

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

**Band:** 58 (1960)

**Heft:** 8

**Artikel:** Die Methode der direkten Geländekorrekturen [Fortsetzung]

**Autor:** Frisch, Armand, K.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-216107>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 30.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungs-  
wesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein;  
Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations  
foncières; Société suisse des ingénieurs du  
Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 8 • LVIII. Jahrgang

Erscheint monatlich

15. August 1960

## Die Methode der direkten Geländekorrektion

Von Armand K. Frisch, Wien

(Fortsetzung)

Die Anziehung  $T_P$  eines Ringsektors auf den Punkt  $P$  ergibt sich nach (5), wenn für  $d$  die jeweilige Höhe  $h$  des Ringsektors über oder unter dem Geländepunkt eingesetzt wird, als Differenz

$$T_P = \frac{2 \pi k^2 \vartheta}{n} (h + a_{i+1} - \sqrt{h^2 + a_{i+1}^2}) - \frac{2 \pi k^2 \vartheta}{n} (h + a_i - \sqrt{h^2 + a_i^2}),$$

das heißt

$$T_P = \frac{2 \pi k^2 \vartheta}{n} (a_{i+1} - a_i + \sqrt{h^2 + a_i^2} - \sqrt{h^2 + a_{i+1}^2}), \quad (11)$$

wobei  $n$  die Anzahl der Sektoren ist.

Handelt es sich dagegen um die Anziehung der Ringsektoren auf einen anderen Punkt der Lotlinie, so ist wohl zu unterscheiden, ob es sich um eine Zusatz- oder um eine Defizitmasse handelt. Denn wenn man nach der Verschiebung des Punktes von  $P$  nach  $P_u$  die unendliche Platte wieder aufsetzt, so wird ihr Anziehungsbetrag bei Vorhandensein von Überschussmassen zu klein und umgekehrt bei Defizitmassen zu groß sein.

Somit ergibt die Anziehung der Überschussmassen eine Vergrößerung der Anziehung der unendlichen Platte auf den Punkt  $P_u$ , weshalb die Oberflächenschwere  $g$  um diesen Wert der Anziehung der Überschussmassen ebenso verkleinert werden muß, wie um den Anziehungswert der Platte selbst, während die fehlende Wirkung der Defizitmassen eine Verringerung der Plattenanziehung bedeutet, weshalb  $g$  um den Wert dieser Verringerung vergrößert zu werden hat. Liegen etwa die Abweichungen von der Platte wie in Abbildung 7 gänzlich oberhalb des Niveaus des Punktes  $P_u$ , so müssen demnach die Überschussmassen negativ und die Defizitmassen positiv bezüglich  $g$  in Rechnung gestellt werden.

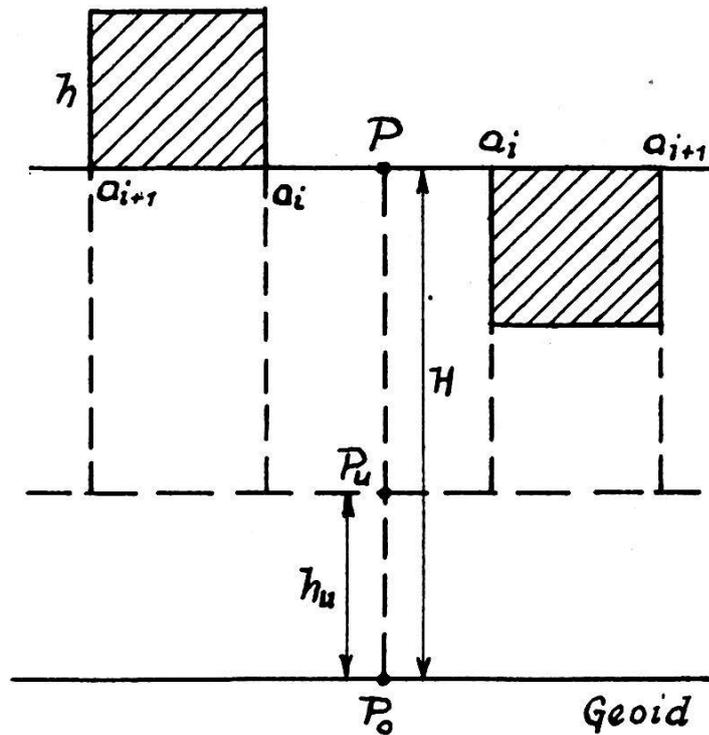


Abb. 7

Die Anziehung  $T_{P_u}$  eines Ringsektors auf  $P_u$  ergibt sich als Differenz aus (4):

$$T_{P_u} = \frac{2 \pi k^2 \vartheta}{n} \cdot (h + \sqrt{(H - h_u)^2 + a_{i+1}^2} - \sqrt{(h + H - h_u)^2 + a_{i+1}^2}) - \frac{2 \pi k^2 \vartheta}{n} \cdot (h + \sqrt{(H - h_u)^2 + a_i^2} - \sqrt{(h + H - h_u)^2 + a_i^2})$$

beziehungsweise

$$T_{P_u} = \frac{2 \pi k^2 \vartheta}{n} (\sqrt{(H - h_u)^2 + a_{i+1}^2} - \sqrt{(H - h_u)^2 + a_i^2} - \sqrt{(h + H - h_u)^2 + a_{i+1}^2} + \sqrt{(h + H - h_u)^2 + a_i^2}). \quad (12)$$

Somit erhalten wir bei Berücksichtigung der Geländeform die vom Oberflächenpunkt  $P$  auf einen beliebigen in der Lotlinie gelegenen Punkt  $P_u$  reduzierte Schwere mit

$$g_u = g + \frac{2g}{R} (H - h_u) - 4 \pi k^2 \vartheta (H - h_u) + \Sigma T_P - \Sigma T_{P_u},$$

worin der zweite Term des Ausdrucks auf der rechten Seite dieser Gleichung die Freiluftreduktion darstellt, der dritte Term die Plattenreduktion, der vierte die Summe der stets positiven Anziehungen der einzelnen Ringsektoren auf den Geländepunkt  $P$  als Zusatz zu der vor Verschiebung des Punktes abzunehmenden unendlichen Platte und der fünfte die

Summe der Anziehung der einzelnen Ringsektoren auf den Punkt  $P_u$  als Zusatz zu der nach erfolgter Verschiebung des Punktes wieder aufzusetzenden Platte.

