

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 58 (1960)

Heft: 5

Artikel: Lotlinienkrümmung und Projektion eines Punktes oder einer Strecke auf das Geoid

Autor: Hunziker, E.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-216097>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 30.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Lotlinienkrümmung und Projektion eines Punktes oder einer Strecke auf das Geoid

Von E. Hunziker

Die Forderung nach einer ungewöhnlich großen Meßgenauigkeit wirft auch ungewohnte Fragen auf. So blieb nach der Messung der Basis in Heerbrugg abzuklären, was für eine Rolle die Lotkrümmung bei der Projektion der Basis auf das Geoid spielt.

In den nachstehenden drei Abschnitten wird die Wirkung der Lotlinienkrümmung untersucht, zuerst deren Einfluß auf die Projektion eines Oberflächenpunktes auf das Geoid und hernach, wie sich die Lotkrümmung bei der Projektion der Basis in Heerbrugg geltend macht. Im letzten Abschnitt findet man vergleichsweise noch die Verhältnisse eines in großer Höhe gelegenen Punktes, der Station Jungfrauoch, dargelegt.

1. Der Einfluß der Lotlinienkrümmung auf die Lage eines projizierten Punktes

Helmert projizierte die Oberflächenpunkte der Erde auf ein Ellipsoid und benutzte dazu die Normale auf die Ellipsoidfläche. Auf diese Weise entsteht die Lotabweichung im Punkte P der Erdoberfläche als Winkel zwischen der Lotrichtung im Punkte P und der Richtung der projizierenden Ellipsoidnormalen (Fig. 1).

Bei der neuerdings verwendeten Pizzetti-Projektion werden zuerst die Oberflächenpunkte mit Hilfe ihrer gekrümmten Lotlinie auf das Geoid und von dort mittels der Ellipsoidnormalen auf das Bezugsellipsoid projiziert. Die Pizzetti-Projektion ist also eine Doppelprojektion. Wir beschränken uns im Folgenden auf die Projektion auf das Geoid.

Ursprünglich projizierte Pizzetti den Oberflächenpunkt P mit Hilfe der verlängerten Tangente an die Lotlinie in P . Der Schnitt dieser Tangente mit dem Geoid sei P' (Fig. 1), der Durchstoßpunkt der gekrümmten Lotlinie durch das Geoid \bar{P} . Die Lotlinie wird im allgemeinen eine Raumkurve sein. In den nachstehenden Figuren 1 bis 3 sind die Projektionen auf eine Vertikalebene mit einem bestimmten Azimut α , sowie Schnitte mit dieser Ebene eingezeichnet.

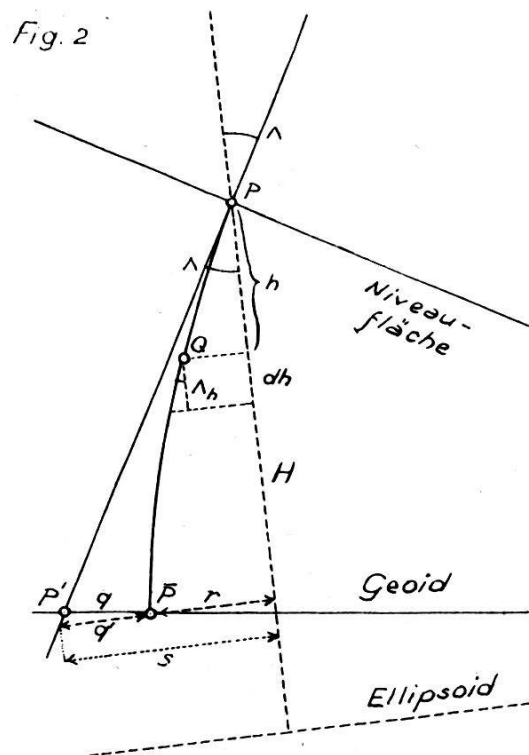
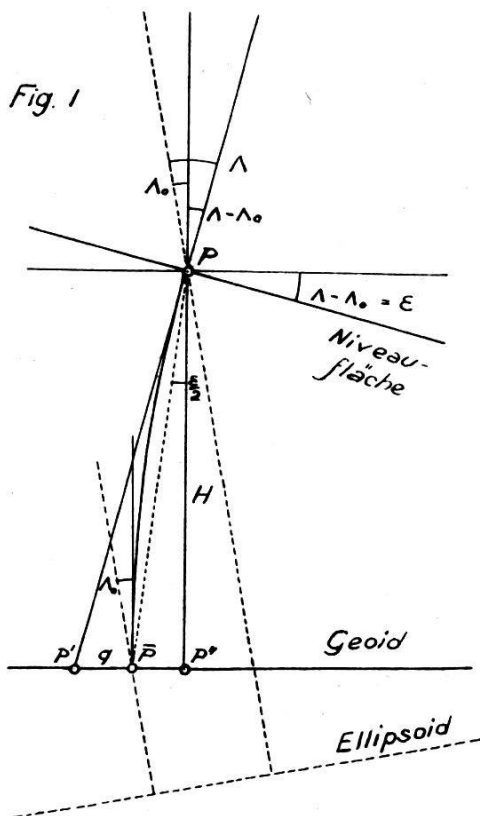
In Fig. 1 bedeuten:

