Sur la compensation de quantités mesurées interdépendantes

Autor(en): **Anseremt, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **59 (1961)**

Heft 6

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-216896

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie

Revue technique Suisse des Mensurations, du Génie rural et de Photogrammétrie

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Kulturingenieurverein; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie

Editeur: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse des ingénieurs du Génie rural; Société suisse de Photogrammétrie

Nr. 6 · LIX. Jahrgang | Erscheint monatlich | 15. Juni 1961

Sur la compensation de quantités mesurées interdépendantes

Par A. Ansermet

Dans la pratique courante, la compensation de quantités mutuellement dépendantes se présente assez rarement; le cas doit toutefois être envisagé où la compensation porte sur des grandeurs mesurées indirectement. On parle aussi d'observations corrélées et la question se pose de généraliser les modes de calcul usuels. Il est aisé de pressentir que ce problème est complexe, et le but de ces lignes est de développer encore quelques considérations en traitant quelques cas concrets caractéristiques. Grâce à ces exemples numériques il sera possible de faire des comparaisons judicieuses entre la méthode des moindres carrés et sa généralisation. Disons de suite que lors de cette confrontation la méthode des moindres carrés ne fera pas mauvaise figure.

Considérons tout d'abord le cas simple où les observations sont au nombre de trois seulement, deux de celles-ci étant surabondantes, ce qui donne lieu aux discordances w_1 et w_2 et aux équations de condition aux corrections:

$$\begin{cases} a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + w_1 = [av] + w_1 = 0 \\ b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 + w_2 = [bv] + w_2 = 0 \end{cases}$$

A la base du calcul on a ici la matrice dite des poids où les éléments non diagonaux $p_{gh} = p_{hg}$ $(g \neq h)$ sont nuls quand il n'y a pas de corrélation:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \quad \text{et sa réciproque} \quad \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}$$

dite des comultiplicateurs ou cofacteurs où $q_{gh} = q_{hg}$ $(g \neq h)$. La fonction F à rendre minima est, en faisant abstraction des w:

$$F = [pvv] + p_{12}v_1v_2 + p_{13}v_1v_3 + \ldots + p_{32}v_3v_2 - 2k_1[av] - 2k_2[bv]$$

les k_1 et k_2 étant les multiplicateurs de Lagrange ou corrélatifs. Dans le terme $[pvv]$ les p sont les éléments diagonaux.

$$\left.\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\, dF: dv_1 &= p_{11}v_1 + p_{12}v_2 + p_{13}v_3 - a_1k_1 - b_1k_2 = 0 \\
\tfrac{1}{2}\, dF: dv_2 &= p_{21}v_1 + p_{22}v_2 + p_{23}v_3 - a_2k_1 - b_2k_2 = 0 \\
\tfrac{1}{2}\, dF: dv_3 &= p_{31}v_1 + p_{32}v_2 + p_{33}v_3 - a_3k_1 - b_3k_2 = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Le terme $[pvv]$ est formé en fonction des p_{11}, p_{22}, p_{33} seulement.

La transformation linéaire connue, basée sur la réciprocité des matrices, permet d'exprimer les v en partant du système (1):

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= k_1\,(a_1q_{11} + a_2q_{12} + a_3q_{13}) + k_2\,(b_1q_{11} + b_2q_{12} + b_3q_{13}) \\
v_2 &= k_1\,(a_1q_{21} + a_2q_{22} + a_3q_{23}) + k_2\,(b_1q_{21} + b_2q_{22} + b_3q_{23}) \\
v_3 &= k_1\,(a_1q_{31} + a_2q_{32} + a_3q_{33}) + k_2\,(b_1q_{31} + b_2q_{32} + b_3q_{33})
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Ce sont les équations aux corrélatifs généralisées tandis que les équations normales aux corrélatifs sont:

$$\left.\begin{aligned}
[av] + w_1 &= Ak_1 + Bk_2 + w_1 = 0 \\
[bv] + w_2 &= Bk_1 + A'k_2 + w_2 = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$A = \left\{\begin{aligned}
& q_{11}a_1a_1 + q_{12}a_1a_2 + q_{13}a_1a_3 \\
+\; & q_{21}a_2a_1 + q_{22}a_2a_2 + q_{23}a_2a_3 \\
+\; & q_{31}a_3a_1 + q_{32}a_3a_2 + q_{33}a_3a_3
\end{aligned}\right.$$