Handelt es sich um die Reduktion auf den Geoidpunkt  $P_0$ , so ergibt sich mit  $h_u = 0$ :

$$g_0 = g + \frac{2g}{R} H - 4\pi k^2 \vartheta H + \Sigma T_P - \Sigma T_{P_0},$$

wobei  $\Sigma T_{P_0}$  die Summe der Anziehungen der einzelnen Ringsektoren auf den Punkt  $P_0$  auf dem Geoid darstellt.

e) *Der Durchschnittswert mit Berücksichtigung der Geländeform*

Die Bestimmung des Durchschnittswertes mit Berücksichtigung der Geländeform ist im Gegensatz zum analogen Wert bei der unendlichen Platte wegen der Nichtlinearität des Schwereverlaufs in der Lotlinie wesentlich schwieriger. 1932 hat Niethammer [3] als erster die Berechnung des Durchschnittswertes

$$\bar{g} = \frac{1}{H} \int_0^H g_u dh_u$$

mittels numerischer Integration durchgeführt. Er ging dabei folgendermaßen vor:

Man denke sich die Massen zwischen dem Geoid und der physischen Erdoberfläche aus zwei Teilen zusammengesetzt, und zwar

1. aus der unendlichen Platte von der Dicke  $H$  und der Dichte  $\vartheta$  zwischen dem Geoid und dem Geländepunkt und
2. aus den Überschussmassen, die (bis zur Entfernung von 42 km) den Geländepunkt überragen und denen die Dichte  $+\vartheta$  zukommt, beziehungsweise aus den Massendefekten, die unterhalb der Höhe dieses Punktes liegen und die Dichte  $-\vartheta$  haben.

Der Schwereverlauf in der Lotlinie der unter 1 zusammengefaßten Massen ist linear; somit ist der Durchschnittswert dieses Teiles gleich dem Schwerewert in halber Höhe, das ist aber nichts anderes als der Durchschnittswert laut Helmerts Gebirgsreduktion, wie in Punkt c, Seite 250, ausgeführt wurde.

Bezeichnet man nun die Wirkung der unter 2 zusammengefaßten Massen, die über die Platte hinausragen oder an ihr fehlen, mit  $\Delta g''_u$ , so wird der gesamte Durchschnittswert

$$\bar{g} = \bar{g} + \frac{1}{H} \int_0^H \Delta g''_u dh_u + \Sigma T_P, \quad (13)$$

wobei  $\bar{g}$  die Helmertsche Gebirgsreduktion ist, während der zweite Term des rechts stehenden Ausdrucks nichts anderes darstellt als den Durchschnittswert  $\Delta\bar{g}''$  aller unter 2 zusammengefaßten Massenwirkungen.

Der Berechnung dieser Massen wird nun die gleiche Einteilung des Geländes nach Zonen und Sektoren zugrunde gelegt, wie sie in Punkt d für die topographische Reduktion des Oberflächenwertes mitgeteilt wurde.

Sei  $T_u$  die Anziehung eines solchen Ringsektors auf den Punkt  $P_u$ , so findet man nach Vertauschung von Summation und Integration:

$$\Delta\bar{g}'' = \frac{1}{H} \int_0^H \Delta g''_u dh_u = \frac{1}{H} \int_0^H \Sigma T_u \cdot dh_u = \Sigma \int_0^H \frac{T_u}{H} \cdot dh_u.$$

Um die verschieden zu behandelnden Zusatz- und Defizitmassen zu unterscheiden, setzt nun Niethammer für die ersteren, also für  $\vartheta > 0$ ,

$$\int_0^H \frac{T_u}{H} \cdot dh_u = + \vartheta F(H, h_u)$$

und für die letzteren mit  $\vartheta < 0$

$$\int_0^H \frac{T_u}{H} \cdot dh_u = - \vartheta \Phi(H, h_u)$$

und findet mit  $\lambda = 1, \mu = 0$  für  $\vartheta > 0$  beziehungsweise  $\lambda = 0, \mu = 1$  für  $\vartheta < 0$  den Ausdruck

$$\Delta\bar{g}'' = \vartheta \cdot \Sigma \Sigma (\lambda F - \mu \Phi).$$

Das doppelte Summenzeichen deutet an, daß die Summen über sämtliche Zonen und Sektoren zu nehmen sind.

Die Funktionen  $F$  und  $\Phi$  werden sodann mit Hilfe der Anziehungsformeln (11) und (12) mittels numerischer Integration gewonnen. Hierfür hat Niethammer einerseits Tabellen mit  $\vartheta = 1$  für die Werte von  $F$ , und  $\vartheta = -1$  für  $\Phi$  und  $F_0$  ( $F_0$  ist der Wert von  $F$  für  $H = 0$ ) beziehungsweise für  $\Delta F = F - F_0$  errechnet und andererseits auch graphische Darstellungen für die Funktionen  $F_0$ ,  $\Delta F$  und  $\Phi$  ausgearbeitet, wobei sich die Werte von  $F_0$  ( $H = 0, h$ ) am Kopf der Tafeln befinden. Die sich aus den Tafeln durch Ablesung ergebenden Zahlen sind Einheiten der zweiten Dezimale des Milligals; ihre Genauigkeit kann durch Interpolation gesteigert werden.