- A = Lotabweichungskomponente im Oberflächenpunkt P und im Azimut α ;
- A_0 = Lotabweichungskomponente im Geoidpunkt \bar{P} ;
- ϵ = $A - A_0$ wird kurz als Lotkrümmung bezeichnet; sie ist unabhängig von der Lage des Ellipsoides;
- q = $P'\bar{P}$ = Lageverschiebung im Geoid in der Richtung α infolge der Lotkrümmung.

Kann die Projektion der Lotlinie in eine bestimmte Vertikalebene als Kreisbogen betrachtet werden, so erhält man mit genügender Annäherung:

$$q = P'\bar{P} = P'P'' - \bar{P}P'' = H \cdot \operatorname{tg} \varepsilon - H \cdot \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \sim H \cdot \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.1)$$

Da $\varepsilon = \Lambda - \Lambda_0$ unabhängig ist von der Wahl des Ellipsoides, können die Lotabweichungskomponenten Λ und Λ_0 aus den sichtbaren Massen gerechnet werden, wobei unter «sichtbaren Massen» die Massen zwischen der sichtbaren Erdoberfläche und dem Geoid verstanden werden.



Sind noch für weitere, regelmäßig auf der Lotlinie verteilte Punkte Q Lotabweichungskomponenten gerechnet worden, so läßt sich die Korrektur q ohne jegliche Annahme über die Form der Lotlinien-Raumkurve und deren Projektion bestimmen. Dieses einfache Integrationsverfahren ist von F. Gassmann angewendet worden und ist nachstehend angegeben.

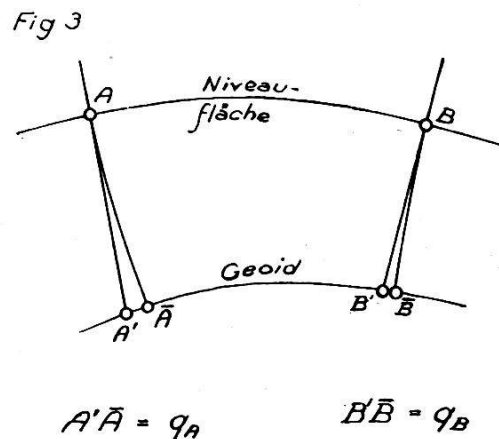
$$\left. \begin{aligned} s &= H \cdot \operatorname{tg} \Lambda \\ r &= \int_0^H \Lambda_h \cdot dh = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Lambda_i + \Lambda_{i+1}}{2} \cdot \Delta h. \\ q' &= s - r \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Wegen der Kleinheit von λ kann der Abschnitt q auf dem Geoid gleich q' angenommen werden.

2. Korrektur der projizierten Basis Heerbrugg wegen Lotlinienkrümmung

Setzt man voraus, die beiden Basisenden liegen in gleicher Meereshöhe, so hat man die in Fig. 3 skizzierten Verhältnisse.

