

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 58 (1960)

Heft: 2

Artikel: Zur gravimetrischen Bestimmung von Gesteinsdichten und Lotlinienkrümmungen in der Erdkruste

Autor: Gassmann, Fritz

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-216080>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 30.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur gravimetrischen Bestimmung von Gesteinsdichten und Lotlinienkrümmungen in der Erdkruste

Von Fritz Gassmann

Zusammenfassung:

Man kann sich das Schwerfeld \vec{g} der Erde aus drei Teilen zusammengesetzt denken: Die drei Teile sind 1. das Feld $\vec{\gamma}$ der Normalschwere, 2. das Gravitationsfeld \vec{s} der sichtbaren Störungsmassen, 3. das Gravitationsfeld \vec{u} der unsichtbaren Störungsmassen.

Es wird gezeigt, wie man auf Grund von Schweremessungen an der Erdoberfläche

- a) die Dichte von sichtbaren Störungsmassen mit Hilfe der Korrelationsmethode bestimmt,
- b) den Verlauf der Lotlinie in der Erdkruste unter Berücksichtigung aller drei Teile des Schwerfeldes berechnet, wenn die Richtung der Lotlinie an der Erdoberfläche gegeben ist.

Summary:

A contribution to the gravimetric determination of rock densities and of curvatures of the plumbline in the earth's crust.

The gravity field \vec{g} of the earth can be considered as composed of three contributions: 1. the field $\vec{\gamma}$ of the normal gravity, 2. the gravitational field \vec{s} of the visible perturbing masses, 3. the gravitational field \vec{u} of the invisible perturbing masses.

- a) It is shown how, on the basis of gravimetric measurements on the earth's surface, the *density* of visible perturbing masses can be computed with the aid of the correlation method.
- b) A method is proposed of determining the shape of the *plumbline* in the earth's crust, if the direction of the plumbline at the earth's surface is known. All three contributions of the gravity field are taken into account.

A. Grundbegriffe

1. Das Potential $W(P)$ des Schwerfeldes der Erde in einem Punkte P des Raumes ist

$$W(P) = k_0 \iiint \frac{P_w(Q)}{r} dQ + \frac{1}{2} \omega_E^2 q_E^2.$$

Das Integral erstreckt sich über alle Massen, aus denen die Erde besteht. $\rho_w(Q)$ ist die Dichte dieser Massen (= wirkliche Dichte) im Punkte Q , dQ das Volumelement an der Stelle Q , r der Abstand \overline{PQ} , q_E der senkrechte Abstand des Punktes P von der Rotationsachse der Erde, $k_0 = 6,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{cm}^3}{\text{gr sec}^2}$ die Gravitationskonstante und $\omega_E = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$ die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation. Der erste Summand von $W(P)$ ist das Gravitationspotential, der zweite das Potential der Zentrifugalbeschleunigung.

2. $\vec{g}(P) = \text{grad } W$ ist der Vektor der Schwerebeschleunigung, $g = |\vec{g}|$ der skalare Betrag dieser Beschleunigung.

3. Das Geoid ist die Niveaulfläche des Schwerefeldes im Meeresniveau. Das Erdellipsoid ist ein Rotationsellipsoid, dessen Oberfläche möglichst wenig vom Geoid abweicht. Man kann eine Massenverteilung mit der Dichte $\rho_n(Q)$ (= Normaldichte) im Innern des Erdellipsoides annehmen, so daß

$$\Psi(P) = k_0 \iiint \frac{\rho_n(Q)}{r} dQ + \frac{1}{2} \omega_E^2 q_E^2$$

das Potential der ellipsoidischen Normalschwere ist (siehe zum Beispiel Gassmann 1957¹). Das Integral ist über alle Massen mit der Dichte $\rho_n(Q)$ zu erstrecken. Die Oberfläche des Erdellipsoides ist eine Niveaulfläche der Normalschwere.

4. $\vec{\gamma}(P) = \text{grad } \Psi$ ist der Beschleunigungsvektor der Normalschwere, $\gamma = |\vec{\gamma}|$ ihr skalarer Betrag.

