

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 58 (1960)

Heft: 9

Artikel: Die Methode der direkten Geländekorrekturen [Fortsetzung]

Autor: Frisch, Armand K.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-216111>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 06.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die Methode der direkten Geländekorrekzion

Von Armand K. Frisch, Wien

(Fortsetzung)

Es sei (Abb. 11) das schraffierte Flächenelement $dq = r \cdot dr \cdot d\psi$ das Differential der Schnittfläche der differentiellen sphärischen Scheibe; das Volumen des differentiellen Kugelringes sei =

$$2 r \pi \cdot \sin \psi \cdot r \cdot dr \cdot d\psi = 2 \pi r^2 \cdot \sin \psi \cdot dr \cdot d\psi,$$

seine differentielle Masse =

$$2 \pi \vartheta r^2 \cdot \sin \psi \cdot dr \cdot d\psi.$$

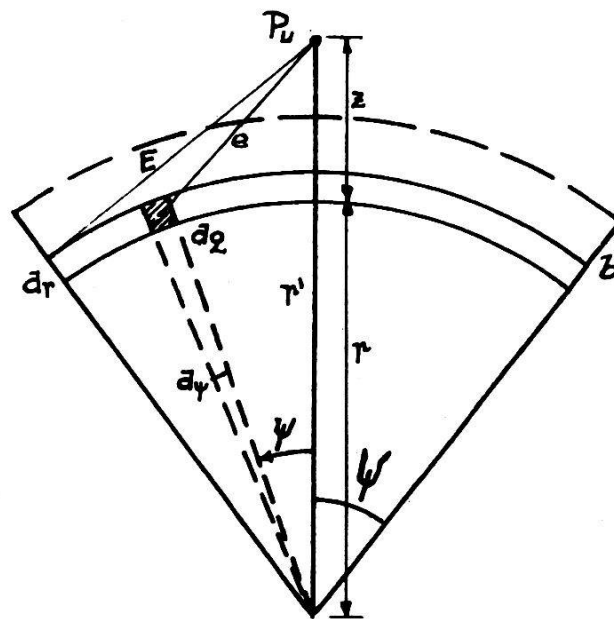


Abb. 11

Man bezeichne mit $e = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r \cdot r' \cdot \cos \psi}$ seinen Abstand vom Aufpunkt P_u und mit $\Psi = \psi_{\max}$ den halben Zentriwinkel der sphärischen Scheibe. Dann ergibt sich das Potential dieses differentiellen Kugelringes mit

$$\begin{aligned} v &= 2 \pi k^2 \vartheta \int_{\psi=0}^{\psi=\Psi} \frac{r^2 \cdot \sin \psi \cdot dr \cdot d\psi}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r \cdot r' \cdot \cos \psi}} = \\ &= 2 \pi k^2 \vartheta r^2 \cdot dr \cdot \frac{1}{r r'} \sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r \cdot r' \cdot \cos \psi} \Big|_0^{\Psi} = \\ &= 2 \pi k^2 \vartheta \frac{r}{r'} \cdot dr (\sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cdot \cos \Psi} - \sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r'}), \end{aligned}$$

beziehungsweise mit Einsetzen von

$$E = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2 r r' \cdot \cos \Psi},$$

$$v = 2 \pi k^2 \vartheta \frac{r}{r'} \cdot dr (E - z), \text{ wobei } z = r' - r.$$

Für die vertikale Anziehung des Differentialringes auf irgendeinen Punkt P_u auf der konvexen Seite der sphärischen Scheibe erhält man dann (wenn wieder ψ statt Ψ geschrieben wird):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial r'} &= -\frac{2 \pi k^2 \vartheta r \cdot dr}{r'^2} \left(r' \left[\frac{r' - r \cdot \cos \psi}{E} - 1 \right] - E + r' - r \right) = \\ &= -\frac{2 \pi k^2 \vartheta r \cdot dr}{r'^2} \left(\frac{r'^2 - r \cdot r' \cdot \cos \psi - E^2 - Er}{E} \right) = \\ &= -\frac{2 \pi k^2 \vartheta r \cdot dr}{r'^2} \left(\frac{-rr' \cdot \cos \psi - r^2 + 2 rr' \cdot \cos \psi - Er}{E} \right) = \\ &= 2 \pi k^2 \vartheta \frac{r^2}{r'^2} \cdot dr \left(1 - \frac{r' \cdot \cos \psi - r}{E} \right). \end{aligned}$$

Für einen Punkt P_u auf der konkaven Seite der Scheibe, das heißt für $z = r - r'$ oder $r' < r$, ergibt sich:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial r'} &= -\frac{2 \pi k^2 \vartheta r \cdot dr}{r'^2} \left(r' \left[\frac{r' - r \cdot \cos \psi}{E} + 1 \right] - E + r - r' \right) = \\ &= -\frac{2 \pi k^2 \vartheta r \cdot dr}{r'^2} \left(\frac{-r'r \cdot \cos \psi - r^2 + 2 rr' \cdot \cos \psi + Er}{E} \right) = \\ &= -2 \pi k^2 \vartheta \frac{r^2}{r'^2} \cdot dr \left(1 + \frac{r' \cdot \cos \psi - r}{E} \right). \end{aligned}$$

Somit ist der gemeinsame Ausdruck für die Anziehung:

$$-\frac{\partial v}{\partial r'} = \pm 2 \pi k^2 \vartheta \frac{r^2}{r'^2} \cdot dr \left(1 \mp \frac{r' \cdot \cos \psi - r}{E} \right).$$

Wenn man nun von der differentiellen Höhe dr der Scheibe zur endlichen Höhe b übergeht, so findet man:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial V}{\partial r'} &= \int_{r=r_0}^{r=r_0 \pm b} -\frac{\partial v}{\partial r'} = \pm \frac{2\pi k^2 \vartheta}{r'^2} \int_{r_0}^{r_0 \pm b} \left(1 \mp \frac{r' \cdot \cos \psi - r}{E} \right) r^2 \cdot dr = \\
&= \pm \frac{2\pi k^2 \vartheta}{r'^2} \int_{r_0}^{r_0 \pm b} \left(r^2 \mp \frac{r^2 r' \cos \psi - r^3}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cdot \cos \psi}} \right) dr;
\end{aligned}$$

nach Transformation des Ausdrucks unter der Wurzel:

$$r^2 + r'^2 - 2rr' \cdot \cos \psi = (r - r' \cos \psi)^2 + r'^2 \cdot \sin^2 \psi,$$

kann man dann das unbestimmte Integral mittels folgenden Ansatzes lösen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{r^2 r' \cdot \cos \psi - r^3}{\sqrt{(r - r' \cdot \cos \psi)^2 + r'^2 \sin^2 \psi}} dr &= (Ar^2 + Br + C) \sqrt{(r - r' \cos \psi)^2 + r'^2 \sin^2 \psi} + \\
&+ D \int \frac{dr}{\sqrt{(r - r' \cos \psi)^2 + r'^2 \sin^2 \psi}};
\end{aligned} \tag{21}$$

beiderseits differenziert:

$$\begin{aligned}
\frac{r^2 r' \cdot \cos \psi - r^3}{\sqrt{(r - r' \cdot \cos \psi)^2 + r'^2 \cdot \sin^2 \psi}} &= (2Ar + B) \sqrt{(r - r' \cdot \cos \psi)^2 + r'^2 \cdot \sin^2 \psi} + \\
&+ (Ar^2 + Br + C) \frac{r - r' \cdot \cos \psi}{\sqrt{(r - r' \cdot \cos \psi)^2 + r'^2 \cdot \sin^2 \psi}} + \\
&+ \frac{D}{\sqrt{(r - r' \cdot \cos \psi)^2 + r'^2 \cdot \sin^2 \psi}},
\end{aligned}$$

mit dem Nenner multipliziert und nach Potenzen von r geordnet:

$$\begin{aligned}
r^2 r' \cdot \cos \psi - r^3 &= 2Ar(r^2 + r'^2 - 2rr' \cdot \cos \psi) + B(r^2 + r'^2 - 2rr' \cdot \cos \psi) + \\
&+ (Ar^2 + Br + C)(r - r' \cdot \cos \psi) + D,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r^2 r' \cdot \cos \psi - r^3 &= 2Ar^3 + 2Arr'^2 - 4Ar^2 r' \cdot \cos \psi + Br^2 + Br'^2 - 2Brr' \cdot \cos \psi + \\
&+ Ar^3 - Ar^2 r' \cdot \cos \psi + Br^2 - Brr' \cdot \cos \psi + Cr - Cr' \cdot \cos \psi + D,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-r^3 + r^2 r' \cdot \cos \psi &= r^3 \cdot 3A + r^2 (2B - 5Ar' \cdot \cos \psi) + r (2Ar'^2 - \\
&- 3Br' \cdot \cos \psi + C) + (Br'^2 - Cr' \cdot \cos \psi + D).
\end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt:

