

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

**Band:** 57 (1959)

**Heft:** 8

**Artikel:** Zur Theorie der Modelldeformationen

**Autor:** Löscher, Wilfried

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-215247>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 04.12.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse des Ingénieurs du Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 8 • LVII. Jahrgang

Erscheint monatlich

15. August 1959

## Zur Theorie der Modelldeformationen

Von Wilfried Löscher, Heerbrugg

In den meisten Lehrbüchern der Photogrammetrie (zum Beispiel [2], [6], [7]) wird, zurückgehend auf [3] und [1], die Theorie der durch die Unsicherheit der relativen Orientierung hervorgerufenen Modelldeformationen ausführlich behandelt.

Ausgehend von der bekannten Parallaxengleichung:

$$dp_x = dbx' - \frac{X}{Z} dbz' - Yd\kappa' - Z \left( 1 + \frac{X^2}{Z^2} \right) d\varphi' + \frac{XY}{Z} d\omega' \quad (1)$$

und der Beziehung:

$$dZ = \frac{Z}{b} dp_x \quad (2)$$

ergeben sich die Auswirkungen kleiner Orientierungsfehler auf die Höhen des Modells:

$$dZ = \frac{Z}{b} dbx' - \frac{X}{b} dbz' - \frac{YZ}{b} d\kappa' - \left( \frac{Z^2}{b} + \frac{X^2}{b} \right) d\varphi' + \frac{XY}{b} d\omega' \quad (3)$$

Aus der verschiedenartigen Abhängigkeit der Koeffizienten der Orientierungselemente in der letzten Gleichung von  $X$  und  $Y$  wird unter der Voraussetzung, daß es sich um ein flaches Modell handelt ( $Z = \text{konst.}$ ), gefolgert:

a) Die Einflüsse von  $dbx$ ,  $dbz$  und  $d\kappa$  sind linear und werden bei der absoluten Orientierung kompensiert.

b) Ein Konvergenzfehler  $d\varphi$  verursacht eine Horizontverschiebung und deformiert das Modell in einen parabolischen Zylinder mit den Erzeugenden parallel zu  $Y$ .

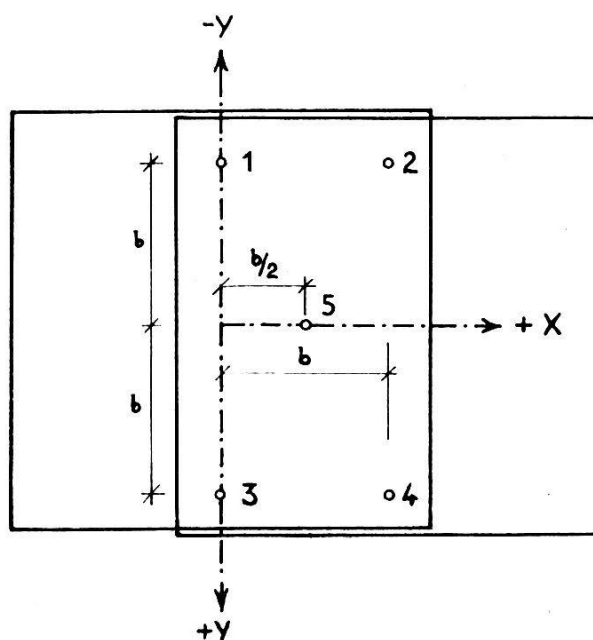
c) Ein Fehler der Querneigungsdifferenz  $d\omega$  verbiegt das Modell in ein Hyperboloid.

Als Ergebnis wird die Verwendung von fünf Paßpunkten empfohlen (vier in den Ecken und der fünfte in der Mitte des Modells), um die Deformationen erkennen und eliminieren zu können.

