = 0 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \left[\frac{ar}{p}\right] Q_1 + \left[\frac{br}{p}\right] Q_2 + \ldots + \left[\frac{rr}{p}\right] Q_r + A_r Q_x + B_r Q_y + C_r Q_z + \left[\frac{r\varphi}{p}\right] = 0 \\
& A_1 Q_1 + A_2 Q_2 + \ldots + A_r Q_r + \mathfrak{A}_1 Q_{r+1} + \mathfrak{B}_1 Q_{r+2} + \varphi_x = 0 \\
& B_1 Q_1 + B_2 Q_2 + \ldots + B_r Q_r + \mathfrak{A}_2 Q_{r+1} + \mathfrak{B}_2 Q_{r+2} + \varphi_y = 0 \\
& C_1 Q_1 + C_2 Q_2 + \ldots + C_r Q_r + \mathfrak{A}_3 Q_{r+1} + \mathfrak{B}_3 Q_{r+2} + \varphi_z = 0 \\
& \mathfrak{A}_1 Q_x + \mathfrak{A}_2 Q_y + \mathfrak{A}_3 Q_z = 0 \\
& \mathfrak{B}_1 Q_x + \mathfrak{B}_2 Q_y + \mathfrak{B}_3 Q_z = 0
\end{aligned} \tag{12}
$$

Die Bedingungen (12) können immer gestellt werden, da deren Anzahl der Anzahl der nachträglich eingeführten Unbekannten Q gleich ist.

Formel (11) erhält nach (12) folgende Fassung:

$$
\begin{aligned}
\Phi = {} & \varphi_0 + w_1 Q_1 + w_2 Q_2 + \ldots + w_r Q_r + \\
& + 0 \cdot Q_x + 0 \cdot Q_y + 0 \cdot Q_z + \mathfrak{A}_0 Q_{r+1} + \mathfrak{B}_0 Q_{r+2}
\end{aligned} \tag{13}
$$

In Formel (13) haben wir Φ als Funktion der unbekannten Koeffizienten φ und Q, deren Werte nach (12) gefunden werden, sowie der unbekannten Größen w, $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ ausgedrückt, wobei

$$\begin{aligned} w &= w\,(l_1, l_2, \ldots, l_n, x_0, y_0, z_0); \\ \mathfrak{A}_0 &= \mathfrak{A}_0\,(x_0, y_0, z_0);\ \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}_0\,(x_0, y_0, z_0) \end{aligned} \tag{14}$$

bedeuten. Folglich kann auf (13) gemäß (6) und (4) das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz angewandt werden, und man erhält:

$$\begin{aligned} m^2_\Phi = &\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial l_1} + \frac{\partial f_1}{\partial l_1} Q_1 + \frac{\partial f_2}{\partial l_1} Q_2 + \ldots + \frac{\partial f_r}{\partial l_1} Q_r\right\}^2 m^2_{l_1} + \\ + &\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial l_2} + \frac{\partial f_1}{\partial l_2} Q_1 + \frac{\partial f_2}{\partial l_2} Q_2 + \ldots + \frac{\partial f_r}{\partial l_2} Q_r\right\}^2 m^2_{l_2} + \\ + &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ + &\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial l_n} + \frac{\partial f_1}{\partial l_n} Q_1 + \frac{\partial f_2}{\partial l_n} Q_2 + \ldots + \frac{\partial f_r}{\partial l_n} Q_r\right\} m^2_{l_n} + \\ + &\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial x_0} + \frac{\partial f_1}{\partial x_0} Q_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_0} Q_2 + \ldots + \frac{\partial f_r}{\partial x_0} Q_r + \frac{\partial\mathfrak{A}_0}{\partial x_0} Q_{r+1} + \frac{\partial\mathfrak{B}_0}{\partial x_0} Q_{r+2}\right\}^2 m^2_x + \\ + &\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial y_0} + \frac{\partial f_1}{\partial y_0} Q_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_0} Q_2 + \ldots + \frac{\partial f_r}{\partial y_0} Q_r + \frac{\partial\mathfrak{A}_0}{\partial y_0} Q_{r+1} + \frac{\partial\mathfrak{B}_0}{\partial y_0} Q_{r+2}\right\}^2 m^2_y + \\ + &\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial z_0} + \frac{\partial f_1}{\partial z_0} Q_1 + \frac{\partial f_2}{\partial z_0} Q_2 + \ldots + \frac{\partial f_r}{\partial z_0} Q_r + \frac{\partial\mathfrak{A}_0}{\partial z_0} Q_{r+1} + \frac{\partial\mathfrak{B}_0}{\partial z_0} Q_{r+2}\right\}^2 m^2_z \end{aligned} \tag{15}$$