$$3A = -1; \quad A = -\frac{1}{3};$$

$$2B - 5Ar' \cdot \cos\psi = r' \cdot \cos\psi = 2B + \frac{5}{3}r' \cdot \cos\psi; \quad B = -\frac{1}{3} \cdot r' \cdot \cos\psi$$

$$0 = 2Ar'^2 - 3Br' \cdot \cos\psi + C = -\frac{2}{3}r'^2 + r'^2 \cdot \cos^2\psi + C;$$

$$C = \frac{2 - 3\cos^2\psi}{3} \cdot r'^2$$

$$0 = Br'^2 - Cr' \cdot \cos\psi + D = -\frac{1}{3}r'^3 \cdot \cos\psi -$$

$$-\frac{2 - 3 \cdot \cos^2\psi}{3} \cdot r'^3 \cdot \cos\psi + D; \quad D = r'^3 \cdot \cos\psi \cdot \sin^2\psi;$$

ferner ist:

$$\begin{aligned} \int \frac{dr}{\sqrt{r - r' \cdot \cos\psi)^2 + r'^2 \cdot \sin^2\psi}} &= \left| \begin{array}{l} \text{Substitution:} \\ \frac{r - r' \cdot \cos\psi}{r' \cdot \sin\psi} = u \\ dr = r' \cdot \sin\psi \cdot du \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{r' \cdot \sin\psi \cdot du}{\sqrt{r'^2 \cdot \sin^2\psi \cdot u^2 + r'^2 \cdot \sin^2\psi}} = \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \\ &= \text{Arsh } u + C = \text{Arsh } \frac{r - r' \cdot \cos\psi}{r' \cdot \sin\psi} + C = \\ &= \ln(r - r' \cdot \cos\psi + \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cdot \cos\psi}) + C'. \end{aligned}$$

Für die sphärische Anziehung einer Scheibe von der Höhe b auf einen auf ihrer konvexen Seite (nur dieser Fall ist für uns von Interesse) gelegenen Punkt P_u ergibt sich dann sukzessive:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial r'} &= + \frac{2\pi k^2 \vartheta}{r'^2} \left[\frac{r^3}{3} - \left(-\frac{1}{3}r^2 - \frac{1}{3}rr' \cdot \cos\psi + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{3} \cdot r'^2 (2 - 3\cos^2\psi) \right) \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cdot \cos\psi} - \right. \\ &\quad \left. - r'^3 \cdot \cos\psi \cdot \sin^2\psi \cdot \ln(r - r' \cdot \cos\psi + \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cdot \cos\psi}) + C \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial r'} &= + \frac{2\pi k^2 \vartheta}{3r'^2} \left\{ (r_0 + b)^3 - r_0^3 + [(r_0 + b)^2 + (r_0 + b)r' \cdot \cos\psi - \right. \\ &\quad \left. - r'^2 (2 - 3\cos^2\psi)] \sqrt{(r_0 + b)^2 + r'^2 - 2(r_0 + b)r' \cdot \cos\psi} - \right. \\ &\quad \left. - [r_0^2 + r_0r' \cos\psi - r'^2 (2 - 3\cos^2\psi)] \sqrt{r_0^2 + r'^2 - 2r_0r' \cos\psi} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 3r'^3 \cdot \cos\psi \cdot \sin^2\psi \cdot \ln \frac{r_0 + b - r' \cdot \cos\psi + \sqrt{(r_0 + b)^2 + r'^2 - 2(r_0 + b)r' \cos\psi}}{r_0 - r' \cos\psi + \sqrt{r_0^2 + r'^2 - 2(r_0 + b)r' \cos\psi}} \Bigg\} \\
& - \frac{\partial V}{\partial r'} = + 2\pi k^2 \vartheta \frac{r'}{3} \left\{ \frac{(r_0 + b)^3 - r_0^3}{r'^3} + \left(\frac{(r_0 + b)^2}{r'^2} + \frac{r_0 + b}{r'} \cdot \cos\psi + \right. \right. \\
& + 3 \cos^2\psi - 2 \Bigg) \sqrt{1 + \frac{(r_0 + b)^2}{r'^2} - 2 \frac{r_0 + b}{r'} \cos\psi} - \\
& - \left(\frac{r_0^2}{r'^2} + \frac{r_0}{r'} \cdot \cos\psi + 3 \cos^2\psi - 2 \right) \sqrt{1 + \frac{r_0^2}{r'^2} - 2 \frac{r_0}{r'} \cdot \cos\psi} - \\
& \left. - 3 \cos\psi \cdot \sin^2\psi \cdot \ln \frac{\frac{r_0 + b}{r'} - \cos\psi + \sqrt{1 + \frac{(r_0 + b)^2}{r'^2} - 2 \frac{r_0 + b}{r'} \cdot \cos\psi}}{\frac{r_0}{r'} - \cos\psi + \sqrt{1 + \frac{r_0^2}{r'^2} - 2 \frac{r_0}{r'} \cdot \cos\psi}} \right\}.
\end{aligned}$$

Die Differenz der Anziehungen zweier Scheiben gleicher Höhe b mit den Zentriwinkeln $2\psi_1$ und $2\psi_2$ auf einen Punkt P_u ist dann:

$$\begin{aligned}
A_{sph} = 2\pi k^2 \vartheta \frac{r'}{3} & \left\{ - \left(\frac{(r_0 + b)^2}{r'^2} + \frac{r_0 + b}{r'} \cdot \cos\psi_1 + \right. \right. \\
& + 3 \cos^2\psi_1 - 2 \Bigg) \sqrt{1 + \frac{(r_0 + b)^2}{r'^2} - 2 \frac{r_0 + b}{r'} \cdot \cos\psi_1} + \\
& + \left(\frac{(r_0 + b)^2}{r'^2} + \frac{r_0 + b}{r'} \cdot \cos\psi_2 + 3 \cos^2\psi_2 - 2 \right) \sqrt{1 + \frac{(r_0 + b)^2}{r'^2} - 2 \frac{r_0 + b}{r'} \cdot \cos\psi_2} + \\
& + \left(\frac{r_0^2}{r'^2} + \frac{r_0}{r'} \cdot \cos\psi_1 + 3 \cos^2\psi_1 - 2 \right) \sqrt{1 + \frac{r_0^2}{r'^2} - 2 \frac{r_0}{r'} \cdot \cos\psi_1} - \\
& - \left(\frac{r_0^2}{r'^2} + \frac{r_0}{r'} \cdot \cos\psi_2 + 3 \cos^2\psi_2 - 2 \right) \sqrt{1 + \frac{r_0^2}{r'^2} - 2 \frac{r_0}{r'} \cdot \cos\psi_2} + \\
& + 3 \cos\psi_1 \cdot \sin^2\psi_1 \cdot \ln \frac{\frac{r_0 + b}{r'} - \cos\psi_1 + \sqrt{1 + \frac{(r_0 + b)^2}{r'^2} - 2 \frac{r_0 + b}{r'} \cdot \cos\psi_1}}{\frac{r_0}{r'} - \cos\psi_1 + \sqrt{1 + \frac{r_0^2}{r'^2} - 2 \frac{r_0}{r'} \cdot \cos\psi_1}} - \\
& \left. - 3 \cos\psi_2 \cdot \sin^2\psi_2 \cdot \ln \frac{\frac{r_0 + b}{r'} - \cos\psi_2 + \sqrt{1 + \frac{(r_0 + b)^2}{r'^2} - 2 \frac{r_0 + b}{r'} \cdot \cos\psi_2}}{\frac{r_0}{r'} - \cos\psi_2 + \sqrt{1 + \frac{r_0^2}{r'^2} - 2 \frac{r_0}{r'} \cdot \cos\psi_2}} \right\}.
\end{aligned}$$

Setzt man nun in diese Formel die gegenständlich interessierenden Annahmen für P_u ein, und zwar