Die Berechnung des Durchschnittswertes  $\bar{G}$  ergibt sich sohin mit

$$\bar{G} = g + \frac{g}{R} H - 2 \pi k^2 \vartheta H + \Sigma T_P - \Sigma \bar{T},$$

wenn unter  $-\Sigma \bar{T} = \Delta \bar{g}''$  verstanden wird.

Niethammer hat seine Zonen später unter Berücksichtigung der Erdkrümmung bis zu 188 km ausgedehnt.

Vernachlässigt man die Nichtlinearität des Schwereverlaufs in der Lotlinie, so kann man mit Mader [4] einfach das arithmetische Mittel aus Gelände- und Geoidschwere, das heißt  $\bar{G} = \frac{1}{2}(g + g_0)$ , als Durchschnittswert nehmen. Der Fehler, der sich dadurch beim Punkt Hochthor ( $H = 2504$  m) gegenüber einem quadratisch angenommenen Schwereverlauf ergeben würde, beträgt nach Mader 5,2 mm, gegenüber dem nach Niethammer berechneten Durchschnittswert jedoch 4,2 mgal<sup>2</sup> oder etwa 11 mm und die exakte Berechnung nach der Methode der direkten Geländekorrekturen bis 1000 km, wie sie in der Folge gezeigt wird, ergibt einen Fehler von 4,675 mgal beziehungsweise etwa 12 mm.

Bei der Bestimmung dieses Durchschnittswertes aus  $g$  und  $g_0$  erhält Mader als Zwischenresultat gleichzeitig auch noch den für die Geophysik bei der Untersuchung der Massenlagerung in der Erdkruste interessanten Bouguerschen  $g$ -Wert

$$g''_0 = g + \frac{2g}{R} H - 2 \pi k^2 \vartheta H + \Sigma T_P, \text{ das ist}$$

Beobachtungswert + Freiluftkorrektur + topographische Korrektur auf den Geländepunkt vermindert um die einfache Plattenkorrektur.

Ferner vereinfacht sich die Berechnung gegenüber der Niethammers dadurch, daß Mader bei Bestimmung des Geoidschwerewertes die unendliche Platte nur einmal berücksichtigt, bei der Berechnung der topographischen Korrektur auf den Geoidpunkt dagegen gleich die Anziehung der Gesamtmassen zwischen Geoid und physischer Erdoberfläche bis zum Radius von 30 km um  $P$  ansetzt. Dies hat den Vorteil, daß diese Anziehungswerte  $A_0$  (zum Unterschied von  $T$ , womit die Ergänzungsabteile zur Bouguerschen Platte bezeichnet werden) bezüglich des Beobachtungswertes  $g$  gleiches Vorzeichen haben, und zwar ständig negatives, da die  $A_0$ -Massen eben keine positive oder negative Ergänzung zur unendlichen Platte mehr bilden, sondern dieselbe, allerdings nur bis zu 30 km, beinhalten. Daraus ergibt sich der weitere Vorteil, daß nun nicht mehr mit dem im Hochgebirge zweifellos zu großen Wert der zweifachen unendlichen Platte operiert wird, sondern nur mit der einfachen, während das zweitemal die Massen nur bis 30 km berücksichtigt werden. Das läuft aber praktisch auf die Annahme eines Mittelwertes für den

<sup>2</sup> Die Angabe in Maders Tauernnivelllement bezüglich der Berechnung Hochthor nach Niethammer, wo zwischen dem Wert Niethammers und dem arithmetischen Mittel Maders nur eine Differenz von 1,63 mgal besteht, beruht auf einem Irrtum in der Bestimmung der Niethammerschen topographischen Korrektur des Durchschnittswertes, die nicht 15,45 mgal, sondern nur 12,88 mgal beträgt.

Geländeeinfluß hinaus, und zwar des arithmetischen Mittels zwischen der unendlichen Platte und einem Zylinder von gleicher Höhe und 30 km Radius, was aber nichts anderes ist als ein gewisser Geländeabfall, der ja auch in der Natur irgendwie auftreten muß. Dadurch kann Mader auch mit einer einzigen Tabelle für die Anziehungen  $T_P$  der Abschnitte bezüglich des Oberflächenpunktes und für die  $A_0$  bezüglich des Geoidpunktes das Auslangen finden, da beide nach (11) zu berechnen wären.

Der Madersche Durchschnittswert ergibt sich schließlich mit

$$\bar{G} = \frac{1}{2} (g + g_0) = g + \frac{g}{R} H - \pi k^2 \vartheta H + \frac{1}{2} (\Sigma T_P - \Sigma A_0).$$

Der in der Maderschen Berechnung praktisch auftretende allmähliche Geländeabfall außerhalb des 30-km-Zylinders wurde von Ledersteger [7] in einer anderen, den natürlichen Gegebenheiten besser entsprechenden Form berücksichtigt. Ledersteger bringt ein Modell in Vorschlag, bei dem sich das Gelände aus 500 m dicken zylindrischen Scheiben zusammensetzt, deren Radien, an der Oberfläche mit 40 km beginnend, stufenweise um je 30 km zunehmen, wodurch ein natürlicher Geländeabfall erzielt wird.