Bekanntlich sind:

$$\begin{array}{llll} \dfrac{\partial f_1}{\partial l_i} = a_i & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_0} = A_i & \dfrac{\partial\mathfrak{A}_0}{\partial x_0} = \mathfrak{A}_1 & \dfrac{\partial\mathfrak{B}_0}{\partial x_0} = \mathfrak{B}_1 \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial l_i} = b_i & \dfrac{\partial f_i}{\partial y_0} = B_i & \dfrac{\partial\mathfrak{A}_0}{\partial y_0} = \mathfrak{A}_2 & \dfrac{\partial\mathfrak{B}_0}{\partial y_0} = \mathfrak{B}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_r}{\partial l_i} = r_i & \dfrac{\partial f_i}{\partial z_0} = C_i & \dfrac{\partial\mathfrak{A}_0}{\partial z_0} = \mathfrak{A}_3 & \dfrac{\partial\mathfrak{B}_0}{\partial z_0} = \mathfrak{B}_3 \end{array} \tag{16}$$

Formel (15) nimmt gemäß (16) und (6) und nach Einführung von

$$m^2_i = \frac{m^2_0}{p_i} \tag{17}$$

folgende Gestalt an:

$$
\begin{aligned}
m^2_\Phi = & \Big\{\varphi_1 + a_1 Q_1 + b_1 Q_2 + \ldots + r_1 Q_r \Big\}^2 m^2_0/p_1 + \\
& + \Big\{\varphi_2 + a_2 Q_1 + b_2 Q_2 + \ldots + r_2 Q_r \Big\}^2 m^2_0/p_2 + \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
& + \Big\{\varphi_n + a_n Q_1 + b_n Q_2 + \ldots + r_n Q_r \Big\}^2 m^2_0/p_n + \\
& + \Big\{\varphi_x + A_1 Q_1 + A_2 Q_2 + \ldots + A_r Q_r + \mathfrak{A}_1 Q_{r+1} + \mathfrak{B}_1 Q_{r+2}\Big\}^2 m^2_x + \\
& + \Big\{\varphi_y + B_1 Q_1 + B_2 Q_2 + \ldots + B_r Q_r + \mathfrak{A}_2 Q_{r+1} + \mathfrak{B}_2 Q_{r+2}\Big\}^2 m^2_y + \\
& + \Big\{\varphi_z + C_1 Q_1 + C_2 Q_2 + \ldots + C_r Q_r + \mathfrak{A}_3 Q_{r+1} + \mathfrak{B}_3 Q_{r+2}\Big\}^2 m^2_z
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Formel (18) wird gemäß der $(r + 1)$., $(r + 2)$. und $(r + 3)$. Gleichung aus (12) und nach gewisser Umformung:

$$
\begin{aligned}
m^2_\Phi = m^2_0 \Bigg\{ & \left[\frac{\varphi\varphi}{p}\right] + \left[\frac{a\varphi}{p}\right] Q_1 + \left[\frac{b\varphi}{p}\right] Q_2 + \ldots + \left[\frac{r\varphi}{p}\right] Q_r + \\
& + \left(\left[\frac{a\varphi}{p}\right] + \left[\frac{aa}{p}\right] Q_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] Q_2 + \ldots + \left[\frac{ar}{p}\right] Q_r\right) Q_1 + \\
& + \left(\left[\frac{b\varphi}{p}\right] + \left[\frac{ab}{p}\right] Q_1 + \left[\frac{bb}{p}\right] Q_2 + \ldots + \left[\frac{br}{p}\right] Q_r\right) Q_2 + \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
& + \left(\left[\frac{r\varphi}{p}\right] + \left[\frac{ar}{p}\right] Q_1 + \left[\frac{br}{p}\right] Q_2 + \ldots + \left[\frac{rr}{p}\right] Q_r\right) Q_r \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Formel (19) erhält nach der 1., 2., ... $r$ten Gleichung aus (12) und nach gewisser Umformung die Fassung:

$$
\begin{aligned}
m^2_\Phi = m_0^2 \Bigg\{ & \left[\frac{\varphi\varphi}{p}\right] + \left[\frac{a\varphi}{p}\right] Q_1 + \left[\frac{b\varphi}{p}\right] Q_2 + \ldots + \left[\frac{r\varphi}{p}\right] Q_r - \\
& - (A_1 Q_1 + A_2 Q_2 + \ldots + A_r Q_r) Q_x - \\
& - (B_1 Q_1 + B_2 Q_2 + \ldots + B_r Q_r) Q_y - \\
& - (C_1 Q_1 + C_2 Q_2 + \ldots + C_r Q_r) Q_z \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Die Formel (20) geht gemäß der $(r + 1)$., $(r + 2)$. und $(r + 3)$. Gleichung aus (12) und nach gewisser Umformung über in

$$
\begin{aligned}
m^2_\Phi = m_0^2 \Bigg\{ & \left[\frac{\varphi\varphi}{p}\right] + \left[\frac{a\varphi}{p}\right] Q_1 + \left[\frac{b\varphi}{p}\right] Q_2 + \ldots + \left[\frac{r\varphi}{p}\right] Q_r + \\
& + (\mathfrak{A}_1 Q_x + \mathfrak{A}_2 Q_y + \mathfrak{A}_3 Q_z) Q_{r+1} + \\
& + (\mathfrak{B}_1 Q_x + \mathfrak{B}_2 Q_y + \mathfrak{B}_3 Q_z) Q_{r+2} + \\
& + \varphi_x Q_x + \varphi_y Q_y + \varphi_z Q_z \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

oder gemäß der $(r + 4)$. und $(r + 5)$. Gleichung aus (12):

$$m^2_\Phi = m_0^2 \left\{ \left[\frac{\varphi\varphi}{p}\right] + \left[\frac{a\varphi}{p}\right] Q_1 + \left[\frac{b\varphi}{p}\right] Q_2 + \ldots + \left[\frac{r\varphi}{p}\right] Q_r + \right.$$
$$\left. + \varphi_x Q_x + \varphi_y Q_y + \varphi_z Q_z + 0 \cdot Q_{r+1} + 0 \cdot Q_{r+2} \right\} \tag{22}$$

Formel (22) kann zur Ermittlung des mittleren Fehlers einer Funktion der ausgeglichenen Werte unbekannter und beobachteter Größen dienen. Die Koeffizienten Q, Q_x, Q_y, Q_z, Q_{r+1} und Q_{r+2} sind bequem aus den Gleichungen (12) zu finden. Zieht man eine Parallele zwischen (12) und (10), so läßt sich feststellen, daß beide Gleichungssysteme zwar ein und dieselbe Matrix, jedoch verschiedene absolute Glieder haben. Dadurch wird die Rechenarbeit bei der Ermittlung von Q wesentlich verkürzt. Es genügt, den Normalgleichungen der Korrelate noch eine Spalte für

$$\left[\frac{a\varphi}{p}\right], \left[\frac{b\varphi}{p}\right], \ldots, \left[\frac{r\varphi}{p}\right], \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, 0 \text{ und } 0$$

anzufügen, mit denen nach dem Gaußschen Algorithmus in der gleichen Weise verfahren wird wie bei $w_1, w_2, \ldots, w_2, 0, 0, 0, \mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}_0$.