Dieser Empfehlung steht die jedem Auswerter bekannte Tatsache gegenüber, daß es in einem flachen Modell unmöglich ist, mit einer Konvergenzänderung einen über die Einstellgenauigkeit hinausgehenden Höhenfehler der Modellmitte zu beseitigen, ohne daß gleichzeitig in den Ecken Y-Parallaxen entstehen, die um einiges größer sind als alles, was als «Orientierungsunsicherheit» bezeichnet werden könnte.

Um diese Diskrepanz zwischen der herrschenden Lehrmeinung und der praktischen Erfahrung zu beseitigen, wird im Folgenden untersucht, wie groß die durch die Unsicherheit der relativen Orientierung verursachten Modelldeformationen im Verhältnis zur Höhenmeßgenauigkeit sind.

Da die Berechnung der Wirkung kleiner Änderungen der Orientierungselemente auf die Höhen durch Einsetzen der Koordinaten des betrachteten Modellpunktes in Gleichung (3) erfolgt, muß zunächst eine Vereinbarung über die Lage der geforderten fünf Paßpunkte getroffen werden. Die Annahme einer regelmäßigen Verteilung wie in der untenstehenden Figur entspricht der üblichen Aufnahmedisposition mit 60 Prozent Überdeckung.



Eine größere Überdeckung, mit einer Basis kleiner als die Ordinaten der Paßpunkte, braucht nicht in Rechnung gestellt zu werden, da sich die in Rede stehende Theorie der Modelldeformationen ohnehin nur auf flache Modelle bezieht. Dabei wird ein Modell als flach bezeichnet, wenn die Höhenunterschiede nicht größer als 10 Prozent der Flughöhe sind.

Berechnet man nun den Einfluß einer Konvergenzänderung auf die Paßpunkte und berücksichtigt gleichzeitig, daß der erste konstante Teil

$\frac{Z^2}{b} d\varphi'$  durch eine Horizontverschiebung, und weiter, daß der Fehler  $bd\varphi'$  entlang der Geraden  $X = b$  durch die allgemeine Längsneigung kompensiert wird, so ergibt sich die maximale Deformation entlang der Geraden  $X = \frac{b}{2}$  im Betrag von:

$$dZ_\varphi = \frac{b}{4} d\varphi' \quad (4)$$

Um ein Maß für die Unsicherheit der Orientierungselemente zu finden, kann man annehmen, daß in den üblichen sechs Punkten die Y-Parallaxen gemessen und daraus die Orientierungselemente nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden. Diese Annahme ist insofern gerechtfertigt, als in der Literatur zahlreiche Veröffentlichungen (zum Beispiel [5]) zu finden sind, in welchen nachgewiesen wird, daß die optisch-mechanischen Orientierungsverfahren Resultate gleicher Genauigkeit liefern. Die Beschränkung auf nur sechs Punkte gewährleistet, daß die Untersuchung nicht auf zu kleinen Werten für die Unsicherheit der Orientierung aufbaut. Der mittlere Fehler der Konvergenz ist daher nach [4]:

$$\mu_\varphi = \frac{Z}{b^2} \mu_{py} \quad (5)$$

wenn der mittlere Fehler der Vertikalparallaxmessung mit  $\mu_{py}$  bezeichnet wird und die Ordinaten der Orientierungspunkte wie vorausgesetzt ebenfalls gleich  $b$  sind.

Setzt man in Gleichung (4) für  $d\varphi'$  den Wert  $\mu_\varphi$  aus Gleichung (5) ein, so erhält man die durch Unsicherheit der Konvergenz verursachte Modelldeformation:

$$dZ_\varphi = \frac{1}{4} \frac{Z}{b} \mu_{py} \quad (6)$$

Um diesen Fehler festzustellen, müssen in den fünf Paßpunkten die Höhendifferenzen  $\Delta Z_{1-5}$  gegen die Sollhöhen gemessen werden. Da die Höhendifferenz  $\Delta Z_5$  auch von der absoluten Orientierung beeinflusst ist, berechnet man die Deformation wie folgt:

$$dZ_5 = \Delta Z_5 - \frac{1}{4} (\Delta Z_1 + \Delta Z_2 + \Delta Z_3 + \Delta Z_4) \quad (7)$$