α) für $r_0 = R = 6371,2$ km, $b = h_{i,i+1} = h$, $r' = R + H$, $\psi_1 = \psi_i$, $\psi_2 = \psi_{i+1}$, so erhält man als Ausdruck für die Anziehung der Geländezone $i, i+1$ auf P :

$$\begin{aligned}
 A_{sph,P} = 2 \pi k^2 \vartheta \frac{R+H}{3} & \left\{ - \left(\frac{(R+h)^2}{(R+H)^2} + \frac{R+h}{R+H} \cdot \cos \psi_i + \right. \right. \\
 & + 3 \cos^2 \psi_i - 2 \left. \right) \sqrt{1 + \frac{(R+h)^2}{(R+H)^2} - 2 \frac{R+h}{R+H} \cdot \cos \psi_i +} \\
 & + \left(\frac{(R+h)^2}{(R+H)^2} + \frac{R+h}{R+H} \cos \psi_{i+1} + \right. \\
 & + 3 \cos^2 \psi_{i+1} - 2 \left. \right) \sqrt{1 + \frac{(R+h)^2}{(R+H)^2} - 2 \frac{R+h}{R+H} \cdot \cos \psi_{i+1} +} \\
 & + \left(\frac{R^2}{(R+H)^2} + \frac{R}{R+H} \cdot \cos \psi_i + \right. \\
 & + 3 \cos^2 \psi_i - 2 \left. \right) \sqrt{1 + \frac{R^2}{(R+H)^2} - 2 \frac{R}{R+H} \cdot \cos \psi_i -} \\
 & - \left(\frac{R^2}{(R+H)^2} + \frac{R}{R+H} \cdot \cos \psi_{i+1} + \right. \\
 & + 3 \cos^2 \psi_{i+1} - 2 \left. \right) \sqrt{1 + \frac{R^2}{(R+H)^2} - 2 \frac{R}{R+H} \cdot \cos \psi_{i+1} +} \\
 & + 3 \cos \psi_i \sin^2 \psi_i \cdot \\
 & \cdot \ln \frac{\frac{R+h}{R+H} - \cos \psi_i + \sqrt{1 + \frac{(R+h)^2}{(R+H)^2} - 2 \frac{R+h}{R+H} \cdot \cos \psi_i}}{\frac{R}{R+H} - \cos \psi_i + \sqrt{1 + \frac{R^2}{(R+H)^2} - 2 \frac{R}{R+H} \cdot \cos \psi_i}} \\
 & - 3 \cos \psi_{i+1} \cdot \sin^2 \psi_{i+1} \cdot \\
 & \cdot \ln \frac{\frac{R+h}{R+H} - \cos \psi_{i+1} + \sqrt{1 + \frac{(R+h)^2}{(R+H)^2} - 2 \frac{R+h}{R+H} \cdot \cos \psi_{i+1}}}{\frac{R}{R+H} - \cos \psi_{i+1} + \sqrt{1 + \frac{R^2}{(R+H)^2} - 2 \frac{R}{R+H} \cdot \cos \psi_{i+1}}}
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

β) Setzt man für $r_0 = R$, $b = h_{i,i+1} = h$, $r' = R$, $\psi_1 = \psi_i$ und $\psi_2 = \psi_{i+1}$, so läßt sich der dritte und vierte Ausdruck des Polynoms für A_{sph} mittels

$$\sqrt{2 - 2 \cos \psi} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \sin \frac{\psi}{2} = 2 \sin \frac{\psi}{2}$$

vereinfachen und man erhält für die Anziehung der Geländezone $i, i+1$ auf den Punkt P_0 am Geoid:

$$\begin{aligned} A_{sph, P_0} = & -2 \pi k^2 \vartheta \frac{R}{3} \left\{ \left(\frac{(R+h)^2}{R^2} + \frac{R+h}{R} \cos \psi_i + \right. \right. \\ & \left. \left. + 3 \cos^2 \psi_i - 2 \right) \sqrt{1 + \frac{(R+h)^2}{R^2} - 2 \frac{R+h}{R} \cos \psi_i} - \right. \\ & \left. - \left(\frac{(R+h)^2}{R^2} + \frac{R+h}{R} \cos \psi_{i+1} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 3 \cos^2 \psi_{i+1} - 2 \right) \sqrt{1 + \frac{(R+h)^2}{R^2} - 2 \frac{R+h}{R} \cos \psi_{i+1}} + \right. \\ & \left. + 2 \left[\sin \frac{\psi_i}{2} (1 - \cos \psi_i - 3 \cos^2 \psi_i) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sin \frac{\psi_{i+1}}{2} (1 - \cos \psi_{i+1} - 3 \cos^2 \psi_{i+1}) \right] - 3 \cos \psi_i \sin^2 \psi_i \cdot \right. \\ & \left. \cdot \ln \frac{\frac{R+h}{R} - \cos \psi_i + \sqrt{1 + \frac{(R+h)^2}{R^2} - 2 \frac{R+h}{R} \cos \psi_i}}{2 \sin \frac{\psi_i}{2} \left(1 + \sin \frac{\psi_i}{2} \right)} + \right. \\ & \left. + 3 \cos \psi_{i+1} \sin^2 \psi_{i+1} \cdot \right. \\ & \left. \cdot \ln \frac{\frac{R+h}{R} - \cos \psi_{i+1} + \sqrt{1 + \frac{(R+h)^2}{R^2} - 2 \frac{R+h}{R} \cos \psi_{i+1}}}{2 \sin \frac{\psi_{i+1}}{2} \left(1 + \sin \frac{\psi_{i+1}}{2} \right)} \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

Zwecks Berücksichtigung der der Einfachheit halber jeweils unter einem Kugelring bis zu 100 km Tiefe unter dem Geoid gedachten isostatischen Ausgleichsmassen werden folgende Annahmen für die sphärische Berechnung getroffen:

γ) $r_0 = (R - 100)$ km, $b = 100$ km, $r' = R + H$, $\psi_1 = \psi_i$, $\psi_2 = \psi_{i+1}$
und $\vartheta = \vartheta_{i,i+1}$; das ergibt

$$\begin{aligned}
 a_{sph,P} = 2 \pi k^2 \vartheta_{i,i+1} \frac{R+h}{3} & \left\{ - \left(\frac{R^2}{(R+H)^2} + \frac{R}{R+H} \cos \psi_i + \right. \right. \\
 & + 3 \cos^2 \psi_i - 2 \left. \right) \sqrt{1 + \frac{R^2}{(R+H)^2} - 2 \frac{R}{R+H} \cos \psi_i} + \\
 & + \left(\frac{R^2}{(R+H)^2} + \frac{R}{R+H} \cos \psi_{i+1} + \right. \\
 & + 3 \cos^2 \psi_{i+1} - 2 \left. \right) \sqrt{1 + \frac{R^2}{(R+H)^2} - 2 \frac{R}{R+H} \cos \psi_{i+1}} + \\
 & + \left(\frac{(R-100)^2}{(R+H)^2} + \frac{R-100}{R+H} \cos \psi_i + \right. \\
 & + 3 \cos^2 \psi_i - 2 \left. \right) \sqrt{1 + \frac{(R-100)^2}{(R+H)^2} - 2 \frac{R-100}{R+H} \cos \psi_i} - \\
 & - \left(\frac{(R-100)^2}{(R+H)^2} + \frac{R-100}{R+H} \cos \psi_{i+1} + \right. \\
 & + 3 \cos^2 \psi_{i+1} - 2 \left. \right) \sqrt{1 + \frac{(R-100)^2}{(R+H)^2} - 2 \frac{R-100}{R+H} \cos \psi_{i+1}} + \\
 & + 3 \cos \psi_i \sin^2 \psi_i \cdot \\
 & \cdot \ln \frac{\frac{R}{R+H} - \cos \psi_i + \sqrt{1 + \frac{R^2}{(R+H)^2} - 2 \frac{R}{R+H} \cos \psi_i}}{\frac{R-100}{R+H} - \cos \psi_i + \sqrt{1 + \frac{(R-100)^2}{(R+H)^2} - 2 \frac{R-100}{R+H} \cos \psi_i}} - \\
 & - 3 \cos \psi_{i+1} \sin^2 \psi_{i+1} \cdot \\
 & \cdot \ln \left. \frac{\frac{R}{R+H} - \cos \psi_{i+1} + \sqrt{1 + \frac{R^2}{(R+H)^2} - 2 \frac{R}{R+H} \cos \psi_{i+1}}}{\frac{R-100}{R+H} - \cos \psi_{i+1} + \sqrt{1 + \frac{(R-100)^2}{(R+H)^2} - 2 \frac{R-100}{R+H} \cos \psi_{i+1}}} \right\}
 \end{aligned}$$