Infolge der dabei eintretenden Erweiterung des endlichen Modells, das bei einer Stationshöhe von 3000 m eine Grundplatte vom Radius 190 km hat, muß bereits die Erdkrümmung berücksichtigt werden, weshalb Ledersteger bei der Berechnung der Anziehung dieses Modells auf die Punkte  $P, 1, 2, \dots, 6$  (siehe Abb. 8) von den Formeln für die Anziehung einer differentiellen sphärischen Scheibe auf einen in deren Achse gelegenen Aufpunkt ausgeht (Helmert [6]). Von der später durchgeführten Ableitung der Anziehung einer sphärischen Scheibe sei die Differentialformel vorweggenommen:

$$A_s = \pm 2 \pi k^2 \vartheta \frac{r^2}{r'^2} dr \left( 1 \mp \frac{r' \cdot \cos \psi - r}{E} \right).$$

Diese Formel läßt sich leicht transformieren in

$$A_s = \pm 2 \pi k^2 \vartheta dr \frac{r^2}{r'^2} \left( 1 - \frac{z}{E} \pm \frac{2 r'}{E} \sin^2 \frac{\psi}{2} \right);$$

den Faktor  $\frac{r^2}{r'^2} = \frac{r^2}{(r \pm z)^2} \doteq 1 \mp \frac{2z}{r}$

darf man  $\doteq 1$  setzen, denn der damit begangene Fehler macht für  $z = 2,5$  km bei einer Partialanziehung von 56 mgal erst 0,044 mgal aus.

Setzen wir noch für  $\sin \frac{\psi}{2} \doteq \frac{a}{2R}$  und für  $\frac{r'}{E} \doteq \frac{r}{a}$ , so erhalten wir die Näherung

$$A_s \doteq 2 \pi k^2 \vartheta dr \left( 1 - \frac{z}{E} \pm \frac{a}{2R} \right).$$

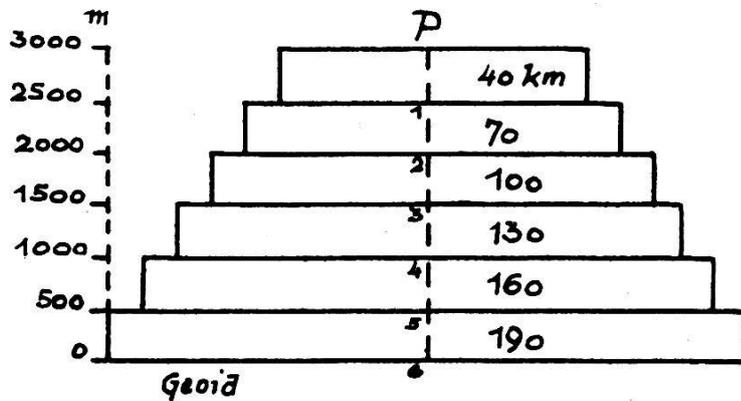


Abb. 8

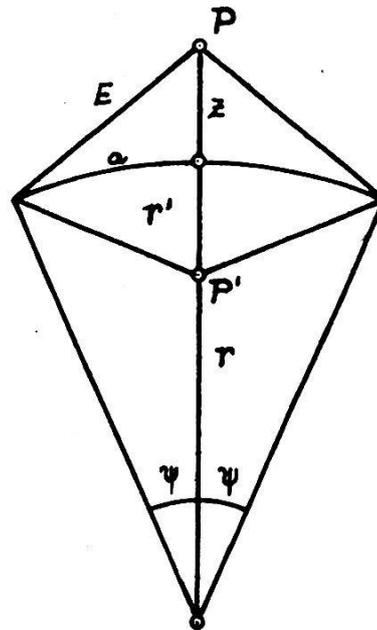


Abb. 9

Unter Berücksichtigung der ebenen Anziehungsformel nach (2):

$$dV = 2 \pi k^2 \vartheta dz (e - z), \quad A_e = - \frac{\partial dV}{\partial z} = 2 \pi k^2 \vartheta dz \left( 1 - \frac{z}{e} \right),$$

und bei Gleichsetzung von  $dr$  und  $dz$  und von  $e$  und  $E$  unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung erhalten wir:

$$A_s = A_e \left( 1 \pm \frac{a}{2r} \right).$$

Mit diesem Ausdruck gewinnt man folgende Anziehungswerte für den Verlauf der Modellschwere in den Punkten  $P, 1, 2, \dots 6$ :

$P$ : + 338,701 mgal	111,291 mgal
1: + 227,410 mgal	111,295 mgal
2: + 116,115 mgal	111,298 mgal
3: + 4,817 mgal	111,303 mgal
4: — 106,486 mgal	111,309 mgal
5: — 217,795 mgal	111,310 mgal
6: — 329,105 mgal	

Es zeigt sich hierbei ein von der Linearität so geringfügig abweichender Verlauf der Schwere, daß man dieses Modell als linear betrachten und an Stelle der unendlichen beziehungsweise endlichen Platte anwenden kann.

Bezeichnet man die vertikale Anziehung dieses Modells mit  $g''$ , und zwar  $g''_P$  bezüglich des Oberflächenpunktes  $P$  und  $g''_0$  bezüglich des Geoidpunktes  $P_0$ , so erhält man für das idealisierte Gelände (das heißt zunächst ohne Berücksichtigung der topographischen Korrektur) analog der Ableitung Seite 249, wobei jetzt das Modell die Platte ersetzt:

$\bar{g} = \frac{1}{2} (g + g_0)$  wegen der Linearität des Modells,

$$g_0 = g + \frac{2g}{R} H - g''_P + g''_0 \quad \text{und} \quad \bar{g} = g + \frac{g}{R} H - \frac{1}{2} (g''_P - g''_0). \quad (14)$$

Sobald man aber nicht mehr mit der unendlichen Platte operiert, muß man, wenn Bestehen der Isostasie vorausgesetzt wird, auch die Änderung der Wirkung der innerhalb des Geoids gelegenen negativen Kompensationsmassen erfassen, die eintritt, wenn man vom Oberflächenpunkt aus die Schwere in einem anderen Punkt, etwa dem Geoidpunkt, oder die Durchschnittsschwere ableitet. Baeschlin [8] ist im Zusammenhang mit der Berechnungsmethode Niethammers bereits ausführlich auf das Problem der Isostasie eingegangen.