5. Will man von der regularisierten Massenverteilung mit der Dichte ρ_n , die der Normalschwere zugrunde liegt, zur wirklichen Massenverteilung übergehen, so hat man zur regularisierten Massenverteilung eine Massenverteilung (mit teils positiver, teils negativer Dichte) hinzuzufügen, die als totale Störungsmasse bezeichnet werden soll. Ihre Dichte im Punkte Q ist $\rho_t(Q) = \rho_w(Q) - \rho_n(Q)$. Beispielsweise ist für alle Punkte Q außerhalb der Oberfläche des Erdellipsoides $\rho_n = 0$, also $\rho_t = \rho_w$.

$$6. \Phi_t(P) = W(P) - \Psi(P) = k_0 \iiint \frac{\rho_t(Q)}{r} dQ$$

ist das Gravitationspotential der totalen Störungsmasse.

7. Die totale Störung des Schwerefeldes wird durch den Vektor $\text{grad } \Phi_t = \vec{g} - \vec{\gamma}$ dargestellt. Für Punkte P auf der Erdoberfläche oder in deren Nähe darüber oder darunter hängt dieser Vektor stark von der Topographie in der Umgebung von P , das heißt von der Form der Erdoberfläche, ab. Sowohl in der Geodäsie wie auch bei gravimetrischen Prospek-

¹ Die Autorennamen mit Jahreszahlen beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

tionsarbeiten sucht man den Einfluß der Topographie so gut wie möglich zu eliminieren, indem man sich die Massen zwischen der Erdoberfläche und einer glatten, in der Erdkruste verlaufenden Fläche, die sogenannten sichtbaren Massen, weggenommen denkt (Bouguer-Reduktion). Die glatte Fläche sei Reduktionsfläche genannt. Eventuell bringt man überdies kompensierende Massen unterhalb der Reduktionsfläche an (isostatische Reduktion). Die Masse, die aus der totalen Störungsmasse durch Wegnahme der sichtbaren Massen und eventuelle Hinzufügung von kompensierenden Massen entsteht, sei reduzierte Störungsmasse genannt. Ihre Dichte sei $\rho_u(Q)$. $\rho_s(Q) = \rho_t(Q) - \rho_u(Q)$ ist dann die Dichte der an der Reduktion beteiligten Massen.

8. Die nachfolgenden Ausführungen halten sich an den Fall der Bouguer-Reduktion, lassen sich aber ohne weiteres auf den Fall einer isostatischen Reduktion übertragen. Die totale Störungsmasse mit der Dichte $\rho_t(Q)$ erscheint somit in zwei Teile zerlegt, nämlich in die sichtbaren Massen mit der Dichte $\rho_s(Q)$ und die sogenannten unsichtbaren Massen mit der Dichte $\rho_u(Q)$. Die Gravitationspotentiale der beiden Teile sind

$$\Phi_s(P) = k_0 \iiint \frac{\rho_s(Q)}{r} dQ \quad \text{und} \quad \Phi_u(P) = k_0 \iiint \frac{\rho_u(Q)}{r} dQ.$$

9. Man erhält den Vektor $\vec{u} = \text{grad } \Phi_u$ der reduzierten Störung des Schwerfeldes, indem man vom Vektor \vec{g} der wirklichen Schwere den Vektor $\vec{\gamma}$ der Normalschwere und den Vektor $\vec{s} = \text{grad } \Phi_s$ der Gravitationsbeschleunigung, herrührend von den sichtbaren Massen, subtrahiert, also

$$\vec{u}(P) = \vec{g}(P) - \vec{\gamma}(P) - \vec{s}(P).$$

B. Schwerstörungen und Lotabweichungen

10. x , y und z seien rechtwinklige Koordinaten. Die $+z$ -Richtung zeige nach unten, die $+x$ -Richtung nach Norden und die $+y$ -Richtung nach Osten. Da die beiden Vektoren $\vec{g}(P)$ und $\vec{\gamma}(P)$ einen sehr kleinen Winkel (nämlich einen Winkel kleiner als 30 Winkelsekunden alter Teilung) miteinander bilden, kann man die z -Richtung stets so wählen, daß sie im Punkte P mit diesen beiden Vektoren sehr kleine Winkel bildet. Dies sei im folgenden vorausgesetzt.

11. g' sei die x -Komponente, g'' die y -Komponente und g''' die z -Komponente von \vec{g} . Entsprechend seien γ' , γ'' und γ''' die Komponenten von $\vec{\gamma}$. (Die x -Richtung sei so gewählt, daß $\gamma'' = 0$ angenommen werden kann.); s' , s'' und s''' die Komponenten von \vec{s} und u' , u'' , und u''' die Komponenten von \vec{u} .