Der Einfachheit halber soll (12) wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{array}{l} \left[\frac{aa}{p}\right] Q_1 + \left[\frac{ab}{p}\right] Q_2 + \ldots + \left[\frac{ar}{p}\right] Q_r + A_1 Q_x + B_1 Q_y + C_1 Q_z \qquad + \left[\frac{a\varphi}{p}\right] = 0 \\ \left[\frac{ab}{p}\right] Q_1 + \left[\frac{bb}{p}\right] Q_2 + \ldots + \left[\frac{br}{p}\right] Q_r + A_2 Q_x + B_2 Q_y + C_2 Q_z \qquad + \left[\frac{b\varphi}{p}\right] = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left[\frac{ar}{p}\right] Q_1 + \left[\frac{br}{p}\right] Q_2 + \ldots + \left[\frac{rr}{p}\right] Q_r + A_r Q_x + B_r Q_y + C_r Q_z \qquad + \left[\frac{r\varphi}{p}\right] = 0 \\ A_1 Q_1 + A_2 Q_2 + \ldots + A_r Q_r + A_{r+1} Q_x \qquad + \mathfrak{A}_1 Q_{r+1} + \mathfrak{B}_1 Q_{r+2} + \varphi_x = 0 \\ B_1 Q_1 + B_2 Q_2 + \ldots + B_r Q_r \quad + B_{r+2} Q_y \quad + \mathfrak{A}_2 Q_{r+1} + \mathfrak{B}_2 Q_{r+2} + \varphi_y = 0 \\ C_1 Q_1 + C_2 Q_2 + \ldots + C_r Q_r \qquad + C_{r+3} Q_z + \mathfrak{A}_3 Q_{r+1} + \mathfrak{B}_3 Q_{r+2} + \varphi_z = 0 \\ \qquad \mathfrak{A}_1 Q_x + \mathfrak{A}_2 Q_y + \mathfrak{A}_3 Q_z + \mathfrak{A}_4 Q_{r+1} \qquad + W_1 = 0 \\ \qquad \mathfrak{B}_1 Q_x + \mathfrak{B}_2 Q_y + \mathfrak{B}_3 Q_z \qquad + \mathfrak{B}_5 Q_{r+2} + W_2 = 0 \end{array} \tag{23}$$

Der Unterschied zwischen (23) und (12) besteht nur darin, daß bei (23) die Symmetrieachse bezeichnet ist.

Natürlich ist

$$A_{r+1} = B_{r+2} = C_{r+3} = \mathfrak{A}_4 = \mathfrak{B}_5 = W_1 = W_2 = 0 \tag{24}$$

Für (23) lassen sich die bekannten Abhängigkeiten niederschreiben, die auch zur Kontrolle dienen können:

$$[pvv] = -\left[\frac{a\varphi}{p}\right] Q_1 - \left[\frac{b\varphi}{p}\right] Q_2 - \ldots - \left[\frac{r\varphi}{p}\right] Q_r - \\ - \varphi_x Q_x - \varphi_y Q_y - \varphi_z Q_z - W_1 Q_{r+1} - W_2 Q_{r+2} \tag{25}$$

und

$$[pvv] = \frac{\left[\frac{a\varphi}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} + \frac{\left[\frac{b\varphi}{p}1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}1\right]} + \ldots + \frac{\left[\frac{r\varphi}{p}(r-1)\right]^2}{\left[\frac{rr}{p}(r-1)\right]} + \frac{[\varphi_x(r)]^2}{[A_{r+1}(r)]} + \\ + \frac{[\varphi_y(r+1)]^2}{[B_{r+2}(r+1)]} + \frac{[\varphi_z(r+2)]^2}{[C_{r+3}(r+2)]} + \frac{[W_1(r+3)]^2}{[\mathfrak{A}_4(r+3)]} + \frac{[W_2(r+4)]^2}{[\mathfrak{B}_5(r+4)]} \tag{26}$$

Aus (22) erhalten wir gemäß (25) und (26):

$$m^2_\Phi = m_0^2 \left\{ \left[\frac{\varphi\varphi}{p}\right] - \left[\frac{\left[\frac{a\varphi}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} + \frac{\left[\frac{b\varphi}{p}1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}1\right]} + \ldots + \frac{\left[\frac{r\varphi}{p}(r-1)\right]^2}{\left[\frac{rr}{p}(r-1)\right]} + \frac{[\varphi_x(r)]^2}{[A_{r+1}(r)]} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{[\varphi_y(r+1)]^2}{[B_{r+2}(r+1)]} + \frac{[\varphi_z(r+2)]^2}{[C_{r+3}(r+2)]} + \frac{[W_1(r+3)]^2}{[\mathfrak{A}_4(r+3)]} + \frac{[W_2(r+4)]^2}{[\mathfrak{B}_5(r+4)]} \right] \right\} \tag{27}$$