Die Projektion der gekrümmten Lotlinie durch A trifft das Geoid im Punkte \bar{A} . Die mittels der in A und B geradlinig verlängerten Lotlinien erhaltene projizierte Basis $A'B'$ bedarf also einer Korrektur ($-q_A + q_B$), will man die Basis $\bar{A}\bar{B}$ auf dem Geoid erhalten. Die Korrektur $-k = q_A - q_B$ ist klein im Vergleich zur Korrektur K , die an der Länge einer in der mittleren Meereshöhe h_m gemessenen Basis ange-



bracht werden muß, um die Länge in der Meereshöhe Null zu erhalten. Bezeichnet man die Basislänge mit D und den Erdkrümmungshalbmesser im Azimut α mit R , so ist:

$$K = -D \cdot \frac{h_m}{R},$$

wo

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \alpha}{M} + \frac{\sin^2 \alpha}{N}.$$

Für die Heerbrugger Basis ist K von der Größenordnung -50 cm.

Doch wenden wir uns wieder der Korrektur wegen Lotkrümmung zu. Das Südenende der Basis Heerbrugg befindet sich auf dem Montlingerberg. Auf der Lotlinie dieser Station ist für vier Punkte aus den sichtbaren Massen die Lotabweichungskomponente λ in der Basisrichtung gerechnet worden. Die vier Punkte sind folgendermaßen auf der Lotlinie verteilt: Oberflächenpunkt P in Meereshöhe 475 m, Q' in Meereshöhe 300 m, Q'' in Meereshöhe 150 m und \bar{P} in Meereshöhe 0. Da die Lotkrümmung zum

weitaus größten Teil von den verhältnismäßig nahe gelegenen Massen verursacht wird, genügte es, sich auf die Massen innerhalb einer Horizontaldistanz von 2 km zu beschränken. Im Hinblick auf die nicht einfachen geologischen Verhältnisse ging es nicht an, für alle Massen zwischen der Erdoberfläche und dem Geoid eine einheitliche Dichte anzunehmen. Dementsprechend wurde außer der Erdoberfläche, dem sogenannten oberen Relief, ein zweites, unteres Relief berücksichtigt. Die Dichte der Massen zwischen dem Geoid und dem unteren Relief wurde gleich 2,7 (Kalkgestein) gesetzt, die Dichte zwischen unterem und oberem Relief gleich 1,9 (Schotter) angenommen. An den Stellen, wo das Kalkgestein aus dem Schotter herausragt, fallen unteres und oberes Relief zusammen. Das untere Relief ist im Maßstab 1:25000 von N. Bavoni, Geologen am Geophysikalischen Institut der ETH, entworfen worden.

Es gingen die folgenden Lotabweichungskomponenten hervor:

Punkt	Meereshöhe H	Lotabweichungskomponente A	Lotkrümmungskomponente
P	475 m	$A_1 = + 0'',75$	$+ 0'',25$
Q'	300 m	$A_2 = + 0'',50$	$+ 0'',32$
Q''	150 m	$A_3 = + 0'',18$	$+ 0'',09$
\bar{P}	0 m	$A_4 = + 0'',09$	
«Lotkrümmung» $A_1 - A_4$			$= + 0'',66$

Positives Zeichen der A bedeutet Ablenkung des Zenites in der Richtung nach dem Basisende Nord.

Wie schon gesagt, wurden die Massen nur bis zu einer Entfernung von 2 km von der Station berücksichtigt. Es zeigte sich, daß die einzelnen Ringzonen die folgenden Beiträge zur Lotkrümmungskomponente liefern:

Massen in der Entfernung	Beitrag an die Lotkrümmungskomponente	
	"	in %
0,0–0,1 km	+ 0,32	48
0,1–0,2 km	+ 0,17	26
0,2–0,3 km	+ 0,07	11
0,3–0,4 km	+ 0,05	8
0,4–0,5 km	+ 0,02	3
0,5–1,0 km	+ 0,03	4
1,0–2,0 km	0,00	0
0,0–2,0 km	+ 0,66	100

Die Einwirkung sichtbarer Massen auf die Lotkrümmung nimmt also mit der Entfernung rasch ab.