12. Nach der in 10 gemachten Voraussetzung über die z -Richtung begeht man einen Fehler $< 0,01$ mgl, wenn man $g''' = g$ und $\gamma''' = \gamma$ setzt. $\left(1 \text{ mgl} = 1 \text{ Milligal} = 10^{-3} \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2} \right)$.

13. Die Größe $g''' - \gamma''' = s''' + u'''$ soll daher gleich $g - \gamma$ gesetzt werden. Dies ist die totale Schwerestörung.

14. $u'''(P) = g(P) - \gamma(P) - s'''(P)$ ist je nach der Reduktionsart (siehe 7) eine Bouguersche oder eine isostatische Schwerestörung in P . Nach dieser Gleichung erhält man u''' , indem man von g die Größen γ und s''' subtrahiert oder, wie man sich auch ausdrückt, indem man an g verschiedene Korrekturen anbringt. Nimmt man nach 8 den Fall einer Bouguerschen Schwerestörung, wählt das Geoid als Reduktionsfläche und setzt voraus, die Massen zwischen der Erdoberfläche und dem Geoid seien in einer gewissen Umgebung von P homogen, so setzt sich s''' aus der sogenannten Plattenkorrektur und der topographischen Korrektur zusammen. Da γ von der geographischen Breite und der Meereshöhe von P abhängt, sind in γ die sogenannten Breitenkorrektur und die Freiluftkorrektur enthalten. Wegen der Freiluftkorrektur wird daher oft von einer Reduktion der Schwere auf das Meeresniveau gesprochen, was aber zu Irrtümern Anlaß geben kann. $u'''(P)$ ist die z -Komponente der Gravitationsbeschleunigung, herrührend von der reduzierten Störungsmasse, und zwar im Punkte P , der sich gewöhnlich auf der Erdoberfläche befindet und nicht etwa im Fußpunkt des Lotes von P auf das Geoid.

15. Der Winkel λ zwischen dem Vektor $\vec{g}(P)$ und der z -Richtung ist die Lotabweichung in P in bezug auf die z -Richtung. Nach der in Abschnitt 10 über die z -Richtung gemachten Voraussetzung kann man $\lambda' = \frac{g'}{g}$ als die im Bogenmaß gemessene x -Komponente, $\lambda'' = \frac{g''}{g}$ als y -Komponente von λ bezeichnen.

16. Stimmt die z -Richtung mit der Richtung der Normalen von P auf die Oberfläche des Erdellipsoides überein, so ist λ die absolute Lotabweichung. In diesem Falle ist, unter Berücksichtigung der in der Geodäsie üblichen Vorzeichenfestsetzung, $-\lambda'$ die Meridiankomponente von λ , $-\lambda''$ die Komponente im ersten Vertikal (siehe zum Beispiel Baeschlin 1948, S. 288).

C. Harmonische Polynome von x , y und z

17. $\Pi_i(x, y, z)$ sei ein homogenes Polynom der drei Variablen x , y und z vom Grade i , das der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\Delta \Pi_i = \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial z^2} = 0$$

genügt. Π_i ist in diesem Falle ein harmonisches Polynom, auch harmonische Kugelfunktion genannt (*spherical harmonic*).

18. Ein allgemeines homogenes harmonisches Polynom i . Grades Π_i hat $2i + 1$ willkürliche Koeffizienten. Ein einfaches Verfahren zur Aufstellung eines solchen Polynoms ist in Kellogg 1929, S. 140, angegeben. Man erhält danach zum Beispiel

$$\Pi_0 = A$$

$$\Pi_1 = B_0 x + B_1 z + B_2 y$$

$$\Pi_2 = C_0 (x^2 - y^2) + C_1 xz + C_2 (z^2 - y^2) + C_3 xy + C_4 yz$$

$$\Pi_3 = D_0 (x^3 - 3xy^2) + D_1 (x^2z - y^2z) + D_2 (xz^2 - xy^2) \\ + D_3 (z^3 - 3y^2z) + D_4 (x^2y - \frac{1}{3}y^3) + D_5 xyz + D_6 (yz^2 - \frac{1}{3}y^3)$$

$$\Pi_4 = E_0 (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + E_1 (x^3z - 3xy^2z) \\ + E_2 (x^2z^2 - x^2y^2 - y^2z^2 + \frac{1}{3}y^4) + E_3 (xz^3 - 3xy^2z) \\ + E_4 (y^4 - 6y^2z^2 + z^4) + E_5 (x^3y - xy^3) + E_6 (x^2yz - \frac{1}{3}y^3z) \\ + E_7 (xyz^2 - \frac{1}{3}xy^3) + E_8 (yz^3 - y^3z).$$

A und die B_j , C_j , D_j und E_j , $j = 0, 1, 2 \dots$ sind die willkürlichen Koeffizienten.