(24)

für die Anziehung der negativen Kompensationsmassen auf den Punkt P auf der konvexen Seite der Scheibe, und mit

δ) $r_0 = (R - 100)$ km, $b = 100$ km, $r' = R$, $\psi_1 = \psi_i$, $\psi_2 = \psi_{i+1}$
und $\vartheta = \vartheta_{i,i+1}$ erhält man

$$\begin{aligned}
a_{sph, P_0} = & 2 \pi k^2 \vartheta_{i,i+1} \frac{R}{3} \left\{ 2 \left[\sin \frac{\psi_i}{2} (1 - \cos \psi_i - 3 \cos^2 \psi_i) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \sin \frac{\psi_{i+1}}{2} (1 - \cos \psi_{i+1} - 3 \cos^2 \psi_{i+1}) \right] + \right. \\
& + \left(\frac{(R-100)^2}{R^2} + \frac{R-100}{R} \cos \psi_i + \right. \\
& \left. + 3 \cos^2 \psi_i - 2 \right) \sqrt{1 + \frac{(R-100)^2}{R^2} - 2 \frac{R-100}{R} \cos \psi_i} - \\
& - \left(\frac{(R-100)^2}{R^2} + \frac{R-100}{R} \cos \psi_{i+1} + \right. \\
& \left. + 3 \cos^2 \psi_{i+1} - 2 \right) \sqrt{1 + \frac{(R-100)^2}{R^2} - 2 \frac{R-100}{R} \cos \psi_{i+1}} + \\
& + 3 \cos \psi_i \sin^2 \psi_i \cdot \\
& \cdot \ln \frac{2 \sin \frac{\psi_i}{2} \left(1 + \sin \frac{\psi_i}{2} \right)}{\frac{R-100}{R} - \cos \psi_i + \sqrt{1 + \frac{(R-100)^2}{R^2} - 2 \frac{R-100}{R} \cos \psi_i}} - \\
& - 3 \cos \psi_{i+1} \sin^2 \psi_{i+1} \cdot \\
& \left. \cdot \ln \frac{2 \sin \frac{\psi_{i+1}}{2} \left(1 + \sin \frac{\psi_{i+1}}{2} \right)}{\frac{R-100}{R} - \cos \psi_{i+1} + \sqrt{1 + \frac{(R-100)^2}{R^2} - 2 \frac{R-100}{R} \cos \psi_{i+1}}} \right\} \quad (25)
\end{aligned}$$

für die Anziehung der isostatischen Kompensationsmassen auf den Geoidpunkt P_0 .

Damit hat man die Formeln für die sphärische Berechnung der Anziehung eines Kugelringes (beziehungsweise bei geeigneter Teilung durch die Anzahl der Sektoren eines Sektors des Kugelringes) auf P und P_0 gewonnen. Mit Hilfe dieser sphärischen und der noch abzuleitenden reduzierten Formeln wird im nächsten Abschnitt gezeigt werden, daß die Anziehungsdifferenzen des mittels Drehung um $P''_{i,i+1}$ in die Horizontale und Reduktion auf einen rechteckigen Querschnitt mit den Seiten $h_{i,i+1}$ und $R(\psi_{i+1} - \psi_i)$ gewonnenen Ringkörpers von den entsprechenden Anziehungsdifferenzen auf Grund der sphärischen Berechnung derart geringfügig abweichen (siehe Tabelle 2), daß man auf die komplizierte

sphärische Berechnung verzichten und die wesentlich einfachere reduzierte anwenden kann.

Die Drehung des Querschnittes erfolgt, wie erwähnt, im Punkte $P''_{i,i+1}$, der mit dem Geoidpunkt P_0 den Zentriwinkel beziehungsweise Drehwinkel $\frac{\psi_i + \psi_{i+1}}{2}$ bildet. Laut Definition bleibt die Höhe $h_{i,i+1}$ ungeändert, während die Grundlinie des rechteckigen Querschnitts $Q'_i Q''_i Q''_{i+1} Q'_{i+1}$ gleich gesetzt wird der Zonenbreite, das heißt gleich der Länge des Kreisbogens $\widehat{P''_i P''_{i+1}}$ oder $= R(\psi_{i+1} - \psi_i)$.

Um nun analog den Formeln (11) und (12), die die Anziehung eines Zylinderringes betreffen, die Anziehung dieses Ringkörpers auf irgendeinen Punkt P_u der Lotlinie zu erhalten, muß zuerst seine Lage beziehungsweise die Lage seines Querschnitts in dem rechtwinkligen, ebenen Koordinatensystem bestimmt werden, das mit dem Ursprung P_0 von der y -Richtung $\vec{P_0 C}$ einerseits und der nach rechts positiven x -Richtung andererseits (siehe Abb. 10) gebildet wird. Man findet den Abstand $x_{i,2}$ der Punkte Q'_i und Q''_i von der y -Achse folgendermaßen:

Die Abszisse des Mittelpunktes $P''_{i,i+1}$ ist

$$x_{i,i+1} = R \cdot \sin \frac{1}{2} (\psi_i + \psi_{i+1}).$$

Die Bogenlänge zwischen P''_i und P''_{i+1} , das heißt der Winkelabstand der zwei Trennflächen i und $i + 1$, ist gleich $R(\psi_{i+1} - \psi_i)$. Folglich ist

$$x_{i,2} = R \sin \frac{\psi_i + \psi_{i+1}}{2} - R \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{2}$$

und

$$x_{i+1,1} = R \sin \frac{\psi_i + \psi_{i+1}}{2} + R \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{2},$$

wenn man mit $x_{i+1,1}$ noch die Abszisse der Punkte Q'_{i+1} und Q''_{i+1} bezeichnet. Die den Indizes der Abszissen nachgestellten Ziffern 1 und 2 dienen der Unterscheidung zwischen der Änderung der Abszisse x_i des Punktes P''_i auf der Kugel in 1.) $x_{i,1}$ auf Grund der Drehung der Zone $i - 1$, i , und in 2.) $x_{i,2}$ auf Grund der Drehung der folgenden Zone $i, i+1$ (siehe Abb. 10).

Die zugehörigen Ordinaten sind $y_{i,i+1} = R \left(1 - \cos \frac{\psi_i + \psi_{i+1}}{2} \right)$ für die Punkte Q'' , beziehungsweise $y_{i,i+1} - h_{i,i+1}$ für die Punkte Q' .

In der Tabelle 1 findet man die Berechnung der für eine gegebene Zoneneinteilung konstant bleibenden Werte $x_{i,2}$, $x_{i+1,1}$ und $y_{i,i+1}$ zusammengefaßt, wobei die Zoneneinteilung der auf Seite 285 angegebenen entspricht.

Damit hat man nun alle Elemente, um die Formeln für die Berechnung der Anziehung des zylindrischen Ringes auf P_u , P_0 , P und \bar{P} zu berechnen. Zum Zwecke des späteren Vergleiches mit den anderen Methoden