Ledersteger berücksichtigt nun die Isostasie in sehr vereinfachter, aber um so leichter in die bereits abgeleiteten Ausdrücke integrierbarer Form. Er legt die Pratt-Hayfordsche Isostasie in ihrer einfachsten Form nach Baeschlin [9] zugrunde und rechnet die Kompensation bei Annahme einer einheitlichen Tiefe von 100 km erst vom Meeresniveau ab. Dies schon mit Rücksicht auf den Umstand, daß er für die Kontinentalmassen eine einheitliche Dichte von 2,7 vorausgesetzt hat.

Für die Kompensationsmassen wird nun zwecks Vereinfachung ein Kreiszyylinder von 100 km Höhe mit dem Radius

$$R = [40 + 30 (H_{\text{km}} - 0,5)] \text{ km angenommen.}$$

Die Dichte dieser negativen Kompensationsmassen ist  $\Theta = -\frac{2,7}{100} H_{\text{km}}$ .

Nun kann man die Differenz der Zylinderwirkung auf die Oberflächen- und Geoidpunkte der einzelnen Stufen  $H = 500 \text{ m}, 1000 \text{ m}$  usw. berechnen und erhält damit die entsprechenden Werte der isostatischen Kompensation  $\Delta g$  für die Geoidschwere. Nimmt man nun deren halben Betrag zum Ausdruck (14) hinzu, um die isostatische Wirkung auf die Durchschnittsschwere zu erhalten, so ergibt sich:

$$\bar{g} = g + \frac{g}{R} H - \frac{1}{2} (g''_P - g''_0) + \frac{1}{2} \Delta g.$$

Ledersteger findet dann für die zu  $g$  hinzuzufügende Gesamtkorrektur  $C$ , die er mit den verschiedenen Annahmen von  $H$  berechnet, eine nur geringfügige Abweichung von der Linearität und bildet daher durch Division mit  $\Sigma H = 10500$  einen mittleren Gradienten von  $0,041816 \cdot H_{\text{m}}$ . Es ergibt sich somit  $\bar{g} = g + 0,0418 H_{\text{m}}$  mgal.

Verglichen mit dem Helmertschen Ausdruck (10), Seite 251, zeigt

sich, daß der Reduktionskoeffizient um 0,0007 erhöht ist, was für 2500 m Meereshöhe 1,75 mgal beziehungsweise 4,4 mm ergibt.

Fügt man zu obigem Ausdruck noch die topographischen Korrekturen (etwa nach Niethammer) hinzu, so erhält man:

$$\bar{G} = g + 0,0418 H_m \text{ mgal} + \Sigma T_P - \Sigma T,$$

worin die Nichtlinearität des Schwereverlaufs, ein allmählicher Geländeabfall, die Erdkrümmung und die Isostasie berücksichtigt sind. Es ist dies bisher zweifellos die genaueste Methode. Infolge der Kompliziertheit der Bestimmung der Geländekorrekturen ist sie allerdings nicht weniger langwierig als die Niethammersche.

## 2. Die Schwerereduktion nach der Methode der direkten Geländekorrekturen

### a) Allgemeines

Bei der im Folgenden geschilderten Methode zur Ableitung der Schwere in irgendeinem Punkte der Lotlinie aus der beobachteten Oberflächenschwere beziehungsweise zur Bestimmung der exakten Durchschnittsschwere in der Lotlinie zwischen dem Oberflächenpunkt und dem zugehörigen Geoidpunkt werden die Kontinentalmassen ähnlich den im ersten Teil geschilderten Methoden durch konzentrische, vertikale Kegel­flächen in konzentrische Geländezonen zerlegt, die vom Geoid bis zur physischen Erdoberfläche reichen. Als Zonenhöhe wird jene mittlere Höhe angenommen, die sich bei horizontaler Einebnung der Zonenoberfläche ergeben würde. Man bestimmt nun die Anziehung der durch sämtliche Zonen ausgedrückten Geländemassen auf den Oberflächenpunkt  $P$ , zieht diesen Wert vom beobachteten Schwerewert  $g$  ab, verschiebt den Punkt nach  $P_u$  (beziehungsweise  $\bar{P}$  als dem Punkt der Lotlinie, der dem Durchschnittsschwerewert entspricht), wobei die entsprechende Freiluftreduktion anzubringen ist, und addiert hierauf den Wert der Anziehung der Zonen auf den gesuchten Punkt  $P_u$  zu  $g$ . Analog verfährt man mit den negativen isostatischen Kompensationsmassen, die deshalb berücksichtigt werden müssen, da ja vom Modell der unendlichen Platte vollkommen abgegangen und das Gelände direkt bis zu einer bestimmten Entfernung, zum Beispiel 300 oder 1000 km, erfaßt wird. Bei solchen Entfernungen ist schließlich auch die Erdkrümmung zu berücksichtigen, was zunächst durch die Anziehungsberechnung nach sphärischen Formeln erfolgt.

Es handelt sich nun darum, die Anziehung dieser Geländezonen auf die Punkte der Lotlinie beziehungsweise den Durchschnittswert dieser Anziehungen zu bestimmen.