D. Gravimetrische Bestimmung von Gesteinsdichten

19. Die von L. L. Nettleton 1939 angegebene Methode der gravimetrischen Bestimmung von Gesteinsdichten ist von verschiedenen Autoren kritisch gewürdigt und ausgebaut worden. Erwähnt seien J. E. Barnitzke 1943, K. Jung 1943 und 1953, D. S. Parasnis 1952 und A. Yaramanci 1954. K. Jung setzt den aus den Bouguerschen Schwerestörungen und den Geländehöhen der Meßpunkte gebildeten Korrelationskoeffizienten gleich Null. Diese Methode kann zu einer fehlerhaften Dichte führen, wenn etwa in den Schwerestörungen Einflüsse von Störungsmassen, die im Bereich der Meßpunkte unterhalb des Reduktionsniveaus liegen, enthalten sind. In einem solchen Fall kann nämlich sehr wohl eine Korrelation zwischen den Schwerestörungen und den Geländehöhen bestehen. Im vorliegenden Abschnitt wird gezeigt, daß dieser Nachteil unter Aufwand vermehrter Rechenarbeit umgangen werden kann, nämlich dadurch, daß der Berechnung der Dichte nicht die Schwerestörungen in den Meßpunkten selbst, sondern in den Projektionen dieser Punkte auf ein einheitliches Referenzniveau zugrunde gelegt werden.

20. Wenn in einem Gebiete Geländeunebenheiten mit hinreichenden Höhendifferenzen vorhanden sind und in der Hauptsache aus einem homogenen Gestein bestehen, so kann die Dichte dieses Gesteins gravimetrisch bestimmt werden. Man wählt im Gebiete ein Netz von Punkten P_1, P_2, \dots, P_n , in denen die Schwere gemessen wird. Ein flächenhaftes Netz ist in der Regel einem Schwereprofil vorzuziehen. Das Stück der Erdoberfläche, das vom Netz überdeckt ist, sei Meßfläche genannt. Zur

Abgrenzung der sichtbaren Massen nach 7 wird eine Reduktionsfläche gewählt, nämlich eine Niveaulfläche des Schwerfeldes, die in einer weitem Umgebung der Meßfläche vollständig im Innern der Erdkruste verläuft. Es ist zweckmäßig, die sichtbaren Massen auf eine weitere Umgebung der Meßfläche zu beschränken und nicht etwa sämtliche Massen über der Reduktionsfläche rings um die ganze Erde dazu zu rechnen. Nimmt man für den horizontalen Durchmesser des Bereiches der sichtbaren Massen das Zehn- bis Zwanzigfache des Durchmessers der Meßfläche, so wird die Schwerestörung, verursacht durch topographische Unebenheiten, die außerhalb des Bereiches der sichtbaren Massen liegen, innerhalb der Meßfläche eine Ortsfunktion sein, die hinreichend glatt verläuft.

21. Von Ausnahmefällen abgesehen, werden die sichtbaren Massen nicht von einheitlicher Dichte sein. Man denkt sich diese Massen aus zwei Teilen bestehend. Der eine Teil ist der homogene Gesteinskörper unmittelbar unterhalb der Meßfläche, den man als eine riesige Gesteinsprobe auffassen kann, deren Dichte ρ in situ zu bestimmen ist. Er sei deshalb Probekörper genannt. Der zweite Teil besteht aus allen übrigen sichtbaren Massen. Man setzt voraus, daß man die Dichte dieser Massen hinreichend genau kennt. Beispielsweise kann die Wassermasse eines Sees, der sich im Bereich der sichtbaren Massen (innerhalb oder außerhalb der Meßfläche) befindet, dazu gehören. Die z -Komponente der Gravitationsbeschleunigung, herrührend von diesen Massen, sei $s_b(P)$. Setzt man

$$\rho K(P) = s'''(P) - s_b(P),$$

so ist $K(P)$ die z -Komponente der Gravitationsbeschleunigung, herrührend von einem Körper, der sich mit dem Probekörper deckt, aber die Dichte 1 besitzt.