Dies ist die allgemeine Formel zur Berechnung des mittleren Fehlers einer Funktion der ausgeglichenen Werte unbekannter und beobachteter Größen bei bedingter Ausgleichung mit Unbekannten, wobei zwischen den Unbekannten Bedingungsgleichungen bestehen. Da sich bei der Lösung von (23) alle Glieder aus (26) in derselben Form auch aus dem Gaußschen Algorithmus ergeben, erweist sich diese Formel als praktisch und bequem. Die Besonderheit von (26) besteht darin, daß

a) die Werte der ersten r Glieder stets positiv sind, da auch $[\ ]^2$, p, a^2, b^2, $\ldots$, r^2 immer positiv sind;

b) die Werte des $(r+1)$, $(r+2)$, $\ldots$ Gliedes negativ sind, weil der Zähler stets positiv ist und $A_{r+1}(r)$, $B_{r+2}(r+1)$, $\ldots$, $\mathfrak{B}_5(r+4)$, das heißt, die Nenner gemäß (24) stets negativ sind.

In der Tat haben wir zum Beispiel für den Nenner des $Ar+1$ (r)-Gliedes:

$$A_{r+1}(r) = A_{r+1} - \frac{A_1 A_1}{\left[\frac{aa}{p}\right]} - \frac{A_2(1) A_2(1)}{\left[\frac{bb}{p}1\right]} - \ldots - \frac{A_r(r-1) A_r(r-1)}{\left[\frac{rr}{p}(r-1)\right]};$$

oder nach (24):

$$Ar+1\,(r) = -\left\{ \frac{A_1 A_1}{\left[\frac{aa}{p}\right]} + \frac{A_2(1) A_2(1)}{\left[\frac{bb}{p}1\right]} + \ldots + \frac{A_r(r-1) A_r(r-1)}{\left[\frac{rr}{p}(r-1)\right]} \right.$$

Aus Analogie kann bewiesen werden, daß die Werte der Nenner $B_{r+2}\,(r+1)$, $C_{r+3}\,(r+2)$ ... ebenfalls negativ sind. Folglich wird der Wert von $[pvv]$ um die Werte des $(r+1)$, $(r+2)$, ... Gliedes vergrößert, was eben in der Formel für den mittleren Fehler der Gewichtseinheit ausgedrückt ist, in der der Nenner um q Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten erhöht wird.

Literatur

[1] *A. Tarczy-Hornoch*, Eine weitere Ausgleichsgruppe, Soproner Mitteilungen, Bd. XVII, 1948/49, der Ungarischen Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften.

[2] *H. Wolf*, Über eine allgemeine Form der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Arbeiten aus dem Institut für Erdmessung, Bamberg 1948.

[3] *Chr. Tschapanow*, Über einen besonderen Fall der Kreisausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie, Heft 9/10 (1957).

Spezielle Überbauungspläne im Dienste der Stadt- und Ortsplanung im Kanton Basel-Stadt

Bemerkungen zu einem Bundesgerichtsentscheid vom 25. Juni 1958 in Sachen M. Sch. gegen Großen Rat des Kantons Basel-Stadt

Von Dr. A. Kuttler, Departementssekretär, Basel

Mit größerem Nachdruck denn je wird heute nach umfassender Planung gerufen, um die bauliche Entwicklung unserer Städte und Dörfer in geordnete Bahnen zu lenken. Mit der Planung allein ist es aber nicht getan. Der Planer muß vielmehr, sollen seine Pläne Wirklichkeit werden, den Staat dazu gewinnen, den planerischen Willen mit den Mitteln des Rechts für die Grundeigentümer verbindlich zu erklären.

Im Kanton Basel-Stadt bilden Überbauungspläne, die auf einzelne Bezirke oder Straßenzüge begrenzt werden und denen vom Großen Rate mit Hilfe spezieller Bauvorschriften Rechtsverbindlichkeit gegeben wird, das in der heutigen Praxis im Vordergrund stehende Planungsmittel, um eine Neuüberbauung in geordnete, den neueren städtebaulichen Erkenntnissen entsprechende Bahnen zu lenken. Derartige Überbauungspläne ermöglichen es, die gewollte Bebauung bis ins einzelne festzulegen. Im Dienste der zu wahrenden städtebaulichen Interessen, insbesondere der wohnhygienischen und ästhetischen Anforderungen, können sie die Stellung, die kubische Gestaltung der Bauten und die architektonische Gliederung und Ausführung der Fassaden und Dächer