Rechnet man nun nach 1.1, das heißt nach der vereinfachenden Annahme, die Projektion der Lotlinie sei ein Kreisbogen, die Korrektur q , so wird:

$$q = \frac{A_1 - A_2}{2 \rho} \cdot H = 0,76 \text{ mm.}$$

Die strengere Bestimmung von q nach 1.2 gibt

$$q = 0,85 \text{ mm.}$$

Im Punkte Basisende Nord sind sowohl die topographischen als auch die geologischen Verhältnisse einfacher als im Punkte Basisende Süd. Der Einfluß der Lotkrümmung infolge der Anziehung durch die sichtbaren Massen dürfte deshalb im Punkte Basisende Nord vernachlässigbar sein.

Bis jetzt war ausschließlich von den aus sichtbaren Massen gerechneten Lotabweichungen die Rede. Es soll nun auch die Wirkung der sogenannten normalen Lotkrümmung in die Untersuchung einbezogen werden. Denkt man sich die Erdrinde von allen störenden Massen befreit, so daß auf ihrer Oberfläche in jedem Punkte die sogenannte Normalschwere vorhanden ist, so verlaufen die Niveaulächen, das heißt die Flächen gleichen Potentials, nicht parallel. Man nennt die auftretende Konvergenz die normale Konvergenz der Niveaulächen. Eine senkrecht zu diesen Niveaulächen verlaufende normal gekrümmte Lotlinie liegt in einer Meridianebene. Ihre Krümmung bewirkt eine Abweichung $\Delta\varphi$ der im Oberflächenpunkt P gemessenen Polhöhe φ gegenüber der Polhöhe φ' im Geoidpunkte \bar{P} . Die beobachtete Breite ist stets zu groß. $\Delta\varphi$ stellt zugleich die Differenz zwischen der Lotabweichungskomponente ξ im Punkte P und der Lotabweichungskomponente ξ_0 im Punkte \bar{P} dar. Es ist:

$$\xi - \xi_0 = \Delta\varphi'' = 0,000171 \cdot \sin 2\varphi \cdot H^m,$$

das heißt, die normale Lotkrümmung wächst proportional mit der Meereshöhe H , oder, mit anderen Worten ausgedrückt, infolge der Kleinheit von $\Delta\varphi$ (erst $1''$ für $H = 5800 \text{ m}$) darf die normal gekrümmte Lotlinie als Kreisbogen angesehen werden.

Projiziert man die normal gekrümmte Lotlinie im Punkte Basisende Süd (Montlingerberg) auf die Vertikalebene in der Basisrichtung und benutzt man die Näherungswerte $\varphi = 47^\circ 20'$ und $\alpha = 34^\circ,5$, so ergibt sich $A' = 0,000141 \cdot H^m$

und daraus für die vier herausgegriffenen Punkte der Lotlinie die folgenden Lotabweichungskomponenten A' :

$$\begin{array}{ll} P : & H = 475 \text{ m}; \quad A'_1 = + 0'',07 \\ Q' : & \quad 300 \text{ m}; \quad A'_2 = + 0'',04 \\ Q'' : & \quad 150 \text{ m}; \quad A'_3 = + 0'',02 \\ \bar{P} : & \quad 0 \text{ m}; \quad A'_4 = \quad 0'',00 \end{array}$$

Addiert man diese Λ' zu den weiter oben aufgeführten Λ , so erhält man aus 1.2 eine Korrektur q_A von $+ 0,93$ mm.

Ganz entsprechend sind dem Punkte Basisende Nord – wenn zwischen Oberflächenpunkt und Geoid wieder zwei Zwischenpunkte Q' und Q'' eingeschaltet werden – die folgenden Λ' zugeordnet:

$P :$	$H = 415$ m;	$\Lambda'_1 = + 0'',06$
$Q' :$	280 m;	$\Lambda'_2 = + 0'',04$
$Q'' :$	140 m;	$\Lambda'_3 = + 0'',02$
$\bar{P} :$	0 ;	$\Lambda'_4 = 0'',00$

Sowohl nach 1.2 als nach 1.1 gerechnet findet man

$$q_B = 0,06 \text{ mm.}$$

Die Korrektur — $k = q_A - q_B$ nimmt den Wert an:

$$k = - 0,87 \text{ mm.}$$

Infolge der Krümmung der Lotlinie ist also die Basislänge um 0,87 mm zu verkürzen.