22. Um zu einer Gleichung für die Bestimmung der Dichte ρ des Probekörpers zu gelangen, soll die Ortsfunktion $K(P)$ mit $u'''(P)$ (siehe 14) verglichen werden. Als z -Komponenten von Anziehungen sind diese Funktionen nicht nur für die Punkte P der Erdoberfläche definiert, sondern für beliebige Punkte des Raumes. Gemäß 19 seien ihre Werte für Punkte P^* einer Referenzfläche betrachtet. Als solche sei eine Niveaulfläche des Schwerfeldes gewählt, die über der Meßfläche im freien Raum verläuft, aber möglichst nahe an dieser Fläche (siehe die Figur). Im Bereiche der Normalprojektion (F) der Meßfläche auf die Referenzfläche kann diese als Ebene angesehen werden. Es sei die Ebene $z = 0$. In dieser Ebene sind K und u''' Funktionen von x und y . Es sei nun angenommen, daß zwischen den Werten dieser beiden Funktionen im Bereiche (F) der Referenzfläche keine Korrelation bestehe. Der Zähler des Korrelationskoeffizienten muß daher verschwinden:

$$a) \int \int_{(F)} \{K(x, y) - \bar{K}\} \cdot \{u'''(x, y) - \bar{u}'''\} dF = 0.$$

Darin sind

$$b) \bar{K} = \frac{1}{F} \int \int (F) K(x, y) dF, \quad \bar{u}''' = \frac{1}{F} \int \int (F) u'''(x, y) dF$$

c) F = Flächeninhalt von (F) , $dF = dx dy$.

23. Währenddem $K(x, y)$ als bekannt anzusehen ist, kann $u'''(x, y)$ erst berechnet werden, wenn die Dichte ρ des Probekörpers bekannt ist. Drückt man diesen Sachverhalt formelmäßig aus, so erhält man aus Gleichung 22 a eine Gleichung für ρ .

24. ρ_0 sei ein bekannter Näherungswert für ρ . $\sigma = \rho - \rho_0$ ist dann die gesuchte Verbesserung der Dichte.

25. $w(P) = g(P) - \gamma(P) - s_b(P) - \rho_0 K(P)$ ist eine Ortsfunktion, deren Werte in den Meßpunkten P_1, P_2, \dots, P_n bekannt sind.

26. Als z -Komponente einer Massenanziehung ist $w(P)$ im Raume über der Meßfläche harmonisch. Man denkt sich diese Funktion als Summe von harmonischen Polynomen Π_i (siehe 18) dargestellt:

$$w(P) = w(x, y, z) = \sum_{i=0}^k \Pi_i.$$

(Als Nullpunkt des Koordinatensystems wählt man einen mittleren Punkt von (F)). Die Anzahl der in diesem Ansatz enthaltenen willkürlichen Koeffizienten ist $(k + 1)^2$. Ist diese Anzahl kleiner als die Anzahl n der Meßpunkte P_1, P_2, \dots, P_n und setzt man die Koordinaten dieser Punkte ein, so erhält man ein System von n linearen Gleichungen für die Koeffizienten, für welche daraus die im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate besten Werte ermittelt werden. Damit sind die Werte von w auf der Referenzfläche bekannt, nämlich $w(x, y, 0) = w(x, y)$.

27. Nach 14, 21, 24 und 25 ist dann auf der Referenzfläche

$$u'''(x, y) = w(x, y) - \sigma K(x, y).$$

28. Der Größe σ werde ein willkürlicher Zuwachs δ erteilt. Man hat dann $u^*(x, y) = u'''(x, y) - \delta K(x, y) = w(x, y) - (\sigma + \delta) K(x, y)$. Da nach Voraussetzung zwischen u''' und K im Bereiche (F) der Referenzfläche keine Korrelation besteht, ist für jedes feste $\delta \neq 0$ u^* linear mit K korreliert. Damit ist die Benützung des linearen Korrelationskoeffizienten zur Aufstellung der Gleichung 22 a gerechtfertigt, und man erhält die gesuchte Größe σ , indem man den Ausdruck 27 für $u'''(x, y)$ in jener Gleichung einsetzt.

29. Die Gleichung für σ lautet dann

$$\sigma \int \int (F) \{K(x, y) - \bar{K}\}^2 dF = \int \int (F) \{w(x, y) - \bar{w}\} \cdot \{K(x, y) - \bar{K}\} dF.$$

Darin ist $\bar{w} = \frac{1}{F} \int \int (F) w(x, y) dF$.