Jede der gemessenen Höhendifferenzen  $\Delta Z_i$  dürfte mit dem mittleren Höhenmeßfehler  $\mu_Z$  behaftet sein. Der Fehler von  $dZ_5$  ergibt sich mit Hilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetzes:

$$\mu_{Z_5} = \frac{\sqrt{5}}{2} \mu_Z \quad (8)$$

Nach Gleichung (2) ist der mittlere Höhenmeßfehler:

$$\mu_Z = \frac{Z}{b} \mu_{px} \quad (9)$$

wenn mit  $\mu_{px}$  der mittlere Fehler der X-Parallaxenmessung bezeichnet wird. Daher ist der Fehler der Kontrollmessung:

$$\mu_{Z_5} = \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{Z}{b} \mu_{px} \quad (10)$$

Um die Werte (6) und (10) vergleichen zu können, muß noch eine Relation zwischen den Meßgenauigkeiten der X- und Y-Parallaxen festgelegt werden. In der Literatur findet man die Angabe, daß die stereoskopische Messung der X-Parallaxe  $\sqrt{2}$  mal genauer ist als die monokulare Messung eines X-Wertes. Ferner ist anzunehmen, daß die monokulare Meßgenauigkeit in der X-Richtung gleich groß ist wie in der Y-Richtung. Dann gilt:

$$\mu_{px} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_y \quad (11)$$

Die Y-Parallaxe wird im ungünstigsten Fall aus monokularen Y-Einstellungen in den beiden Bildern gewonnen. Folglich ist:

$$\mu_{py} = \sqrt{2} \mu_y \quad (12)$$

Die gesuchte Relation lautet also:

$$\mu_{py} = 2 \mu_{px} \quad (13)$$

Damit findet man aus Gleichung (6) und (10):

$$\mu_{Z_5} = \sqrt{5} \cdot dZ_\varphi \quad (14)$$

Der mittlere Fehler der Messung, welche die durch den mittleren Fehler der Konvergenz verursachte Deformation aufdecken soll, ist also mehr als doppelt so groß wie die Deformation selbst.

Vor der Diskussion dieses Resultates wird noch die durch die Unsicherheit der Querneigungsdifferenz verursachte Deformation auf die gleiche Weise untersucht.

Nach Gleichung (3) bewirkt eine Änderung der Querneigungsdifferenz zwischen den Paßpunkten 2 und 4 einen fehlerhaften Höhenunterschied im Betrag von

$$dZ_\omega = 2 b d\omega' \quad (15)$$

wenn man annimmt, daß die Querneigung des Modells mit den Punkten 1 und 3 fehlerfrei richtiggestellt ist.

Wenn das Modell voraussetzungsgemäß keine gefährliche Fläche darstellt, hat man für die Unsicherheit der Querneigungsdifferenz, wieder nach [4]:

$$\mu_{\omega} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{Z}{b^2} \mu_{py} \quad (16)$$

Die zu erwartende Deformation ist daher, wenn in Gleichung (16) sofort auch die Beziehung (13) substituiert wird:

$$dZ_{\omega} = 2 \sqrt{3} \frac{Z}{b} \mu_{px} \quad (17)$$

Um diese Verbiegung festzustellen, werden die Höhenabweichungen in den vier Ecken des Modelles bestimmt und daraus der Widerspruch der Diagonalen berechnet:

$$dZ_4 = (\Delta Z_1 + \Delta Z_4) - (\Delta Z_2 + \Delta Z_3) \quad (18)$$

Wie früher ergibt sich mit dem Fehlerfortpflanzungsgesetz und Gleichung (9) der Fehler der Kontrollmessung:

$$\mu_{Z_4} = 2 \frac{Z}{b} \mu_{px} \quad (19)$$

Das gesuchte Verhältnis zwischen (19) und (17) lautet:

$$\mu_{Z_4} = \frac{1}{\sqrt{3}} dZ_{\omega} \quad (20)$$

Die durch den mittleren Fehler der Querneigungsdifferenz verursachte Modelldeformation ist also nur  $\sqrt{3}$  mal größer als der mittlere Fehler der Kontrollmessung.