3. Die Krümmung der Lotlinie im Punkte Jungfraujoeh

Im südlichen Endpunkt der Heerbrugger Basis mit seiner verhältnismäßig kleinen Meereshöhe bleibt die Lotlinienkrümmung und deren Einfluß gering. Um vergleichen zu können, wollen wir nun noch die Verhältnisse in einem Hochgebirgspunkt, dem Jungfraujoeh, betrachten.

Auf der Lotlinie des Jungfraujoehes sind acht Punkte ausgewählt worden: der Oberflächenpunkt P mit der Meereshöhe 3575 m; die Punkte Q_i mit den Koten 3000 m, 2500 m, 2000 m, 1500 m, 1000 m, 500 m; der Punkt P' im Geoid. Für alle diese Punkte sind aus den sichtbaren Massen die Lotabweichungskomponenten ξ im Meridian und η in der dazu senkrechten Ebene, im ersten Vertikal, bestimmt worden. Die beiden Komponenten wurden doppelt, sowohl topographisch, das heißt allein aus den sichtbaren Massen, als auch mit Berücksichtigung der Isostasie, gerechnet. Dabei wurde angenommen, die sichtbaren Massen weisen einheitlich die Dichte 2,67 auf. Ferner sind die sichtbaren Massen bis zu einer Entfernung von 79,79 km, dem inneren Radius der Zone 11 von Darling, mit einbezogen worden.

Die Ergebnisse findet man in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt. Positives ξ bedeutet Ablenkung des Zenites nach Norden, positives η Ablenkung des Zenites nach Osten. Bemerkenswert sind die großen Werte der ξ und η sowie die bis auf $5''$ ansteigenden Beträge der Lotkrümmung im ersten Vertikal. Sowohl die Projektion der Lotlinie auf den Meridian als auch die Projektion auf den ersten Vertikal weisen einen Wendepunkt auf. Die Projektion auf die Meridianebene hat in ihrem

obersten Teil eine nach Süden und hernach eine nach Norden konkave Seite; die Projektion auf den ersten Vertikal ist zuerst nach Osten und dann nach Westen konkav.

Punkt	H m	topographisch		isostatisch	
		ξ	η	ξ	η
<i>P</i>	3575	+ 23",10	— 16",98	+ 19",71	— 15",58
<i>Q</i> ₁	3000	+ 24",48	— 17",62	+ 21",06	— 16",17
<i>Q</i> ₂	2500	+ 24",11	— 16",74	+ 20",62	— 15",25
<i>Q</i> ₃	2000	+ 23",33	— 15",82	+ 19",73	— 14",27
<i>Q</i> ₄	1500	+ 22",53	— 15",12	+ 18",91	— 13",53
<i>Q</i> ₅	1000	+ 21",33	— 14",05	+ 17",86	— 12",33
<i>Q</i> ₆	500	+ 20",56	— 13",33	+ 16",67	— 11",58
<i>P'</i>	0	+ 20",24	— 12",56	+ 16",27	— 10",75
«Lotkrümmung»		+ 2",86	— 4",42	+ 3",44	— 4",83

Wendet man wieder die Beziehungen 1.2 an, so findet man im Meridian für die Verschiebung q die zwei Beträge:

aus den topographisch gerechneten ξ : $q_{\xi} = + 8,7$ mm,

aus den isostatisch gerechneten ξ : $q_{\xi} = + 12,2$ mm.

Der Durchstoßpunkt der gekrümmten Lotlinie durch das Geoid ist um q_{ξ} nach Norden versetzt.

Im ersten Vertikal ergibt sich

aus den topographisch gerechneten η : $q_{\eta} = -27,6$ mm,

aus den isostatisch gerechneten η : $q_{\eta} = -30,8$ mm.

Der Schnittpunkt der gekrümmten Lotlinie mit dem Geoid liegt um q_{η} westlich des Fußpunktes der in *P* geradlinig verlängerten Lotlinie.