E. Schwere und Lotlinien in der Erdkruste

30. In jedem Punkte einer Lotlinie ist der Vektor \vec{g} Tangente an die Lotlinie. Nach den in 10 und 11 eingeführten Bezeichnungen gelten daher für die Koordinaten x, y, z der Punkte einer Lotlinie die Gleichungen

$$dx : dy : dz = g' : g'' : g'''.$$

31. Denkt man sich die Komponenten von \vec{g} als Funktionen von x, y und z gegeben und nimmt zum Beispiel z als unabhängige Variable an, so sind

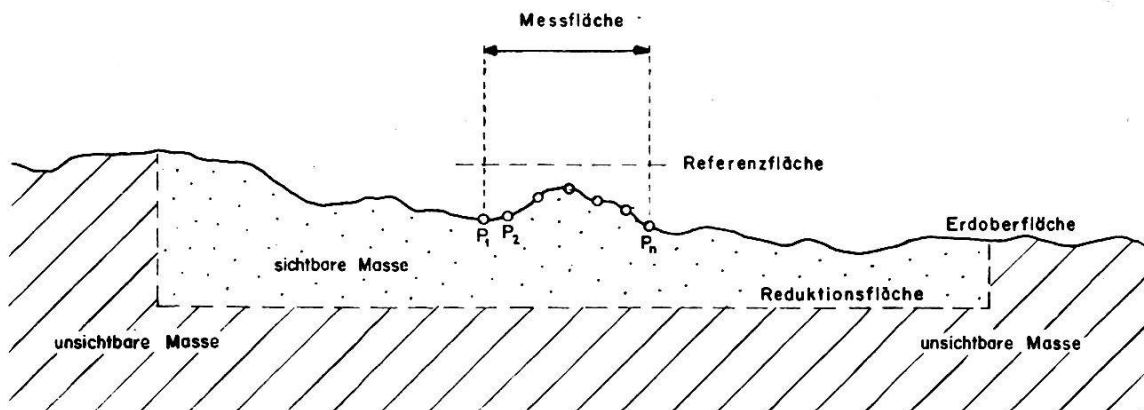
$$\frac{dx}{dz} = \frac{g'}{g'''} \quad \frac{dy}{dz} = \frac{g''}{g'''}$$

die simultanen Differentialgleichungen für die beiden Funktionen $x(z)$ und $y(z)$, die den Verlauf der Lotlinien beschreiben.

32. Es soll der Verlauf einer Lotlinie im Innern der Erdkruste durch Integration der Gleichungen 31 bestimmt werden. Der Schnittpunkt der Lotlinie mit der Erdoberfläche werde als Nullpunkt O_0 des Koordinatensystems angenommen. (Die Lage des Koordinatensystems ist also verschieden von der in 22 definierten, für Abschnitt D geltenden Lage.) Nach der in 10 über die z -Richtung gemachten Voraussetzung weicht die Lotlinie nur wenig von der z -Achse ab. Man kann daher die Werte der rechten Seiten der Gleichungen 31, die genau genommen für die Punkte der Lotlinie zu nehmen sind, durch die Werte auf der z -Achse ersetzen. Nach 12 und 15 kann man übrigens diese Werte den Lotabweichungskomponenten λ' und λ'' gleich setzen. Die rechten Seiten von 31 sind dann von x und y unabhängig, und man erhält $x(z)$ und $y(z)$ durch einfache Quadratur:

$$x(z) = \int_0^z \lambda'(\zeta) d\zeta \quad \text{und} \quad y(z) = \int_0^z \lambda''(\zeta) d\zeta.$$

33. O_0 liege innerhalb der Meßfläche (siehe die Figur), und es werde angenommen, daß die Dichte des Probekörpers und damit die gesamte



Gravimetrische Bestimmung von Gesteinsdichten und Lotlinienkrümmungen in der Erdkruste

Dichteverteilung der sichtbaren Massen bekannt sei. Nach 14 kann folglich u''' für die Punkte P_1, P_2, \dots, P_n der Meßfläche bestimmt werden. O_0 falle mit einem dieser Punkte zusammen. Die partiellen Ableitungen von Φ_u seien wie folgt bezeichnet:

$$\frac{\partial \Phi_u}{\partial x} = \Phi_x, \quad \frac{\partial^2 \Phi_u}{\partial x \partial z} = \Phi_{xz} \text{ usw.}$$