Aus diesen Ergebnissen kann gefolgert werden:

1. Die durch die Unsicherheit der relativen Orientierung hervorgerufene zylindrische Modelldeformation ist stets kleiner als die Höhenmeßgenauigkeit. Die bisherige theoretische Begründung der Forderung nach einem fünften Paßpunkt in der Modellmitte ist daher unhaltbar.
2. Am Paßpunkt in der Modellmitte konstatierte Höhenfehler können als Ursache nur Instrumentalfehler haben. In Frage kommt in erster Linie die Verzeichnung, dann Filmverzug oder Plattenunebenheit und Fehler des Auswertegerätes. Im allgemeinen beeinflussen diese Fehler nicht nur die Y-Parallaxen im Sinn einer falschen Konvergenzbestimmung oder nur die X-Parallaxen im Sinn einer zylindrischen Modelldeformation. Es ist daher nicht gerechtfertigt, Abwei-

chungen am zentralen Paßpunkt mit einer Konvergenzkorrektur ohne Rücksicht auf die  $Y$ -Parallaxen zu beseitigen. Denn dies würde nur dazu führen, daß in den Modellteilen zwischen den Paßpunkten neue unkontrollierte und unbemerkte Höhenfehler mindestens gleicher Größe entstehen.

3. Der fünfte Paßpunkt stellt eine überschüssige Kontrolle dar, auf die man verzichten kann, wenn man die Verzeichnung kompensiert und die Voraussetzung eines flachen Modelles zutrifft.
4. Eine Verbesserung der Höhen des Modells durch Ändern der Querneigungsdifferenz ist ohne Auftreten von meßbaren  $Y$ -Parallaxen theoretisch möglich, aber praktisch hart an der Grenze des Ausführbaren. Der Praktiker wird sich mit einer vermittelnden absoluten Orientierung begnügen können, um die durch die Unsicherheit von  $d\omega$  entstehenden Höhenfehler zu beseitigen.
5. Hyperboloidartige Deformationen, bei welchen der nach der Gleichung (18) berechnete Widerspruch über den 3,5fachen Höhenmeßfehler hinausgeht, haben als Ursache, wenn wie vorausgesetzt keine gefährliche Fläche vorliegt, ebenfalls Instrumentenfehler. In diesem Fall scheidet die Verzeichnung des Objektivs wegen ihrer Rotations-symmetrie aus, so daß hier nur Filmverzug, Plattenunebenheit oder das Auswertegerät als Fehlerursache in Betracht kommen.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß in flachen, mit vier Paßpunkten absolut orientierten Modellen durch die Unsicherheit der relativen Orientierung keine merkbaren Deformationen verursacht werden können.

#### *Literatur*

- [1] *A. Brandenberger*, Fehlertheorie der äußeren Orientierung von Steilaufnahmen, S. 46. Orell-Füssli-Verlag, Zürich.
- [2] *R. Finsterwalder*, Photogrammetrie, S. 197. Walter de Gruyter & Co., Berlin 1952.
- [3] *O. v. Gruber*, Ferienkurs in Photogrammetrie, S. 47. Verlag Konrad Witter, Stuttgart 1930.
- [4] *B. Hallert*, Über die Herstellung photogrammetrischer Pläne, Dissertation. Stockholm 1944.
- [5] *H. Kasper*, Bemerkungen zum Folgebildanschluß. Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie 1948, Heft 7.
- [6] *K. Schwidofsky*, Grundriß der Photogrammetrie, S. 207. B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1930.
- [7] *M. Zeller*, Lehrbuch der Photogrammetrie, S. 205. Orell-Füssli-Verlag, Zürich 1947.