Es sei (Abb. 10, Seite 284) der Bogen  $\widehat{P_0B}$  der Schnitt der an Stelle des Geoides angenommenen mittleren Erdkugel ( $R = 6371,2$  km) mit der Zeichenebene,  $P_iP_{i+1}$  der Schnitt der physischen Erdoberfläche der Zone  $i, i + 1$  mit ihr und  $P'_iP'_{i+1}$  die nach erfolgter Einebnung erhaltene Abdeckung dieser Zone, die nun die mittlere Höhe  $h_{i, i+1}$  hat. Bezeichnet man die vertikale Anziehung dieses Teils einer sphärischen

Scheibe auf Punkte der als gerade angenommenen Lotlinie  $PP_0$  mit  $A_{sph}$ , so ergibt sich die Reduktion der in  $P$  beobachteten Schwere auf einen beliebigen Punkt  $P_u$  der Lotlinie mit

$$g_u = g + \frac{2g}{R} (H - h_u) - \Sigma A_{sph, P} + \Sigma A_{sph, P_u} - \Sigma a_{sph, P} + \Sigma a_{sph, P_u}, \quad (15)$$

wobei  $\frac{2g}{R} (H - h_u)$  die Freiluftreduktion,  $\Sigma A_{sph, P}$  den von  $g$  abzuziehenden Einfluß der Vertikalanziehung der in der Summe aller Zonen erfaßten Geländemassen auf  $P$ ,  $\Sigma A_{sph, P_u}$  den nach Verschiebung des Punktes nach  $P_u$  zu  $g$  wieder hinzuzufügenden Einfluß derselben Massen auf  $P_u$  und die gleichartigen Ausdrücke mit  $a$  schließlich den entsprechenden Einfluß der negativen isostatischen Kompensationsmassen darstellen.

Die Schwere  $g_0$  auf dem Geoid erhält man wegen  $h_u = 0$  mit:

$$g_0 = g + \frac{2g}{R} H - \Sigma A_{sph, P} + \Sigma A_{sph, P_0} - \Sigma a_{sph, P} + \Sigma a_{sph, P_0}, \quad (16)$$

und den Durchschnittswert der Schwere zwischen  $P$  und  $P_0$  mit:

$$\begin{aligned} \bar{G} &= \frac{1}{H} \int_0^H g_u \cdot dh_u = \frac{1}{H} \int_0^H \left[ g + \frac{2g}{R} (H - h_u) - \Sigma A_{sph, P} + \right. \\ &\quad \left. + \Sigma A_{sph, P_u} - \Sigma a_{sph, P} + \Sigma a_{sph, P_u} \right] dh_u = \\ &= \frac{1}{H} \left( gH + \frac{2g}{R} H^2 - \frac{2g}{R} \cdot \frac{H^2}{2} - H \cdot \Sigma A_{sph, P} - H \cdot \Sigma a_{sph, P} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{H} \int_0^H \Sigma A_{sph, P_u} \cdot dh_u + \frac{1}{H} \int_0^H \Sigma a_{sph, P_u} \cdot dh_u = \\ &= g + \frac{g}{R} H - \Sigma A_{sph, P} - \Sigma a_{sph, P} + \\ &\quad + \Sigma \int_0^H \frac{A_{sph, P_u}}{H} \cdot dh_u + \Sigma \int_0^H \frac{a_{sph, P_u}}{H} \cdot dh_u. \end{aligned} \quad (17)$$

Wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, sind die Ausdrücke  $A_{sph}$  und  $a_{sph}$  recht schwerfällig und insbesondere ihre Durchschnittswerte  $\left( \frac{1}{H} \int A_{sph} dh_u \right)$  sehr kompliziert und schwer berechenbar. Durch eine

kleine Transformation (Drehung und Zerrung) des jeweils eine Zone bildenden Kugelringes kann man aber wiederum auf die relativ einfachen ebenen Formeln (11) und (12) zurückkommen und mit ihnen Resultate erhalten, die (siehe Tabelle 1) von den Ergebnissen der sphärischen Berechnungen nur um höchstens wenige Hundertstel milligal abweichen, was für unsere Berechnung eine zweifellos mehr als ausreichende Genauigkeit ergibt.

Die Änderung, die man am Kugelring vorzunehmen hat, ist folgende: Man dreht zunächst den Vertikalschnitt  $P'_i P'_{i+1} P''_{i+1} P''_i$  derart um den Mittelpunkt  $P''_{i,i+1}$  der gekrümmten Grundlinie  $P''_i P''_{i+1}$ , daß die Höhe  $P''_{i,i+1} P'_{i,i+1}$ , deren Länge  $h_{i,i+1}$  beibehalten wird, in die Richtung  $P''_{i,i+1} Q'_{i,i+1}$  fällt, also parallel wird zur Lotrichtung  $P_0 P^3$ . Den Drehpunkt  $P''_{i,i+1}$  macht man nunmehr zum Mittelpunkt einer zum Horizont in  $P_0$  parallelen und geraden Grundlinie von der Länge des Bogens  $\widehat{P''_i P''_{i+1}} = R(\psi_{i+1} - \psi_i)$ , die somit gleich ist dem Winkelabstand zweier Trennkegelflächen oder, einfacher ausgedrückt, einer Zonenbreite. Der Drehwinkel ist natürlich gleich dem Zenitwinkel des Bogens  $\widehat{P_0 P''_{i,i+1}}$ , also  $\frac{1}{2}(\psi_i + \psi_{i+1})$ . Man erhält damit den rechteckigen Schnitt  $Q'_i Q''_i Q'_{i+1} Q''_{i+1}$ , und aus dem Kugelring ist durch Drehung und Zerrung ein Zylinderring entstanden, dessen Anziehung auf die Punkte der Lotlinie nun analog den Formeln (11) und (12) bestimmt werden kann. Auch den Durchschnittswert kann man, ausgehend von diesen ebenen Formeln, sehr einfach bestimmen.

Man kann sich obige Transformation auch durch einfache *Parallelverschiebung* des von vornherein als Repräsentant der Geländemasse gedachten und auf dem als eben angenommenen Meeresniveau liegenden Zylinderringes mit dem Querschnitt  $p'_i p''_i p''_{i+1} p'_{i+1}$  aus seiner ebenen Lage in die Lage der gekrümmten Erdoberfläche entstanden denken (siehe Abb. 10).

Daß diese Änderung auch zulässig ist, das heißt, daß die Ergebnisse der sich auf sie stützenden Anziehungsberechnungen nur geringfügig von den mit Hilfe der sphärischen Formeln berechneten Anziehungsbeträgen abweichen können, erhellt schon aus folgender Überlegung: Die Änderung des Querschnitts (Drehung und Zerrung) wird bezüglich der in Betracht kommenden Punkte  $P_u$  stets nach den gleichen Richtungen vorgenommen, das heißt, es wird immer ein systematischer, dem Vorzeichen nach gleicher Fehler begangen. In den Formeln (15), (16) und (17), die alle Berechnungsarten beinhalten, handelt es sich aber stets um die *Differenzen* der Anziehungen, somit auch um die Differenzen der gleichgerichteten Fehler, die somit jedenfalls kleiner sind als die Einzelfehler. Daß diese Fehlerdifferenzen auch absolut klein sind, ergibt sich aus der

<sup>3</sup> Eine Drehung um den Schwerpunkt der Figur, das heißt um den Mittelpunkt der Strecke  $P'_{i,i+1} P''_{i,i+1}$ , würde die Lage des Drehpunktes von der jeweiligen Zonenhöhe  $h_{i,i+1}$  abhängig machen, was nur die Reduktionsformeln stark komplizieren, die Erstellung von Tabellen fast unmöglich machen und an Genauigkeit nichts einbringen würde, da mit Differenzen gerechnet wird.

nachstehenden Erwägung: Die Zonen in der Nähe der Station erfahren nur eine ganz geringfügige Änderung, somit sind die systematischen Fehler an sich sehr klein; bei den entfernter liegenden Zonen hingegen, wo die Änderung größere systematische Fehler verursacht, ist der Unterschied zwischen dem Wert der Anziehung auf den Oberflächenpunkt und dem auf einen anderen Punkt nur sehr klein, so daß die Differenz der Fehler ebenfalls sehr klein sein muß (siehe Tabelle 2).

Eine ähnliche Überlegung gilt übrigens auch bezüglich der Zulässigkeit der Ermittlung eines einzigen auf Grund der durchschnittlichen Zonenhöhe berechneten Anziehungswertes pro Zone anstatt einer Ermittlung der Anziehungswerte für die einzelnen Zonensektoren (da die Anziehung nicht direkt proportional der Höhe ist). Gewiß kann sich ein solcher Durchschnittsanziehungswert sogar wesentlich von der Summe der Teilwerte, die auf Grund der einzelnen Sektorhöhen errechnet wurden, unterscheiden, und dies wird auch um so eher der Fall sein, je weiter die einzelnen Sektorhöhen einer bestimmten Zone auseinanderklaffen. Da aber auch in diesem Fall der Fehler stets systematischer Natur ist und bezüglich des Oberflächenpunktes und jedes anderen Punktes der Lotlinie beziehungsweise auch bezüglich des Durchschnittswertes gleiches Vorzeichen hat, in unseren Formeln aber stets die Differenz der Anziehungen auf jeweils zwei solcher Punkte aufscheint, muß auch dieser Fehler sehr klein werden (siehe Tabelle 4).

Die Berücksichtigung der geänderten Wirkung der innerkrustalen Kompensationsmassen im Falle der Isostasie wird analog der Berechnung der Anziehung der Kontinentalmassen durchgeführt. Man geht wieder von der gleichen Annahme aus, wie sie Baeschlin [9] zugrunde gelegt hat, nimmt unterhalb jeder gedrehten Zone mit der Höhe  $h_{i,i+1}$  eine ebensolche mit der Höhe 100 km an und berechnet die Differenz ihrer Anziehungen auf den Oberflächenpunkt und einen anderen Punkt der Lotlinie beziehungsweise den Durchschnittswert, wobei als Dichte die negative kompensatorische Dichte des jeweiligen Zylinders

$$\Theta_{i,i+1} = - \frac{2,7}{100} h_{i,i+1} \text{ (km)}$$

verwendet wird. Man erhält damit Ausdrücke, deren Bau vollständig dem der Berechnungsformeln der Geländezonen entspricht.

Bezeichnet man schließlich die den sphärischen Reduktionen  $A_{sph}$  beziehungsweise  $a_{sph}$  der Formeln (15), (16), (17) analogen Ausdrücke mit  $A_{red}$  beziehungsweise  $a_{red}$ , so ergeben sich folgende Formeln für die Berechnung der Schwerereduktionen beziehungsweise des Durchschnittswertes:

$$g_u = g + \frac{2g}{R} (H - h_u) - \underbrace{\Sigma A_{red, P} + \Sigma A_{red, Pu} - \Sigma a_{red, P} + \Sigma a_{red, Pu}}_{\Delta g_u} \quad (18)$$

(Schwerereduktion auf irgendeinen Punkt der Lotlinie),

$$g_0 = g + \frac{2g}{R} H - \underbrace{\Sigma A_{red, P} + \Sigma A_{red, P_0} - \Sigma a_{red, P} + \Sigma a_{red, P_0}}_{\Delta g_0} \quad (19)$$

(Schwerereduktion auf den Geoidpunkt),

$$\bar{G} = g + \frac{g}{R} H - \underbrace{\Sigma A_{red, P} + \Sigma \bar{A}_{red} - \Sigma a_{red, P} + \Sigma \bar{a}_{red}}_{\Delta \bar{g}} \quad (20)$$

(Berechnung des Durchschnittsschwerewertes der Lotlinie),

wobei für die Gesamtkorrekturen  $\Delta g_{i,i+1}$  pro Zone jeweils eine Tabelle oder ein Graphikon erstellt werden kann, woraus die auf die entsprechende Zone  $i, i + 1$  entfallenden Werte zu (18) oder (19) oder (20) leicht abzulesen sind. Sieht man, wie dies später der Fall ist, 17 Zonen bis zu 300 km oder 19 Zonen bis zu 1000 km vor, so bedeutet dies, daß man mit den 17 beziehungsweise 19 Durchschnittshöhen der Zonen als erstem und mit der Stationshöhe als zweitem Argument sogleich die 17 beziehungsweise 19 Werte (18) oder (19) oder (20) pro Zone erhält und aus ihrer Summe den Gesamtwert  $\Delta g = \Sigma \Delta g_{i,i+1}$  der Schwerereduktion beziehungsweise der Korrektur für den Durchschnittswert<sup>4</sup>.

Im nächsten Abschnitt werden alle Formeln abgeleitet, die zur Berechnung der Anziehung der sphärischen und der transformierten Zonen auf die Punkte der Lotlinie gebraucht werden, sowie die Formeln zur Berücksichtigung der isostatischen Kompensationsmassen. Sodann folgen an Hand der Angaben über den Punkt Hochthor (2504,25 m) im österreichischen Tauernnivellement Vergleichsberechnungen zum Zwecke der Fehlerabschätzungen wegen des Überganges von der sphärischen Berechnungsart zur reduzierten und wegen der Verwendung von Durchschnittshöhen für die Zonen. Hierauf wird die Schwerereduktion des Punktes Hochthor exakt berechnet und schließlich werden die Resultate mit den nach den anderen Methoden erhaltenen Ergebnissen verglichen.

#### b) Die Formeln zur Berechnung der direkten Geländekorrektion

Es sei (siehe Abb. 10)  $P$  die Station, auf der die Schwere  $g$  beobachtet wurde.  $P$  habe die Höhe  $H$ , das heißt,  $H$  sei die Länge des – gerade angenommenen – Stücks der Lotlinie zwischen  $P$  und ihrem Durchstoßpunkt  $P_0$  mit der Niveauläche in mittlerer Meereshöhe, dem Geoid.  $P_u$  mit der variablen Höhe  $h_u$  sei ein laufender Punkt zwischen  $P$  und  $P_0$ .

Man denke sich nun die Umgebung der Station, wie bereits erwähnt, durch zentrisch um  $P$  in bestimmten Abständen angeordnete vertikale Kegelflächen  $i$  in Zonen  $i, i + 1$  zerlegt, die vom Geoid bis zur physischen Erdoberfläche reichen. Zwischen zwei solchen Kegelflächen  $i$

<sup>4</sup> Siehe Seite 282 nähere Erläuterung bezüglich  $h_u$  in (18).



und  $i + 1$  befindet sich dann eine Art Kugelring (wenn wir die Erde als Kugel vom Radius  $R = 6371,2$  km annehmen), der begrenzt ist durch die von den Spuren der beiden Trennflächen  $i$  und  $i + 1$  am Geoid gebildete Fläche als Grundfläche, von den Trennflächen als Seitenflächen und schließlich von der physischen Erdoberfläche selbst. Denkt man sich letztere zwischen den Trennflächen eingeebnet, so erhält man die Durchschnittshöhe  $h_{i,i+1}$  für den Ringkörper.

In der Praxis wird man diese Gesamtdurchschnittshöhe entweder nach der klassischen Methode der Einteilung des Ringes in Sektoren als Durchschnittswert der (Durchschnitts-) Höhen dieser Sektoren erhalten, oder man wird sie aus einer über den ganzen Ring entsprechend regelmäßig verteilten, für jeden Ring ein für allemal zu definierenden Anzahl von Einzelhöhen errechnen, wobei die Anzahl dieser Höhen nicht oder nur wenig höher sein müßte als die Anzahl der klassischen Sektoren (8 bis 16, je nach Entfernung von der Station).

Es sei zunächst eine Anordnung von insgesamt 19 solcher Kreis-kegelflächen mit den folgenden Radien  $x_i$  von 0,5 bis 1000 km angenommen, dann ergeben sich nachstehende 19 Zonen  $i, i + 1$ :

Zone		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Radius												
$x_i$ km		0	0,5	1,0	1,5	2	3	4	6	8	11	15
$x_{i+1}$ km		0,5	1,0	1,5	2,0	3	4	6	8	11	15	20

Zone		12	13	14	15	16	17	18	19
Radius									
$x_i$ km		20	30	45	70	112	188	300	500
$x_{i+1}$ km		30	45	70	112	188	300	500	1000

Ist nun  $P_i P_{i+1}$  (Abb. 10) der Schnitt der physischen Erdoberfläche mit einer Vertikalebene zwischen den zwei Kegelflächen  $i$  und  $i + 1$ , so findet man mit  $\widehat{P'_i P'_{i+1}}$  den Schnitt der horizontalen, durch Ein-ebnung entstanden gedachten Abdeckung und mit  $\widehat{P''_i P''_{i+1}}$  die Pro-jektion auf die Kugel als Näherung fürs Geoid.  $P''_i P'_i = P''_{i+1} P'_{i+1} = = h_{i,i+1}$  ist die Durchschnittshöhe des Ringes,  $R\psi_i$  sein Abstand von  $P_0$  auf der Kugel und  $R(\psi_{i+1} - \psi_i)$  seine (sphärisch gekrümmte) Grund-linie  $\widehat{P''_i P''_{i+1}}$ . Die Anziehung dieses Kugelringes auf irgendeinen Punkt der Lotlinie zwischen  $P$  und  $P_0$  ist dann nichts anderes als die Differenz der Anziehungen der sphärischen Scheiben von der Höhe  $h_{i,i+1}$  mit den Zentriwinkeln  $2\psi_{i+1}$  und  $2\psi_i$ . Um die Formel für diese Differenz abzu-leiten, kann man von der Differentialformel ausgehen, die Helmert [6] ableitet.

(Fortsetzung folgt.)