Nach 9 ist $\Phi_z = u'''$. Als Potential der unsichtbaren Massen ist Φ_u im Raume, der von den sichtbaren Massen eingenommen wird, harmonisch. Das gleiche gilt von allen partiellen Ableitungen nach den Koordinaten x, y und z . Entsprechend wie in 26 läßt sich die harmonische Funktion $\Phi_z(x, y, z)$ näherungsweise als Summe von homogenen harmonischen Polynomen darstellen:

$$\Phi_z(x, y, z) = \sum_{i=0}^k \Pi_i.$$

Nimmt man $(k + 1)^2 < n$ an, so lassen sich mit der Methode der kleinsten Quadrate die plausibelsten Werte für die Koeffizienten der Π_i (siehe 18) aus den Werten von Φ_z für die Punkte P_1, P_2, \dots, P_n bestimmen.

34. Speziell ist dann für die Punkte der z -Achse in der Erdkruste zwischen der Erdoberfläche und der Reduktionsfläche

$$u''' = \Phi_z(0, 0, z) = A + B_1 z + C_2 z^2 + D_3 z^3 + E_4 z^4 + \dots$$

bekannt.

35. Nach 14 ist

$$\text{a) } g = \gamma + s''' + u'''.$$

Für einen Punkt in der geographischen Breite φ und der Meereshöhe H ist

$$\text{b) } \gamma = \gamma_0(\varphi) - (0,30855 + 0,00022 \cos 2\varphi)(N + H) + 0,72 \cdot 10^{-7}(N + H)^2.$$

$\gamma_0(\varphi)$ ist die Normalschwere auf der Oberfläche des Erdellipsoides und N die Erhebung des Geoides über dem Erdellipsoid (siehe zum Beispiel Gassmann 1957, S. 36). γ_0 hat man in mgl, N und H (wie auch weiter unten H_0 und z) in m einzusetzen. Man erhält dann γ in mgl. $H = H_0 - z$. H_0 ist die Meereshöhe von O_0 . s''' kann für beliebige Punkte des Raumes nach bekannten Methoden bestimmt werden, u''' ist aus 33 beziehungsweise 34 zu entnehmen.

36. Nach 9, 11 und 15 sind die Lotabweichungskomponenten

$$\lambda' = \frac{1}{g}(\gamma' + s' + u')$$

$$\lambda'' = \frac{1}{g}(s'' + u'').$$

(g in mgl).

$$37. \frac{\gamma'}{g} = -8,30 \cdot 10^{-10} (N + H_0 - z) - \varepsilon.$$

ε ist der Winkel im Bogenmaß zwischen der z -Achse und der Normalen von O_0 auf die Oberfläche des Erdellipsoides, positiv gerechnet, wenn die $+z$ -Achse nördlich von der Normalen liegt. s' und s'' in 36 lassen sich für beliebige Punkte des Raumes nach bekannten Methoden bestimmen.

38. Denkt man sich die Werte von λ' und λ'' für den Punkt O_0 aus astronomisch-geodätischen Messungen bestimmt, so erhält man aus 36 die Werte u'_0 und u''_0 der Größen u' und u'' für den Punkt O_0 .

39. Nach 9, 11 und 33 ist $u' = \Phi_x$ und $u'' = \Phi_y$. Aus 33 erhält man durch Ableitung nach x beziehungsweise y die Funktionen $\Phi_{xz}(x, y, z)$ und $\Phi_{yz}(x, y, z)$. Daraus ergibt sich für die Punkte der z -Achse

$$\begin{aligned} \Phi_x(0, 0, z) &= u'_0 + \int_0^z \Phi_{xz}(0, 0, \zeta) d\zeta \\ &= u'_0 + B_0 z + \frac{1}{2} C_1 z^2 + \frac{1}{3} D_2 z^3 + \frac{1}{4} E_3 z^4 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_y(0, 0, z) &= u''_0 + \int_0^z \Phi_{yz}(0, 0, \zeta) d\zeta \\ &= u''_0 + B_2 z + \frac{1}{2} C_4 z^2 + \frac{1}{3} D_6 z^3 + \frac{1}{4} E_8 z^4 + \dots \end{aligned}$$