Tabelle 1: Berechnung der Querschnittskordinaten

$R \cdot \psi_i$ km	$\frac{R \cdot \psi_i + \psi_{i+1}}{2}$ km	$\frac{\psi_i + \psi_{i+1}}{2}$			$R \cdot \sin \frac{1}{2}(\psi_i + \psi_{i+1})$ km	$R \cdot \frac{1}{2}(\psi_{i+1} - \psi_i)$ km	$\frac{\cos \frac{1}{2}(\psi_i + \psi_{i+1})}{1 - \cos \frac{1}{2}(\psi_i + \psi_{i+1})}$	$y_{i,i+1}$ km	$x_{i,2}$
		°	'	"					$x_{i+1,1}$ km
0									
	0,25	0	0	08,0936 ₄	0,250000	0,25	1,0000000000	0,0000 ₀	0
0,5							0,0000000000		0,50000
	0,75	0	0	24,2809 ₂	0,750000	0,25	0,999999986	0,0000 ₉	0,50000
1,0							0,000000014		1,00000
	1,25	0	0	40,4682 ₀	1,250000	0,25	0,999999998	0,0001 ₃	1,00000
1,5							0,000000002		1,50000
	1,75	0	0	56,6554 ₈	1,750000	0,25	0,999999995	0,0003 ₂	1,50000
2,0							0,000000005		2,00000
	2,50	0	1	20,9364 ₀	2,500000	0,50	0,999999993	0,0004 ₅	2,00000
3							0,000000007		3,00000
	3,50	0	1	53,3109 ₇	3,500000	0,50	0,99999984	0,0010 ₂	3,00000
4							0,00000016		4,00000
	5,00	0	2	41,8728 ₁	5,000000	1,00	0,99999970	0,0019 ₁	4,00000
6							0,00000030		6,00000
	7,00	0	3	46,6219 ₃	6,999999	1,00	0,99999940	0,0038 ₂	6,00000
8							0,00000060		8,00000
	9,50	0	5	07,5583 ₃	9,499996	1,50	0,99999889	0,0070 ₇	8,00000
11							0,00000111		11,00000
	13,00	0	7	00,8693 ₀	12,999991	2,00	0,99999793	0,0131 ₉	10,99999
15							0,00000207		14,99999
	17,50	0	9	26,5548 ₃	17,499978	2,50	0,99999622	0,0240 ₈	14,99998
20							0,00000378		19,99998
	25,00	0	13	29,3640 ₄	24,999935	5,00	0,99999230	0,0490 ₆	19,99994
30							0,00000770		29,99994
	37,50	0	20	14,0460 ₅	37,499783	7,50	0,99998269	0,1102 ₉	29,99978
45							0,00001731		44,99978
	57,50	0	31	01,5372 ₈	57,499220	12,50	0,99995926	0,2595 ₆	44,99922
70							0,00004074		69,99922
	91,00	0	49	06,0850 ₉	90,996906	21,00	0,99989800	0,6498 ₆	69,99691
112							0,00010200		111,99691
	150,00	1	20	56,1842 ₂	149,986145	38,00	0,99972286	1,7657 ₁	111,98615
188							0,00027714		187,98615
	244,00	2	11	39,3930 ₀	243,94036	56,00	0,99926676	4,6716 ₂	187,94036
300							0,00073324		299,94036
	400,00	3	35	49,8245 ₉	399,73728	100,00	0,99802982	12,5524 ₁	299,73728
500							0,00197018		499,73728
	750,00	6	44	40,9211 ₆	748,52328	250,00	0,9930747	44,1110	498,52328
1000							0,0069253		998,52328

wird aber nicht nur die Formel für die «reduzierte» Lage des Ringes aufgestellt, sondern zunächst für die ebene Lage, von der ausgehend Niethammer und Mader ihre Berechnungen durchgeführt haben. Entsprechend dem Seite 248 und 249 angegebenen Weg erhält man für die Anziehung auf P_u bei ebener Lage (Abb. 12):

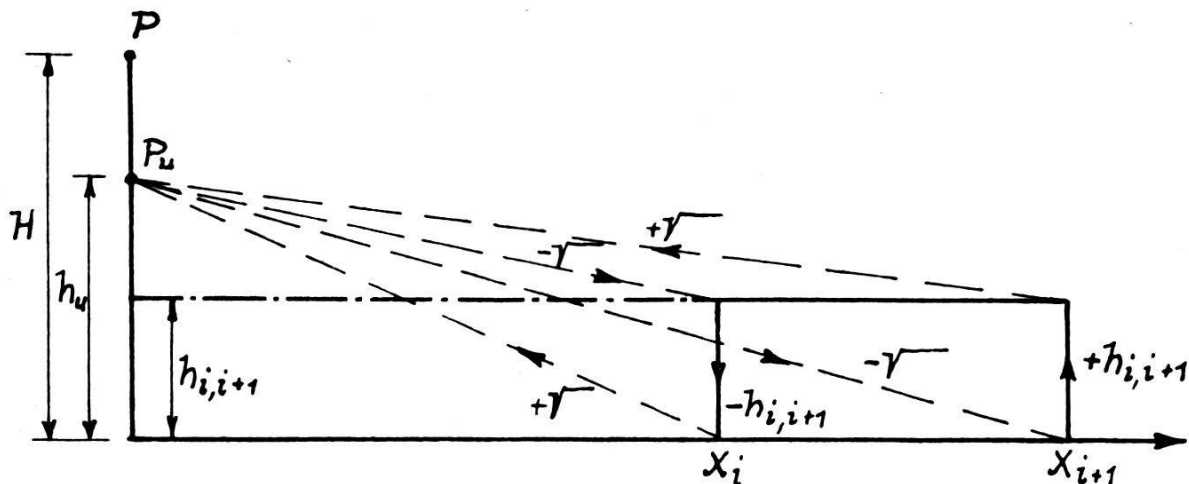


Abb. 12

$$A_{e,P_u} = 2 \pi k^2 \vartheta \left(h_{i,i+1} + \sqrt{x_{i+1}^2 + (h_u - h_{i,i+1})^2} - \sqrt{x_{i+1}^2 + h_u^2} - \right. \\ \left. - h_{i,i+1} - \sqrt{x_i^2 + (h_u - h_{i,i+1})^2} + \sqrt{x_i^2 + h_u^2} \right),$$

für den Oberflächenpunkt P mit $h_u = H$

$$A_{e,P} = 2 \pi k^2 \vartheta \left(\sqrt{x_{i+1}^2 + (H - h_{i,i+1})^2} - \sqrt{x_{i+1}^2 + H^2} - \right. \\ \left. - \sqrt{x_i^2 + (H - h_{i,i+1})^2} + \sqrt{x_i^2 + H^2} \right), \quad (26)$$

für den Geoidpunkt P_0 mit $h_u = 0$

$$A_{e,P_0} = 2 \pi k^2 \vartheta \left(\sqrt{x_{i+1}^2 + h_{i,i+1}^2} - x_{i+1} - \sqrt{x_i^2 + h_{i,i+1}^2} + x_i \right) \quad (27)$$

und für den Durchschnittswert

$$\bar{A}_e = \frac{1}{H} \int_0^H A_{P_u} dh_u = \\ = \frac{2 \pi k^2 \vartheta}{H} \int_0^H \left(\sqrt{x_{i+1}^2 + (h_u - h_{i,i+1})^2} - \sqrt{x_{i+1}^2 + h_u^2} - \right. \\ \left. - \sqrt{x_i^2 + (h_u - h_{i,i+1})^2} + \sqrt{x_i^2 + h_u^2} \right) dh_u.$$

Die Auflösung des unbestimmten Integrals läßt sich mittels Substitution von Hyperbelfunktionen leicht durchführen: Im ersten Wurzelausdruck werden

$$h_u - h_{i,i+1} = x_{i+1} \operatorname{sh} u,$$

$$\operatorname{ch} u = \sqrt{1 + \frac{(h_u - h_{i,i+1})^2}{x_{i+1}^2}} = \frac{\sqrt{x_{i+1}^2 + (h_u - h_{i,i+1})^2}}{x_{i+1}}$$

und $dh_u = x_{i+1} \operatorname{ch} u du$ gesetzt, und man erhält

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x_{i+1}^2 + (h_u - h_{i,i+1})^2} dh_u &= \int \sqrt{x_{i+1}^2 + x_{i+1}^2 \operatorname{sh}^2 u} x_{i+1} \operatorname{ch} u du = \\ &= \int x_{i+1} \operatorname{ch}^2 u du = \frac{x_{i+1}^2}{2} (u + \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u) + C = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ x_{i+1}^2 \operatorname{Arsh} \frac{h_u - h_{i,i+1}}{x_{i+1}} + \right. \\ &\quad \left. + (h_u - h_{i,i+1}) \sqrt{x_{i+1}^2 + (h_u - h_{i,i+1})^2} \right\} + C = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ x_{i+1}^2 \ln (h_u - h_{i,i+1} + \sqrt{x_{i+1}^2 + (h_u - h_{i,i+1})^2}) + \right. \\ &\quad \left. + (h_u - h_{i,i+1}) \sqrt{x_{i+1}^2 + (h_u - h_{i,i+1})^2} \right\} + C'. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich bei entsprechender Modifizierung der übrigen drei Wurzelausdrücke unter dem Integralzeichen:

$$\begin{aligned} \bar{A}_e &= \frac{\pi k^2 \vartheta}{H} \left[\left\{ x_{i+1}^2 \ln (h_u - h_{i,i+1} + \sqrt{x_{i+1}^2 + (h_u - h_{i,i+1})^2}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (h_u - h_{i,i+1}) \sqrt{x_{i+1}^2 + (h_u - h_{i,i+1})^2} \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \left\{ x_{i+1}^2 \ln (h_u + \sqrt{x_{i+1}^2 + h_{2u}^2}) + h_u \sqrt{x_{i+1}^2 + h_{2u}^2} \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \left\{ x_i^2 \ln (h_u - h_{i,i+1} + \sqrt{x_i^2 + (h_u - h_{i,i+1})^2}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (h_u - h_{i,i+1}) \sqrt{x_i^2 + (h_u - h_{i,i+1})^2} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ x_i^2 \ln (h_u + \sqrt{x_i^2 + h_{2u}^2}) + h_u \sqrt{x_i^2 + h_{2u}^2} \right\} \right] \Big|_0^H = \\ &= \frac{\pi k^2 \vartheta}{H} \left[x_{i+1}^2 \ln \frac{h_u - h_{i,i+1} + \sqrt{x_{i+1}^2 + (h_u - h_{i,i+1})^2}}{h_u + \sqrt{x_{i+1}^2 + h_{2u}^2}} + \right. \\ &\quad \left. + (h_u - h_{i,i+1}) \sqrt{x_{i+1}^2 + (h_u - h_{i,i+1})^2} - h_u \sqrt{x_{i+1}^2 + h_{2u}^2} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - x_i^2 \ln \frac{h_u - h_{i,i+1} + \sqrt{x_i^2 + (h_u - h_{i,i+1})^2}}{h_u + \sqrt{x_i^2 + h_u^2}} - \\
& - (h_u - h_{i,i+1}) \sqrt{x_i^2 + (h_u - h_{i,i+1})^2} + h_u \sqrt{x_i^2 + h_u^2} \Big|_0^H = \\
= & \frac{\pi k^2 \vartheta}{H} \left[x_{i+1}^2 \left\{ \ln \frac{H - h_{i,i+1} + \sqrt{x_{i+1}^2 + (H - h_{i,i+1})^2}}{H + \sqrt{x_{i+1}^2 + H^2}} - \right. \right. \\
& \left. - \ln \frac{-h_{i,i+1} + \sqrt{x_{i+1}^2 + h_{i,i+1}^2}}{x_{i+1}} \right\} - \\
& - x_i^2 \left\{ \ln \frac{H - h_{i,i+1} + \sqrt{x_i^2 + (H - h_{i,i+1})^2}}{H + \sqrt{x_i^2 + H^2}} - \right. \\
& \left. - \ln \frac{-h_{i,i+1} + \sqrt{x_i^2 + h_{i,i+1}^2}}{x_i} \right\} + \\
& + (H - h_{i,i+1}) (\sqrt{x_{i+1}^2 + (H - h_{i,i+1})^2} - \sqrt{x_i^2 + (H - h_{i,i+1})^2}) - \\
& - H (\sqrt{x_{i+1}^2 + H^2} - \sqrt{x_i^2 + H^2}) + \\
& \left. + h_{i,i+1} (\sqrt{x_{i+1}^2 + h_{i,i+1}^2} - \sqrt{x_i^2 + h_{i,i+1}^2}) \right].
\end{aligned}$$

Zusammengefaßt und geordnet nach x erhält man, wenn man noch den konstanten Wert $\pi k^2 \vartheta$ nach links hinüberschafft, die Differenz

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{A}_e}{\pi k^2 \vartheta} = & \frac{1}{H} \left\{ x_{i+1}^2 \ln \frac{x_{i+1} (H - h_{i,i+1} + \sqrt{x_{i+1}^2 + (H - h_{i,i+1})^2})}{(\sqrt{x_{i+1}^2 + H^2} + H) (\sqrt{x_{i+1}^2 + h_{i,i+1}^2} - h_{i,i+1})} + \right. \\
& + H (\sqrt{x_{i+1}^2 + (H - h_{i,i+1})^2} - \sqrt{x_{i+1}^2 + H^2}) - \\
& \left. - h_{i,i+1} (\sqrt{x_{i+1}^2 + (H - h_{i,i+1})^2} - \sqrt{x_{i+1}^2 + h_{i,i+1}^2}) \right\} - \\
= & \frac{1}{H} \left\{ x_i^2 \ln \frac{x_i (H - h_{i,i+1} + \sqrt{x_i^2 + (H - h_{i,i+1})^2})}{(\sqrt{x_i^2 + H^2} + H) (\sqrt{x_i^2 + h_{i,i+1}^2} - h_{i,i+1})} + \right. \\
& + H (\sqrt{x_i^2 + (H - h_{i,i+1})^2} - \sqrt{x_i^2 + H^2}) - \\
& \left. - h_{i,i+1} (\sqrt{x_i^2 + (H - h_{i,i+1})^2} - \sqrt{x_i^2 + h_{i,i+1}^2}) \right\}. \quad (28)
\end{aligned}$$

\bar{A}_e ist somit der Durchschnittswert der Anziehungen der Zone $i, i+1$ auf die Punkte der Lotlinie zwischen P und P_0 . Da die Differenz $(\bar{A} - A_P)$ sehr häufig gebraucht wird, kann man die beiden Ausdrücke (26) und (28) miteinander verbinden und erhält

$$\frac{\bar{A}_e - A_{e,P}}{\pi k^2 \vartheta} = \quad (29)$$

$$= \frac{1}{H} \left\{ x_{i+1}^2 \cdot \ln \frac{x_{i+1} (H - h_{i,i+1} + \sqrt{x_{i+1}^2 + (H - h_{i,i+1})^2})}{(\sqrt{x_{i+1}^2 + H^2} + H) (\sqrt{x_{i+1}^2 + h_{i,i+1}^2} - h_{i,i+1})} - \right. \\ \left. - H (\sqrt{x_{i+1}^2 + (H - h_{i,i+1})^2} - \sqrt{x_{i+1}^2 + H^2}) - \right. \\ \left. - h_{i,i+1} (\sqrt{x_{i+1}^2 + (H - h_{i,i+1})^2} - \sqrt{x_{i+1}^2 + h_{i,i+1}^2}) \right\} - \\ - \frac{1}{H} \left\{ x_i^2 \ln \frac{x_i (H - h_{i,i+1} + \sqrt{x_i^2 + (H - h_{i,i+1})^2})}{(\sqrt{x_i^2 + H^2} + H) (\sqrt{x_i^2 + h_{i,i+1}^2} - h_{i,i+1})} - \right. \\ \left. - H (\sqrt{x_i^2 + (H - h_{i,i+1})^2} - \sqrt{x_i^2 + H^2}) - \right. \\ \left. - h_{i,i+1} (\sqrt{x_i^2 + (H - h_{i,i+1})^2} - \sqrt{x_i^2 + h_{i,i+1}^2}) \right\}.$$

Das gleiche gilt natürlich auch für die Differenzen ($A_{P_u} - A_P$) und ($A_{P_0} - A_P$), die in analoge Ausdrücke zusammengefaßt werden können.

Die entsprechenden Formeln für den reduzierten Ring erhält man sofort aus den vorhergehenden, wenn man die infolge der Parallelverschiebung entstandenen Koordinatenänderungen berücksichtigt, das heißt mit den neuen Koordinaten $x_{i,2}$, $x_{i+1,1}$ und $y_{i,i+1}$ rechnet.

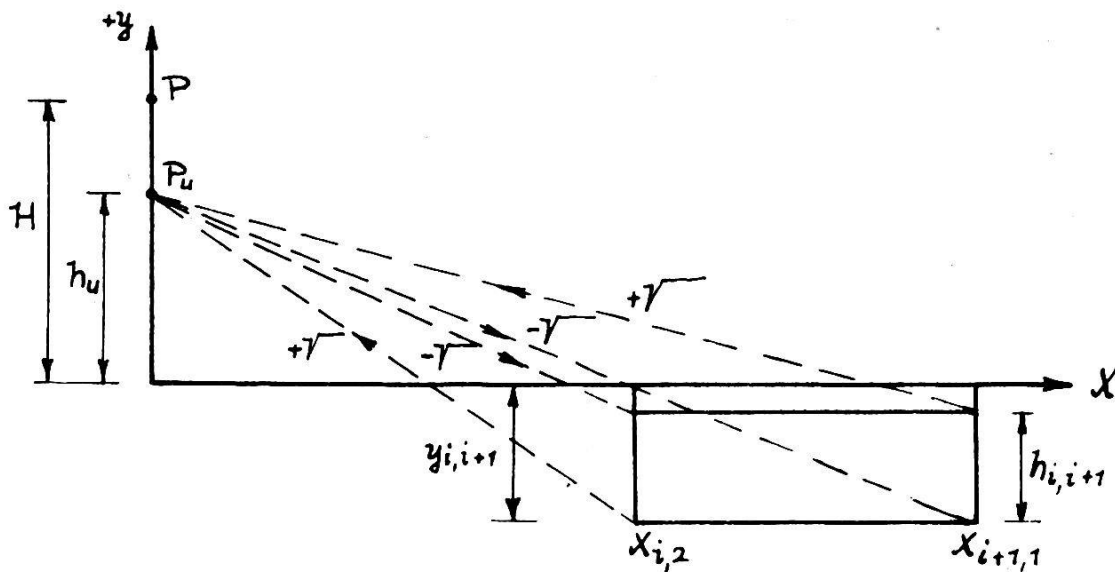


Abb. 13

Es ergibt sich analog (siehe Abb. 13) für einen beliebigen Punkt P_u der Lotlinie

$$A_{\text{red}, P_u} = 2 \pi k^2 \vartheta \left[\sqrt{x_{i+1,1}^2 + (h_u - h_{i,i+1} + y_{i,i+1})^2} - \right. \\ \left. - \sqrt{x_{i+1,1}^2 + (h_u + y_{i,i+1})^2} - \sqrt{x_{i,2}^2 + (h_u - h_{i,i+1} + y_{i,i+1})^2} + \right. \\ \left. + \sqrt{x_{i,2}^2 + (h_u + y_{i,i+1})^2} \right], \quad (30)$$

für den Oberflächenpunkt P mit $h_u = H$

$$A_{\text{red}, P} = 2 \pi k^2 \vartheta \left[\sqrt{x^2_{i+1,1} + (H - h_{i,i+1} + y_{i,i+1})^2} - \right. \\ \left. - \sqrt{x^2_{i+1,1} + (H + y_{i,i+1})^2} - \sqrt{x^2_{i,2} + (H - h_{i,i+1} + y_{i,i+1})^2} + \right. \\ \left. + \sqrt{x^2_{i,2} + (H + y_{i,i+1})^2} \right], \quad (31)$$

für den Geoidpunkt P_0 mit $h_u = 0$

$$A_{\text{red}, P_0} = 2 \pi k^2 \vartheta \left[\sqrt{x^2_{i+1,1} + (y_{i,i+1} - h_{i,i+1})^2} - \right. \\ \left. - \sqrt{x^2_{i+1,1} + y^2_{i,i+1}} - \sqrt{x^2_{i,2} + (y_{i,i+1} - h_{i,i+1})^2} + \right. \\ \left. + \sqrt{x^2_{i,2} + y^2_{i,i+1}} \right] \quad (32)$$

und für den Durchschnittswert

$$\bar{A}_{\text{red}} = \quad (33)$$

$$= \frac{\pi k^2 \vartheta}{H} \left\{ x^2_{i+1,1} \ln \left(\frac{H - h_{i,i+1} + y_{i,i+1} + \sqrt{x^2_{i+1,1} + (H - h_{i,i+1} + y_{i,i+1})^2}}{H + y_{i,i+1} + \sqrt{x^2_{i+1,1} + (H + y_{i,i+1})^2}} \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \frac{y_{i,i+1} + \sqrt{x^2_{i+1,1} + y^2_{i,i+1}}}{y_{i,i+1} - h_{i,i+1} + \sqrt{x^2_{i+1,1} + (y_{i,i+1} - h_{i,i+1})^2}} \right) + \\ + (H - h_{i,i+1} + y_{i,i+1}) \sqrt{x^2_{i+1,1} + (H - h_{i,i+1} + y_{i,i+1})^2} - \\ - (H + y_{i,i+1}) \sqrt{x^2_{i+1,1} + (H + y_{i,i+1})^2} - \\ - (y_{i,i+1} - h_{i,i+1}) \sqrt{x^2_{i+1,1} + (y_{i,i+1} - h_{i,i+1})^2} + \\ \left. + y_{i,i+1} \sqrt{x^2_{i+1,1} + y^2_{i,i+1}} \right\} - \\ - \frac{\pi k^2 \vartheta}{H} \left\{ x^2_{i,2} \cdot \ln \dots \dots \text{(analog dem ersten Teil mit } x_{i+1,1}) \right\}.$$

Für die Differenz $(\bar{A} - A_P)$ ergibt sich schließlich:

$$\frac{\bar{A}_{\text{red}} - A_{\text{red}, P}}{\pi k^2 \vartheta} = \quad (34)$$

$$= \frac{1}{H} \left\{ x^2_{i+1,1} \ln \left(\frac{H - h_{i,i+1} + y_{i,i+1} + \sqrt{x^2_{i+1,1} + (H - h_{i,i+1} + y_{i,i+1})^2}}{H + y_{i,i+1} + \sqrt{x^2_{i+1,1} + (H + y_{i,i+1})^2}} \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \frac{y_{i,i+1} + \sqrt{x^2_{i+1,1} + y^2_{i,i+1}}}{y_{i,i+1} - h_{i,i+1} + \sqrt{x^2_{i+1,1} + (y_{i,i+1} - h_{i,i+1})^2}} \right) + \\ + (y_{i,i+1} - h_{i,i+1} - H) \sqrt{x^2_{i+1,1} + (H - h_{i,i+1} + y_{i,i+1})^2} -$$

$$\begin{aligned}
& - (y_{i,i+1} - H) \sqrt{x_{i+1,1}^2 + (y_{i,i+1} + H)^2} - \\
& - (y_{i,i+1} - h_{i,i+1}) \sqrt{x_{i+1,1}^2 + (y_{i,i+1} - h_{i,i+1})^2} + \\
& + y_{i,i+1} \sqrt{x_{i+1,1}^2 + y_{i,i+1}^2} \Big\} - \\
& - \frac{1}{H} \left\{ x_{i,2}^2 \ln \left(\frac{H - h_{i,i+1} + y_{i,i+1} + \sqrt{x_{i,2}^2 + (H - h_{i,i+1} + y_{i,i+1})^2}}{H + y_{i,i+1} + \sqrt{x_{i,2}^2 + (H + y_{i,i+1})^2}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \cdot \frac{y_{i,i+1} + \sqrt{x_{i,2}^2 + y_{i,i+1}^2}}{y_{i,i+1} - h_{i,i+1} + \sqrt{x_{i,2}^2 + (y_{i,i+1} - h_{i,i+1})^2}} \right) + \right. \\
& + (y_{i,i+1} - h_{i,i+1} - H) \sqrt{x_{i,2}^2 + (H - h_{i,i+1} + y_{i,i+1})^2} - \\
& - (y_{i,i+1} - H) \sqrt{x_{i,2}^2 + (y_{i,i+1} + H)^2} - \\
& - (y_{i,i+1} - h_{i,i+1}) \sqrt{x_{i,2}^2 + (y_{i,i+1} - h_{i,i+1})^2} + \\
& \left. + y_{i,i+1} \sqrt{x_{i,2}^2 + y_{i,i+1}^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Es wurde bereits früher erwähnt, daß die Berücksichtigung der negativen isostatischen Kompensationsmassen nach dem gleichen Prinzip vorgesehen ist. Es wird auch an Hand von einigen Beispielen gezeigt werden, daß der infolge der Drehung und Zerrung entstandene Fehler ebenso klein bleibt wie bei den Geländemassen, da es sich einerseits auch hier

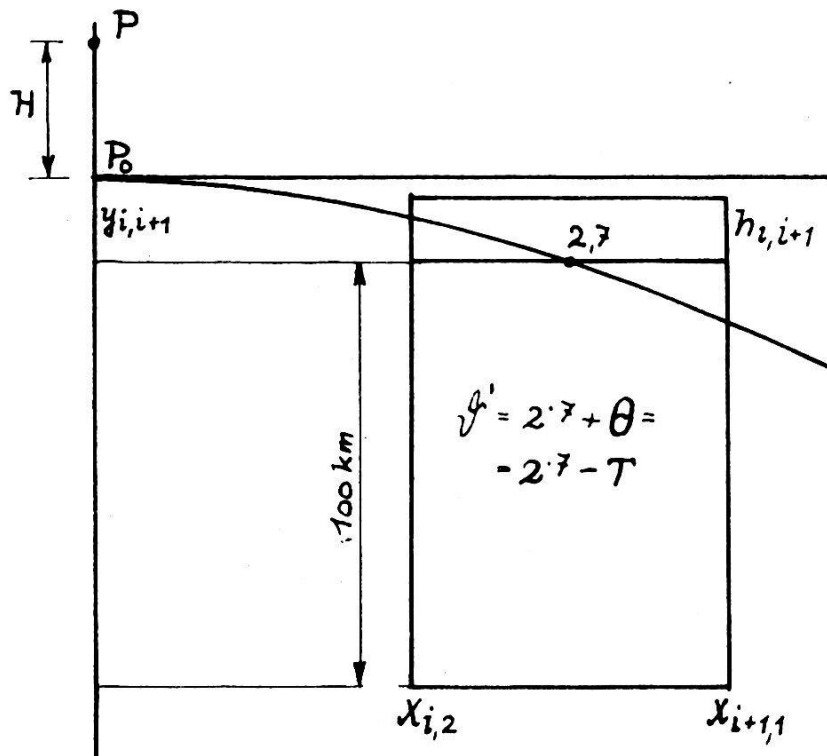


Abb. 14

um Differenzen handelt, andererseits aber dem nunmehr im Verhältnis zum Gelände bedeutend größeren Volumen ein wesentlich kleinerer Dichtekoeffizient gegenübersteht, wodurch die Anziehungswerte und Fehler klein bleiben (siehe Tabelle 3).

Man erhält die Dichte $\Theta_{i,i+1}$ der negativen Kompensationszonen aus der Gegenüberstellung

$$\begin{aligned} (x^2_{i+1,1} - x^2_{i,2}) \pi h_{i,i+1} \cdot 2,7 + (x^2_{i+1,1} - x^2_{i,2}) \pi \cdot 100 \cdot \vartheta'_{i,i+1} &= \\ &= (x^2_{i+1,1} - x^2_{i,2}) \pi \cdot 100 \cdot 2,7 \\ \vartheta'_{i,i+1} - 2,7 = \Theta_{i,i+1} &= -\frac{2,7}{100} h_{i,i+1} = -T_{i,i+1}; \end{aligned}$$

$$T_{i,i+1} = 0,027 \cdot h_{i,i+1},$$

wenn $h_{i,i+1}$ in Kilometern ausgedrückt ist.

Somit ergibt sich die Anziehung der negativen Kompensationszonen auf den Oberflächenpunkt P aus der analogen Formel (31) für die Anziehung der Massen über dem Geoid, indem man einfach für $h_{i,i+1}$ die entgegengesetzt gerichtete Höhe des 100 km tiefen Zylinderringes mit -100 und für ϑ die nunmehr mit der Zonenhöhe variierende Dichte $T_{i,i+1}$ einsetzt.

Man erhält damit

$$\begin{aligned} a_{\text{red},P} &= 2\pi k^2 T_{i,i+1} \left\{ \sqrt{x^2_{i+1,1} + (H + 100 + y_{i,i+1})^2} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{x^2_{i+1,1} + (H + y_{i,i+1})^2} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{x^2_{i,2} + (H + 100 + y_{i,i+1})^2} + \sqrt{x^2_{i,2} + (H + y_{i,i+1})^2} \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Entsprechend ergibt sich der Durchschnittswert \bar{a}_{red} aus (33):

$$\begin{aligned} \bar{a}_{\text{red}} &= \quad (36) \\ &= \frac{\pi k^2}{H} T_{i,i+1} \left\{ x^2_{i+1,1} \ln \left(\frac{H + 100 + y_{i,i+1} + \sqrt{x^2_{i+1,1} + (H + 100 + y_{i,i+1})^2}}{H + y_{i,i+1} + \sqrt{x^2_{i+1,1} + (H + y_{i,i+1})^2}} \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{y_{i,i+1} + \sqrt{x^2_{i+1,1} + y^2_{i,i+1}}}{100 + y_{i,i+1} + \sqrt{x^2_{i+1,1} + (100 + y_{i,i+1})^2}} \right) + \\ &\quad + (H + 100 + y_{i,i+1}) \sqrt{x^2_{i+1,1} + (H + 100 + y_{i,i+1})^2} - \\ &\quad - (H + y_{i,i+1}) \sqrt{x^2_{i+1,1} + (H + y_{i,i+1})^2} - \\ &\quad - (100 + y_{i,i+1}) \sqrt{x^2_{i+1,1} + (100 + y_{i,i+1})^2} + \\ &\quad \left. + y_{i,i+1} \sqrt{x^2_{i+1,1} + y^2_{i,i+1}} \right\} - \\ &= \frac{\pi k^2}{H} T_{i,i+1} \left\{ x^2_{i,2} \cdot \ln \dots (\text{analog dem ersten Teil mit } x_{i+1,1}) \dots \right\}. \end{aligned}$$

Man erhält schließlich auf gleiche Art aus (34) die Formel der entsprechenden Anziehungsdifferenz der negativen isostatischen Kompensationsmassen mit

$$\begin{aligned}
 \frac{\bar{a}_{\text{red}} - a_{\text{red},P}}{\pi k^2 T_{i,i+1}} &= \tag{37} \\
 &= \frac{1}{H} \left\{ x_{i+1,1}^2 \ln \left[\frac{H + 100 + y_{i,i+1} + \sqrt{x_{i+1,1}^2 + (H + 100 + y_{i,i+1})^2}}{H + y_{i,i+1} + \sqrt{x_{i+1,1}^2 + (H + y_{i,i+1})^2}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \cdot \frac{y_{i,i+1} + \sqrt{x_{i+1,1}^2 + y_{i,i+1}^2}}{100 + y_{i,i+1} + \sqrt{x_{i+1,1}^2 + (100 + y_{i,i+1})^2}} \right] + \right. \\
 &\quad + (y_{i,i+1} + 100 - H) \sqrt{x_{i+1,1}^2 + (y_{i,i+1} + 100 + H)^2} - \\
 &\quad - (y_{i,i+1} - H) \sqrt{x_{i+1,1}^2 + (y_{i,i+1} + H)^2} - \\
 &\quad - (y_{i,i+1} + 100) \sqrt{x_{i+1,1}^2 + (y_{i,i+1} + 100)^2} + \\
 &\quad \left. + y_{i,i+1} \sqrt{x_{i+1,1}^2 + y_{i,i+1}^2} \right\} - \\
 &\quad - \frac{1}{H} \left\{ x_{i,2}^2 \ln \dots (\text{analog dem ersten Teil mit } x_{i+1,1}) \dots \right\}.
 \end{aligned}$$

Mit den Ausdrücken (30) bis (33) beziehungsweise mit den analogen Formeln für die negativen Kompensationsmassen (35) und (36) und den daraus zusammengesetzten Ausdrücken (34) und (37) sind jetzt alle Elemente gegeben, um die auf Seite 283 bereits erwähnten Tabellen oder Graphika für den auf jede Zone entfallenden Teil der zur beobachteten Schwere g hinzuzufügenden Gesamtkorrektur $\Delta g_{i,i+1}$ zu erstellen. Diese Tabellen beziehungsweise Diagramme würden für die verschiedenen Zonen nach entsprechenden Werteskalen der Argumente H und $h_{i,i+1}$ anzulegen sein, wobei die Werteskalen für europäische Verhältnisse etwa von 100 m bis 4000 m mit Argumentsdifferenzen von je 100 m gehen könnten, was bei linearer Interpolation in den meisten Fällen eine Ablesung auf 0,01 mgal sichern würde. In den wenigen anderen Fällen könnte man die Argumente in kleineren Abständen (25 oder 50 m) aufeinanderfolgen lassen. Die Interpolation läßt sich, abgesehen von den Extremfällen in unmittelbarer Nähe von $h_{i,i+1} = H$, sowohl in der Richtung der h als auch der H vornehmen, was zu erwünschten einfachen Kontrollen verhilft. In den Extremfällen (siehe zum Beispiel Tabelle 2, Zone 0,5–1,0 km, $h_{i,i+1} = 2,5000$ km, $H = 2,5042$ km) kann man nur in der H -Richtung interpolieren.

(Fortsetzung folgt)