$$B = \left\{\begin{aligned}
& q_{11}b_1a_1 + q_{12}b_1a_2 + q_{13}b_1a_3 \\
+\; & q_{21}b_2a_1 + q_{22}b_2a_2 + q_{23}b_2a_3 \\
+\; & q_{31}b_3a_1 + q_{32}b_3a_2 + q_{33}b_3a_3
\end{aligned}\right.$$

le coefficient A' se déduisant de A en substituant les b aux a. Ces résultats s'obtiennent par les doubles produits matriciels; les a_1, b_1 peuvent être aussi dessous les q_{11}, q_{21} et de même pour la suite

$$\begin{bmatrix}
a_1 & b_1 & \\
q_{11} & q_{21} & q_{31} \\
a_2 & b_2 & \\
q_{12} & q_{22} & q_{32} \\
a_3 & b_3 & \\
q_{13} & q_{23} & q_{33}
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix}
a_1q_{11} + a_2q_{12} + a_3q_{13} & b_1q_{11} + b_2q_{12} + b_3q_{13} \\
a_1 & b_1 \\
a_1q_{21} + a_2q_{22} + a_3q_{23} & b_1q_{21} + b_2q_{22} + b_3q_{23} \\
a_2 & b_2 \\
a_1q_{31} + a_2q_{32} + a_3q_{33} & b_1q_{31} + b_2q_{32} + b_3q_{33} \\
a_3 & b_3
\end{bmatrix}$$

Si les éléments non diagonaux p_{gh} et q_{gh} des matrices initiales sont nuls, les éléments diagonaux p_{11}, p_{22}, p_{33} sont respectivement les inverses de q_{11}, q_{22}, q_{33}, ce qui ramène à la solution par les moindres carrés.

Les corrections v_i étant connues, le calculateur forme l'expression:

$$[pvv] + [p_{gh}v_gv_h] \qquad g \neq h$$

déterminée aussi à l'aide de matrices. On en déduit l'erreur quadratique moyenne de poids unité puis, pour apprécier dans quelle mesure les poids initiaux sont amplifiés grâce à la compensation, on formera la somme:

$$S = [m'_i{}^2 : m_i{}^2]$$

où les m_i' et m_i sont respectivement les erreurs moyennes, *après* et *avant* compensation, des éléments soumis à compensation. C'est à ce moment que la comparaison a lieu avec la méthode des moindres carrés. Des cas concrets seront traités ci-après; dans l'un de ceux-ci le calcul est scindé en deux phases et l'on forme la matrice des comultiplicateurs des binômes $(-f_i + v_i)$ après la première phase. Ces f_i expriment les différences entre les valeurs provisoires et mesurées. Le rôle joué par ces comultiplicateurs *a posteriori* sera rendu plus explicite lors des applications.

Observations médiates. Ce cas fut traité très récemment ([3], p. 308). Si le nombre des inconnues est égal à deux, les coefficients des équations normales sont respectivement pour: $-f_i + v_i = a_i x + b_i y$

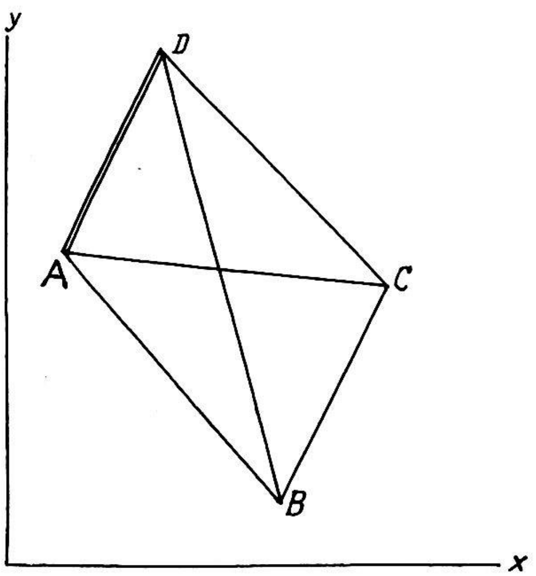
$$[paa] + [p_{gh} a_g a_h], \quad [pab] + [p_{gh} a_g b_h], \quad [pbb] + [p_{gh} b_g b_h],$$

les termes $[paa]$, $[pab]$, $[pbb]$ étant obtenus en faisant abstraction des éléments p_{gh} non diagonaux. La suite du calcul est aisée; il faut former l'inverse de la matrice du système d'équations normales, soit la matrice des comultiplicateurs des inconnues compensées; il n'y a rien là de bien nouveau.

Le premier problème choisi se rencontre fréquemment; il porte sur le calcul d'une paire de points et les éléments initiaux sont inspirés d'une récente publication ([2], p. 55), mais la solution adoptée ici est différente en ce sens qu'une des quatre inconnues est éliminée au préalable. A certains égards c'est un avantage.

Avant de poursuivre, rappelons qu'aucun mode de compensation n'est absolument exempt d'arbitraire; cela tient à la nature du problème.

Détermination d'une paire de points. La méthode appliquée est celle courante dite aux variations des inconnues. Les points A et D sont donnés et on mesure les directions tracées sur la figure. Ainsi que l'indique clairement le tableau des équations ci-après, on soumet à compensation huit éléments: quatre directions et quatre angles; ces derniers ont deux à deux un côté commun, ce qui donne lieu à la corrélation. Pratiquement une telle solution est discutable.



De plus la distance BC est supposée connue et exempte d'erreur, ce qui s'exprime par la condition: $3{,}405\,(dx_1 - dx_2) + 4{,}318\,(dy_1 - dy_2) = 0$, les corrections à apporter aux coordonnées étant (dx_1, dy_1) pour C et (dx_2, dy_2) pour B. Une des variables peut être éliminée:

$$dy_2 = +0{,}789\,dx_1 + dy_1 - 0{,}789\,dx_2$$

En admettant comme unités le décimètre et la seconde sexagésimale, on obtient le groupe d'équations ci-dessous; la forme générale est:

$$-f_i + v_i = a_i dx_1 + b_i dy_1 + c_i dx_2 + d_i dy_2$$

Eléments mesurés	$-f_i + v_i$	Matrice des coefficients dx_1	dy_1	dx_2	dy_2	Ecarts quadratiques	q_{gh}
Direction AC	$i = 1$	—1,221	—0,181			$\pm m$	
Direction AB	$i = 2$			—0,889	—1,068	$\pm m$	
		—0,843	—1,068	—0,046			
Angle ABD	3			+0,674	+0,091	$\pm m\sqrt{2}$	
		+0,072	+0,091	+0,602			
Angle DBC	4	+1,125	—1,427	—0,910	+2,404	$\pm m\sqrt{2}$	—1
		+3,022	+0,977	—2,807			
Angle BCA	5	—2,346	+1,246	+1,125	—1,427	$\pm m\sqrt{2}$	
		—3,472	—0,181	+2,251			—1
Angle ACD	6	+0,303	—0,713			$\pm m\sqrt{2}$	
Direction DC	7	—0,918	—0,895			$\pm m$	
Direction DB	8			—0,215	—0,977	$\pm m$	
		—0,771	—0,977	+0,556			

Les coefficients avant l'élimination de dy_2 sont indiqués pour mémoire.

Pour grouper les éléments sur un même tableau, une seconde ligne fut ajoutée pour les valeurs $i = 2, 3, 4, 5, 8$; cette seconde ligne résulte de l'élimination de dy_2. C'est elle qui est valable ici.

Pour les matrices des q et des p on a donc:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & 2 & -1 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & 2 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & 1 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & {}^2/_3 & {}^1/_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & {}^2/_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & {}^2/_3 & {}^1/_3 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & {}^2/_3 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & 1 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & 1 \end{bmatrix}$$

Dans les matrices symétriques et réciproques ci-dessus la moitié des éléments non diagonaux fut remplacée par des traits.

Il y a d'autre part des contrôles dans le tableau des $(-f_i + v_i)$, par exemple:

$$-(-f_1 + v_1) + (-f_2 + v_2) + (-f_3 + v_3) + (-f_4 + v_4) + (-f_5 + v_5) = 0$$

$$(-f_4 + v_4) + (-f_5 + v_5) + (-f_6 + v_6) - (-f_7 + v_7) + (-f_8 + v_8) = 0$$

La formation des équations normales s'obtient en effectuant un double produit matriciel et en laissant ici de côté les termes absolus; les matrices jouent le rôle d'opérateurs. Le but poursuivi est de former la somme S donnant l'amplification des poids après compensation. Le rapport d'amplification est en réalité l'inverse du quotient $(m_i'^2 : m_i^2)$.

	dx_1	dy_1	dx_2					
1	1 —1,221	--0,181						
2	—0,843	1 —1,068	—0,046					
3	+0,072	+0,091	0,667 +0,602	0,333				
4	+3,022	+0,977	0,333 —2,807	0,667				
5	—3,472	—0,182	+2,251		0,667	0,333		
6	+0,303	—0,713			0,333	0,667		
7	—0,918	—0,895					1	
8	—0,771	—0,977	+0,556					1

1	—1,221 —1,221	—0,181 —0,181	
2	—0,843 —0,843	—1,068 —1,068	—0,046 —0,046
3	+1,055 +0,072	+0,386 +0,091	—0,535 +0,602
4	+2,039 +3,022	+0,682 +0,977	—1,670 —2,807
5	—2,214 —3,472	—0,359 —0,182	+1,501 +2,251
6	—0,955 +0,303	—0,537 —0,713	+0,750
7	—0,918 —0,918	—0,895 —0,895	
8	—0,771 —0,771	—0,977 —0,977	+0,556 +0,556

Le double produit fournit la matrice des équations normales:

17,27	+5,86	—10,46
+ 5,86	4,07	— 2,99
—10,46	—2,99	8,04

d'où la matrice réciproque après des calculs faits à la règle:

0,425	—0,285	+0,446
—0,285	0,527	—0,175
+0,446	—0,175	0,639

Cette dernière fournit les comultiplicateurs des inconnues compensées; en fonction de ces valeurs on peut calculer, après compensation, les huit erreurs moyennes quadratiques m'_i des binômes $(-f_i + v_i)$, par exemple:

$$m'^2_3 = m^2(\overline{0{,}072}^2 \cdot 0{,}425 + \overline{0{,}091}^2 \cdot 0{,}527 + \overline{0{,}602}^2 \cdot 0{,}639 -$$
$$- 2 \cdot 0{,}072 \cdot 0{,}091 \cdot 0{,}285 + 2 \cdot 0{,}072 \cdot 0{,}602 \cdot 0{,}446 -$$
$$- 2 \cdot 0{,}091 \cdot 0{,}602 \cdot 0{,}175) = m^2 \cdot 0{,}254.$$

Initialement on avait $\pm m$ pour les erreurs quadratiques moyennes des quatre directions et $\pm m\sqrt{2}$ pour les quatre angles, valeurs qui viennent améliorées grâce à la compensation. A cet effet formons les quotients des carrés des écarts quadratiques puis calculons la somme S des huit quotients en posant $m^2 = 1$ pour simplifier:

$$\begin{array}{lcccccccc} S = & \frac{0{,}524}{1} + & \frac{0{,}407}{1} + & \frac{0{,}254}{2} + & \frac{1{,}122}{2} + & \frac{1{,}186}{2} + & \frac{0{,}431}{2} + & \frac{0{,}312}{1} + \\ i = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{lc} & + \frac{0{,}331}{1} = 3{,}07. \quad ([2], \text{p. } 75) \\ i = & 8 \end{array}$$

au lieu de:

$$S = 3{,}00 \text{ (3 inconnues)}$$

par la méthode des moindres carrés. Cette confrontation n'est pas au désavantage de la méthode des moindres carrés dans le cas particulier.

Le gain réalisé grâce à la compensation est mis en évidence par ces huit quotients qui varient entre 0,127 ($i = 3$) et 0,593 ($i = 5$), en moyenne 0,384 (moindres carrés 0,375). Certains auteurs expriment ce gain en pour-cent, ce qui paraît moins explicite.

La corrélation, telle qu'elle se présente dans ce problème, pouvait être évitée pratiquement; toutes les directions tracées sur la figure firent l'objet de mesures indépendantes, par exemple par la méthode dite des couples sur référence en faveur dans certains pays. Un exemple avec fractionnement du calcul sera traité plus loin.

Compensation de mesures linéaires. Dans l'exemple précédent la corrélation entre éléments mesurés résultait de la combinaison de mesures angulaires et de directions.

Le calcul ci-après est basé sur l'hypothèse suivante: Pour les éléments diagonaux de la matrice des poids on peut admettre une valeur commune, unique, p, et pour les non diagonaux p_{gh} ($g \neq h$) aussi une valeur $p_{gh} = \backsimeq p'$ commune.

Une station spatiale est déterminée par quatre mesures linéaires; la forme générale de l'équation initiale est:

$$-f_i + v_i = a_i dx + b_i dy + c_i dz \qquad (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1)$$

où f_i est le terme absolu, dx, dy, dz des corrections à apporter aux coordonnées provisoires; on forme un double produit matriciel en fonction des a_i, b_i, c_i choisis arbitrairement:

	dx	dy	dz	
1	$+0{,}577$ p	$+0{,}577$ p'	$+0{,}577$ p'	p'
2	$+0{,}577$ p'	$-0{,}577$ p	$+0{,}577$ p'	p'
3	$-0{,}577$ p'	$+0{,}577$ p'	$+0{,}577$ p	p'
4	$-0{,}577$ p'	$-0{,}577$ p'	$+0{,}577$ p'	p

1	$+0{,}577\,(p - p')$ $+0{,}577$	$+0{,}577\,(p - p')$ $+0{,}577$	$+0{,}577\,p + 1{,}732\,p'$ $+0{,}577$
2	$+0{,}577\,(p - p')$ $+0{,}577$	$-0{,}577\,(p - p')$ $-0{,}577$	$+0{,}577\,p + 1{,}732\,p'$ $+0{,}577$
3	$-0{,}577\,(p - p')$ $-0{,}577$	$+0{,}577\,(p - p')$ $+0{,}577$	$+0{,}577\,p + 1{,}732\,p'$ $+0{,}577$
4	$-0{,}577\,(p - p')$ $-0{,}577$	$-0{,}577\,(p - p')$ $-0{,}577$	$+0{,}577\,p + 1{,}732\,p'$ $+0{,}577$

et finalement, pour la matrice des équations normales:

$$Q_{xy} = Q_{xz} = Q_{yz} = 0$$

$1{,}333\,(p - p')$	0	0
0	$1{,}333\,(p - p')$	0
0	0	$1{,}333\,p + 4\,p'$

La matrice étant diagonale, il suffit d'inverser les éléments diagonaux pour obtenir les comultiplicateurs des inconnues compensées.

Si $p' = 0$, l'ellipsoïde d'erreur est sphérique, ce que l'on présumait. Quand $p' \neq 0$, deux des axes sont égaux; le signe de p' est déterminant. Le 3e axe s'allonge et les deux axes égaux se raccourcissent ou l'inverse.

Formation de la somme S. Considérons deux cas particuliers:

1° $$q' = q_{gh} = -0{,}1\ (g \neq h)\ q_{11} = q_{22} = q_{33} = q_{44} = 1 = q.$$

L'erreur moyenne quadratique d'une longueur mesurée est $\pm m$. En inversant la matrice des q, on obtient celle des poids

$$p = 1{,}039,\ p' = +0{,}13 \qquad p - p' = 0{,}909$$

$$q - q' = 1{,}1 \qquad (q - q')(p - p') = 1 \qquad ([3],\ \text{p. } 310)$$

$$1{,}333\,(p - p') = 1{,}21;\ 1{,}333 \cdot p + 4p' = 1{,}90.$$

Les quatre binômes $(-f_i + v_i)$ ont même comultiplicateur:

$$\overline{0{,}577^2}\left(\frac{1}{1{,}21}+\frac{1}{1{,}21}+\frac{1}{1{,}90}\right) = \tfrac{1}{3}\,(0{,}825 + 0{,}825 + 0{,}51) = 0{,}72$$

$$S = 4 \cdot 0{,}72 = 2{,}88$$

2° $\qquad q' = +0{,}1 \quad q = 1, \quad p = 1{,}0256, \quad p' = -\,0{,}0855$

$$(q - q')\,(p - p') = 0{,}9 \cdot 1{,}111 = 1$$

$$1{,}333\,(p - p') = 1{,}48 \qquad 1{,}333\,p + 4p' = 1{,}36 - 0{,}34 = 1{,}02$$

$$0{,}577^2\left(\frac{1}{1{,}48}+\frac{1}{1{,}48}+\frac{1}{1{,}02}\right) = \tfrac{1}{3}\cdot 2{,}33$$

$$S = 4 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 2{,}33 = 3{,}11$$

La solution par les moindres carrés donnerait $S = 3$ $(pq = 1)$.

L'ellipsoïde d'erreur peut demeurer sphérique même pour $p' \neq 0$. Ce sera le cas, par exemple, pour la matrice ci-après des coefficients a_i, b_i, c_i:

$i =$	a_i	b_i	c_i
1	0	0	—1
2	0	+0,943	+0,333
3	—0,816	—0,4714	+0,333
4	+0,816	—0,4714	+0,333

Un calcul, analogue au précédent, toujours avec les éléments p et p', donne pour la matrice finale:

$1{,}333\,(p - p')$	0	0
0	$1{,}333\,(p - p')$	0
0	0	$1{,}333\,(p - p')$

Le rayon de la sphère d'erreur s'allonge ou se raccourcit en fonction du signe de p'.

On sait que c'est moins l'ellipsoïde d'erreur qui joue un rôle que sa surface podaire par rapport au centre; ces deux surfaces sont unicursales. Il suffit d'exprimer les coordonnées des points de la surface podaire («Fußpunktfläche») pour le constater.

Corrélation et fractionnement des calculs

Le cas peut se présenter où une compensation est déjà terminée lorsque de nouvelles conditions interviennent dont il faut tenir compte.

Le calculateur doit alors envisager une seconde phase de la compensation; ce problème n'est pas nouveau. Après la première phase on possède tous les éléments qui expriment la corrélation existant entre les inconnues ou, ce qui revient au même, entre les $(-f_i + v_i)$. Certains géodésiens ont jugé opportun d'établir à nouveau qu'il fallait tenir compte de cette corrélation résultant de la première phase ([2], p. 97). (C'était méritoire mais aboutissait à une confirmation de ce que l'on savait depuis longtemps.)

A cet effet reprenons, en lui donnant de l'extension, le problème de compensation traité dans le numéro 7, 1960, de la présente Revue:

$$\mathrm{I}\left\{\begin{aligned}
-f_1 + v_1 &= x \\
-f_2 + v_2 &= \quad + y \\
-f_3 + v_3 &= \qquad\quad + z \\
-f_4 + v_4 &= \quad\;\; y + z \\
-f_5 + v_5 &= x \qquad + z \\
-f_6 + v_6 &= x + y \\
-f_7 + v_7 &= x + y + z
\end{aligned}\right.$$

ou, si l'on préfère:

$$\mathrm{II}\left\{\begin{aligned}
-f_4 + v_4 &= (-f_2 + v_2) + (-f_3 + v_3) \\
-f_5 + v_5 &= (-f_1 + v_1) + (-f_3 + v_3) \\
-f_6 + v_6 &= (-f_1 + v_1) + (-f_2 + v_2) \\
-f_7 + v_7 &= (-f_1 + v_1) + (-f_2 + v_2) + (-f_3 + v_3)
\end{aligned}\right.$$

Les w sont calculables en fonction des f.

Pratiquement on peut concevoir que l'on pèse trois lingots de métal isolément puis en les groupant par deux ou par trois. La balance utilisée ne permet pas d'admettre qu'il y a indépendance entre les pesées.

$$q = 1, \quad q' = +0{,}25 \qquad p = 1{,}2, \quad p' = -0{,}133$$

$$q - q')\,(p - p') = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$$

$$Q_{xx} = Q_{yy} = Q_{zz} = 0{,}328 \qquad Q_{xy} = Q_{xz} = Q_{yz} = -0{,}047$$

On en déduit pour les $(-f_i + v_i)$:

$$Q_{12} = Q_{13} = Q_{23} = -0{,}047, \text{ etc.}$$

$$Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = 0{,}328, \quad Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = 0{,}562, \quad Q_{77} = 0{,}702$$

$$S = 3 \cdot 0{,}328 + 3 \cdot 0{,}562 + 0{,}702 = 3{,}37 \text{ (3 inconnues)}$$

en moyenne 0,48 au lieu de 0,43 par les moindres carrés.

Seconde phase. Admettons pour simplifier une seule équation de condition liant les inconnues; à celles-ci, calculées en première phase, il faut ajouter des surcorrections ξ, η, ζ telles que:

$$\xi + \eta + \zeta = w, \qquad p_1\xi + p_2\eta + p_3\zeta = w' \qquad \text{([1], p. 295–302)}$$

Aux v_1, v_2 ... v_7 il faut ajouter des v_1', v_2' ... v_7'. Or, d'après I, on a

$$\begin{array}{llll} v_1' = \xi & v_4' = \phantom{\xi +{}} \eta + \zeta & v_7' = \xi + \eta + \zeta & [v_i']_1^7 = 4\,w \\ v_2' = + \eta & v_5' = \xi \phantom{{}+\eta} + \zeta & & \\ v_3' = + \zeta & v_6' = \xi + \eta & & \end{array}$$

On peut aussi considérer une équation liant les v_1', v_2' ... v_7', cas plus général.

Une relation entre les inconnues nouvelles ξ, η, ζ se traduit en effet par une équation liant trois seulement des v_1', v_2' ... v_7'. Considérons donc la forme $a_1'v_1' + a_2'v_2' + \ldots + a_7'v_7' = [a_i'v_i']_1^7 = w'$, où w' est une discordance. Cette condition peut être convertie en une autre en fonction des ξ, η, ζ:

$$[a_i'v_i'] = p_1\xi + p_2\eta + p_3\zeta = w'$$

où

$$p_1 = a_1' + a_5' + a_6' + a_7'; \quad p_2 = a_2' + a_4' + a_6' + a_7';$$
$$p_3 = a_3' + a_4' + a_5' + a_7'.$$

Il faut, de plus, former les

$P_1 = 0{,}328\,p_1 - 0{,}047\,p_2 - 0{,}047\,p_3$, $P_2 = -0{,}047\,p_1 + 0{,}328\,p_2 - 0{,}047\,p_3$ et $P_3 = -0{,}047\;p_1 - 0{,}047\;p_2 + 0{,}328\;p_3$

les facteurs 0,328 et 0,047 étant, comme on l'a vu, les coefficients de poids respectivement quadratiques et rectangulaires, relatifs aux x, y, z. Or on a:

$$\xi = P_1k_1, \quad \eta = P_2k_1, \quad \zeta = P_3k_1 \qquad ([1], \text{p. } 295\text{–}302)$$

$$P_1 = 0{,}328\,a_1' - 0{,}047\,a_2' - 0{,}047\,a_3' - 0{,}094\,a_4' + 0{,}281\,a_5' + {} + 0{,}281\,a_6' + 0{,}234\,a_7'$$

$$P_2 = -0{,}047\,a_1' + 0{,}328\,a_2' - 0{,}047\,a_3' + 0{,}281\,a_4' - 0{,}094\,a_5' + {} + 0{,}281\,a_6' + 0{,}234\,a_7'$$

$$P_3 = -0{,}047\,a_1' - 0{,}047\,a_2' + 0{,}328\,a_3' + 0{,}281\,a_4' + 0{,}281\,a_5' - {} - 0{,}094\,a_6' + 0{,}234\,a_7'$$

puis:

$P_1 + P_2 = \ldots\ (i = 6)$; $P_1 + P_3 = \ldots\ (i = 5)$; $P_2 + P_3 = \ldots$ (pour v_4')

Enfin:

$$P_1 + P_2 + P_3 = 0{,}234\,a_1' + 0{,}234\,a_2' + 0{,}234\,a_3' + 0{,}468\,a_4' + {} + 0{,}468\,a_5' + 0{,}468\,a_6' + 0{,}702\,a_7'$$

ce qui fournit les éléments pour le calcul des v_i'.

Un autre mode de détermination est basé sur les équations (2), développées au début, avec l'emploi de la matrice des comultiplicateurs des $(-f_i + v_i)$, donc après la première phase. C'est le même calcul mais sous une autre forme; les v_i et a_i des équations (2) sont devenus les v_i' et a_i'.

Il n'est même pas nécessaire d'effectuer le produit matriciel, car la concordance des résultats est manifeste.

$i = 1$	2	3	4	5	6	7
+0,328 $+a_1'$	—0,047	—0,047	—0,094	+0,281	+0,281	+0,234
—0,047 $+a_2'$	0,328	—0,047	+0,281	—0,094	+0,281	+0,234
—0,047 $+a_3'$	—0,047	0,328	+0,281	+0,281	—0,094	+0,234
—0,094 $+a_4'$	+0,281	+0,281	+0,562	+0,1875	+0,1875	+0,468
+0,281 $+a_5'$	—0,094	+0,281	+0,1875	+0,562	+0,1875	+0,468
+0,281 $+a_6'$	+0,281	—0,094	+0,1875	+0,1875	+0,562	+0,468
+0,234 $+a_7'$	+0,234	+0,234	+0,468	+0,468	+0,468	+0,702

Cet exemple semi-numérique est simple, car il n'y a qu'une équation de condition en seconde phase. La corrélation, telle qu'elle résulte de la première phase de la compensation, présente un intérêt transitoire; la matrice ci-dessus s'obtient directement grâce au système d'équations I. Dans la pratique le calculateur pourra choisir.

Après la première phase la valeur moyenne du quotient $(m_i'^2 : m_i^2)$ était $3,37 : 7 = 0,48$ au lieu de $0,43 = 3,00 : 7$ par les moindres carrés; après la seconde phase ce quotient devient $2 : 7 = 0,29$ si l'on compense par les moindres carrés puisque le nombre des inconnues fut ramené de trois à deux. Ce cas fut traité récemment dans la présente Revue (1959, N° 11, p. 397). C'est un contrôle bienvenu pour les calculs. En inversant ces quotients on obtient le module d'amplification des poids. Si entre les éléments soumis à compensation il y a de la corrélation, c'est-à-dire une dépendance stochastique, le problème est en général moins simple. Dans l'exemple numérique traité plus haut, relatif à des mesures linéaires, on a trouvé pour $(m_i'^2 : m_i^2)$ les valeurs:

$$0,72\ (q' = -0,1),\ 0,75\ (q' = 0),\ 0,78\ (q' = +0,1)$$

En outre il est intéressant de mettre en évidence, pour ces quotients, leur repartition selon le mode de calcul. Ainsi pour l'exemple traité en dernier lieu, première phase ($i = 1, 2, \ldots 7$), on a:

$$0,375 \leq (m'^2_i : m_i^2) \leq 0,5 \quad \text{(moindres carrés)}$$

$$0,328 \leq (m'^2_i : m_i^2) \leq 0,702 \quad \text{(avec covariance)}$$

on pourrait multiplier les exemples.

En résumé on peut dire que les praticiens éviteront autant que possible de compenser des mesures interdépendantes; le but de ces lignes était de développer encore quelques considérations au sujet de ce problème. Il a paru opportun aussi de formuler quelques remarques quant au fractionnement des calculs en deux phases et au degré de nouveauté de certaine solution.

Littérature

[1] *C. F. Baeschlin,* Ausgleichungsrechnung und Landesvermessung (Zurich, autographie).

[2] *R. Marchant,* Compensation de mesures surabondantes (Bruxelles).

[3] *A. Ansermet,* Extension du problème de l'ellipse d'erreur (Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, N° 9, 1960).

Die Luftphotogrammetrie in der Grundbuchvermessung – praktische Erfahrungen in einer Voralpengemeinde

Von J. Iklé, Kulturingenieur ETH, Rapperswil

Anläßlich der Grundbuchvermessung Wildhaus bot sich dem Verfasser als Inhaber eines Ingenieur- und Vermessungsbüros die willkommene Gelegenheit, sich mit der photogrammetrischen Grundbuchvermessung vertraut zu machen.

Obwohl in der ganzen Schweiz schon vielfach angewendet und erprobt, bringt diese moderne Vermessungsmethode doch in jedem Fall wieder genau zu studierende Probleme mit sich. Die diesbezüglichen guten oder weniger guten Erfahrungen der Übernehmer werden, meines Erachtens, zu wenig bekanntgemacht, so daß über Verfahren und Kosten noch beträchtliche Unsicherheiten bestehen.

Die photogrammetrische Grundbuchvermessung in der Gemeinde Wildhaus umfaßt drei Zonen des Maßstabgebietes 1 : 2000, wovon deren zwei durch den Verfasser, in Zusammenarbeit mit dem Photogrammeterbüro Locher und Berchtold, Glarus, gegenwärtig bearbeitet werden.

Der heutigen Beschreibung der Feldarbeiten des Jahres 1960 soll bei späterer Gelegenheit eine kritische Würdigung der Auswerte- und Verifikationsresultate folgen.

Topographie, Klima, landwirtschaftliche Strukturverhältnisse

Es handelt sich um einen Nord- und einen Südhang mittlerer Neigung von 20 respektive 28 %, mit zusammen etwas mehr als 500 ha Fläche. Die Höhenlage des Gebietes von 1000 bis 1400 m ü. M. und das ausgesprochen rauhe Klima bestimmen die Vegetation und den Wechsel der Jahreszeiten. Der Gesamt-Waldanteil dürfte ungefähr 30 % der Fläche betragen und besteht zur Hauptsache aus Fichten mit nur unbedeutenden Buchenbeständen.