40. Nachdem λ' und λ'' für die Punkte der z -Achse bestimmt sind, erhält man die Abweichungen $x(z)$ und $y(z)$ der Lotlinie von der z -Achse nach 33 durch Integration. Man kann dabei in 36 für g einen konstanten Mittelwert \bar{g} nehmen und erhält nach 37 und 39, ausgedrückt in m ,

$$\begin{aligned} x(z) &= \left\{ \frac{u'_0}{\bar{g}} - 8,30 \cdot 10^{-10} (N + H_0) - \varepsilon \right\} z + \left(\frac{1}{2\bar{g}} B_0 + 4,15 \cdot 10^{-10} \right) z^2 \\ &+ \frac{1}{\bar{g}} \left\{ \frac{1}{6} C_1 z^3 + \frac{1}{12} D_2 z^4 + \dots \right\} + \frac{1}{\bar{g}} \int_0^z s'(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

$$y(z) = \frac{1}{\bar{g}} \left\{ u''_0 z + \frac{1}{2} B_2 z^2 + \frac{1}{6} C_4 z^3 + \frac{1}{12} D_6 z^4 + \dots \right\} + \frac{1}{\bar{g}} \int_0^z s''(\zeta) d\zeta$$

Zur Auswertung der beiden Integrale genügt es, s' und s'' für einige Werte von ζ , das heißt für einige Punkte der z -Achse, zu bestimmen und dann entweder graphisch oder mit einfachen Näherungsformeln zu integrieren.

Literaturverzeichnis

Baeschlin C. F., 1948, Lehrbuch der Geodäsie: Zürich, Orell-Füssli-Verlag.

Barnitzke J. E., 1943, Bestimmung der Bodendichte durch Gravimetermessungen: Beiträge zur angewandten Geophysik, Bd. 10, S. 85-95.

- Gassmann F.*, 1957, Theoretische Schwere im Innern von Massen: Festschrift C. F. Baeschlin, Zürich, S. 27–40. Mitteilung Nr. 32 aus dem Institut für Geophysik, ETH, Zürich.
- Jung K.*, 1943, Über die Bestimmung der Bodendichte aus den Schweremessungen: Beiträge zur angewandten Geophysik, Bd. 10, S. 154–164.
- 1953, Zur Bestimmung der Bodendichte nach dem Nettleton-Verfahren: Zeitschrift für Geophysik, Sonderband 1953, S. 54–58.
- Kellogg O. D.*, 1929, Foundations of Potential Theory: New York, The Murray Printing Company.
- Nettleton L. L.*, 1939, Determination of Density for Reduction of Gravimeter Observations: Geophysics, v. 4, p. 176–183.
- Parasnis D. S.*, 1952, A Study of Rock Densities in the English Midlands: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Geophysical Supplements, Bd. 6, S. 252–271.
- Yaramanci A.*, 1952, Eine allgemeine Methode zur gravimetrischen Gesteinsdichtebestimmung: Revue de la Faculté des Sciences de l'Université d'Istanbul, Série A, Tome XVIII, Fasc. 3; Diss. ETH, Zürich.

Die Anwendung der Photogrammetrie bei der Aufnahme des alten Bestandes für Güterzusammenlegungen

Von Phil. Zingg, Dipl.-Ing., Zürich

Die Knappheit an technischem Personal und die sich daraus ergebende Unmöglichkeit, innert der vorgesehenen Fristen die für die Durchführung der Güterzusammenlegung notwendigen Planunterlagen zu beschaffen, gaben Anlaß, die Photogrammetrie auch in Flachlandkantonen einzusetzen. Auf Grund der Erfahrungen, die mit der Anwendung dieser Methode über ein Gebiet von mehr als 6000 ha gewonnen werden konnten, lassen sich Richtlinien für künftige Arbeiten aufstellen.

1. Vorbereitung

Vorerst ist gründlich abzuklären, ob sich das zu vermessende Gebiet für die photogrammetrische Aufnahme eignet. Gebiete von weniger als 100 ha kommen der hohen Grundkosten wegen kaum in Betracht. Eine wesentliche Rolle spielt die Form des Aufnahmegebietes, die Verteilung von Feld und Wald sowie die Bodensicht. Vor allem geben Waldränder, Hecken und dichter Obstbaumbestand Anlaß zu zeitraubenden Ergänzungsarbeiten. Bereits bestehende Pläne, wie zum Beispiel Drainageaufnahmen, werden, sofern sie nicht eine gewisse Fläche aufweisen, vorteilhafter als Grundlagenkrokis für die Verpflockung und Signalisierung verwendet. Die Kosten für deren Ergänzung und Einbau in das photogrammetrische Operat, zusammen mit den höheren Einheitspreisen bei Verwendung vorhandener Aufnahmen in der Güterzusammenlegung, sind zum mindesten nicht kleiner als für eine photogrammetrische Neukartierung.