Die vereinfachende Annahme, die Projektionen der Lotlinien weisen Kreisform auf, wird hier den wirklichen Verhältnissen durchaus nicht mehr gerecht. Dementsprechend gibt 1.1 die sehr stark abweichenden Werte:

aus $\xi_P - \xi_{P'}$, isostatisch abgeleitet: $q_{\xi} = +29,8$ mm,

aus $\eta_P - \eta_{P'}$, isostatisch abgeleitet: $q_{\eta} = -41,9$ mm.

Um den Verlauf der Lotlinie zu veranschaulichen, sind auch für die sechs Niveaulächen durch die Punkte *Q* die Abstände q_{ξ} und q_{η} gerechnet worden. Die Ergebnisse sind in der nachstehenden Tabelle aufgeführt.

lichung «Die astronomischen Nivellemente in der Schweiz» gegeben, erschienen in der deutschen «Zeitschrift für Vermessungswesen», 1957, Hefte 4 und 5. In verkleinertem Maßstab wiederholen wir mit Genehmigung des Verfassers in Fig. 4 die erwähnte Zeichnung. $N_0 - N_0$ bedeutet die Lotlinienrichtung im Durchstoßpunkt der gekrümmten Lotlinie durch das Geoid; mit $N - N$ ist die gekrümmte Lotlinie bezeichnet.

In der Fig. 5 ist als Zeichnungsebene die Normalebene zur Tangente an die Lotlinie im Oberflächenpunkt P gewählt. Die genannte Tangente wird also durch den Punkt P dargestellt. Auf der Ordinatenachse – mit der Nordrichtung zusammenfallend – wurden die q_ξ , auf der Abszissenachse die q_η aufgetragen. Die eingezeichneten Punkte sind die Normalprojektion der Schnittpunkte der gekrümmten Lotlinie mit den betreffenden Niveaulflächen auf die Zeichnungsebene.

Zusammenfassend läßt sich sagen: Im Gebirge geht es nicht an, die Lotlinie durch einen Kreisbogen zu ersetzen. Die Lageverschiebung q des Durchstoßpunktes der gekrümmten Lotlinie durch das Geoid, gegenüber dem Durchstoßpunkt des geradlinig verlängerten Lotes im Oberflächenpunkt, kann sich auf einige Zentimeter belaufen. Im Punkte Jungfrauoch beträgt das isostatisch abgeleitete $q = 33,1$ mm im Azimut $291^\circ,6$.

Analogrecheneinrichtung zur Berechnung und Ausgleichung von Trilaterationsnetzen

Von H. G. Jerie, ITC, Delft, Holland

1. Einleitung

Seit der Einführung der lichtelektrischen und elektronischen Entfernungsmessung gewinnt die geodätische Punktbestimmung durch Trilateration eine immer stärkere Bedeutung. Das damit verbundene Problem der Netzberechnung und -ausgleichung hat schon vielfache gründliche Behandlung erfahren, und mit dem Aufkommen elektronischer Rechenautomaten bietet auch die Lösung großer Gleichungssysteme keine unüberwindbaren Schwierigkeiten mehr.

Trotzdem ist es, und nicht nur aus theoretischen Gründen, reizvoll, die Möglichkeiten der Lösung dieser Aufgabe mit Hilfe einer mechanischen Analogrecheneinrichtung, die auf dem Prinzip elastischer Systeme basiert, zu untersuchen.

Die Entscheidung, welche Art der Behandlung vorteilhafter ist, läßt sich auf keinen Fall für alle praktischen Verhältnisse im vorhinein treffen. Natürlich erscheint die Möglichkeit, die Meßdaten in einen Rechenautomaten einzugeben, auf einen Knopf zu drücken und einige Minuten später eine Liste der ausgeglichenen Punktkoordinaten zu erhalten, überwältigend. Demgegenüber ist die Arbeit mit einer Analogrecheneinrichtung ziemlich primitiv; sie bietet jedoch dafür andere und in ihrer praktischen Bedeutung ebenfalls nicht zu unterschätzende Vorteile: