

# Le problème de la similitude entre les réseaux géodésiques et les systèmes hyperstatiques

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **59 (1961)**

Heft 9

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-216913>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Umgebung, erstattet von E. Hunziker im Dezember 1960 (Maschinenschrift, vervielfältigt, 23 Seiten).

*Kobold, F., 1960*: Die Messung der Basis und des Basisvergrößerungsnetzes von Heerbrugg im Jahre 1959. Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie, Nrn. 1 und 2, 17 Seiten.

*Nettleton, L. L., 1939*: Determination of Density for Reduction of Gravity Observations. Geophysics, vol. 4, no. 3, p. 176–183.

*Niethammer, Th., 1921*: Schwerebestimmungen in den Jahren 1915–1918. Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz, Band 16, 191 Seiten.

*Rische, H., 1957*: Dichtebestimmungen im Gesteinsverband durch Gravimeter- und Drehwaagemessungen unter Tage. Freiburger Forschungshefte, C 35, Geophysik, Akademie-Verlag Berlin, 83 Seiten.

## Le problème de la similitude entre les réseaux géodésiques et les systèmes hyperstatiques

Par A. Ansermet

Au cours de ces dernières années, à l'étranger surtout, certains géodésiens ont montré l'analogie existant entre le calcul des réseaux géodésiques à mesures linéaires et le calcul des systèmes articulés hyperstatiques. Cette similitude se manifeste en ce qui concerne les déformations; dans ce domaine la géodésie peut tirer un bénéfice de méthodes, surtout graphiques, appliquées en statique. Ce problème n'ayant guère été traité dans la présente Revue, il a paru opportun de lui consacrer quelques lignes. Le but de celles-ci est de montrer qu'en statique comme en géodésie, le principe des moindres carrés trouve son application; les côtés et les sommets deviennent des barres et des nœuds. Dans les deux cas, à la base de tous les calculs, il y a une figure qui se déforme. En statique une solution consiste à rendre minimum le travail de déformation; ce n'est pas toujours celle-là qui est appliquée. Les poids sont exprimés en fonction des longueurs des barres et de leurs sections transversales. C'est une particularité du problème mais, sans cela, les règles du calcul par les moindres carrés subsistent comme on le constatera ci-après.

Considérons un cas concret simple: une maille quadrangulaire à deux diagonales; il y a donc six côtés et quatre sommets (six barres et quatre nœuds) et huit coordonnées en tout dont trois sont arbitraires. Un élément est surabondant; on dit qu'il y a une inconnue hyperstatique. En ramenant le nombre des côtés ou des barres à cinq on obtient ce que l'on appelle en statique un système principal ou isostatique fondamental de référence.

Soient  $l_1, l_2, \dots, l_6$  les côtés mesurés et  $(l_1 + f_1), (l_2 + f_2) \dots (l_6 + f_6)$  des valeurs provisoires, mais arbitraires, sous cette réserve que les  $f_1, f_2 \dots f_6$  soient suffisamment petits. De plus, après application du principe des moindres carrés, on obtient les valeurs  $(l_1 + v_1), (l_2 + v_2) \dots (l_6 + v_6)$

après formation des équations bien connues aux variations des coordonnées:

$$-f + v = a(dx_1 - dx_2) + b(dy_1 - dy_2) \quad (a^2 + b^2 = 1) \quad (1)$$

Cette équation concerne le côté (ou la barre) reliant les sommets de coordonnées provisoires  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$ , tandis que

$$[pvv] = \text{minimum.} \quad (p = \text{poids})$$

Il y a six équations telles que (1) mais seulement cinq inconnues puisque trois variations de coordonnées sur huit sont nulles. En éliminant ces inconnues on trouve la forme connue:

$$[Av] + w_1 = 0 \quad (w_1 = \text{discordance}) \quad (2)$$

ou les  $A_1, A_2 \dots A_6$  sont des coefficients. Cette façon de calculer par l'élimination des variations  $dx, dy$  se conçoit surtout grâce à l'emploi de calculatrices électroniques;  $w$  est fonction des  $f$ . L'équation (2) peut être établie directement.

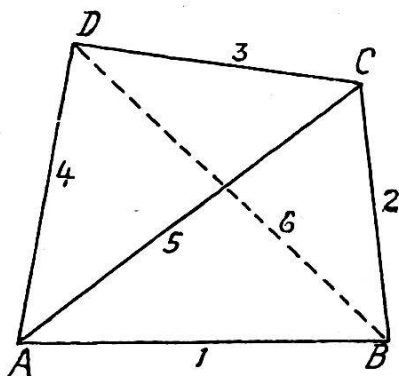


Fig. 1

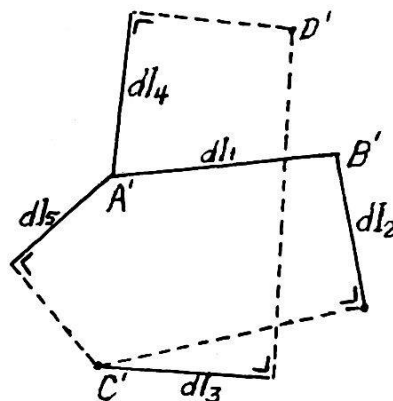


Fig. 2

Continuons à étudier le problème géodésique et, parallèlement, celui qui se pose en statique. A cet effet traçons le graphique des déformations d'après Williot; ce n'est pas le seul. Dans la figure 1 il y a cinq côtés ou barres; la seconde diagonale 6 est tracée pour mémoire. Sous l'action de forces les barres se déforment; il y a des allongements ou raccourcissements  $dl_1, dl_2 \dots dl_5$ . Ces considérations sont aussi valables en géodésie. Par hypothèse le point A ( $A'$  sur le diagramme à grande échelle) est fixe ainsi que la direction AB. Le déplacement  $A'B' = dl_1$  de B est donc parallèle à AB. Le point C est à l'intersection de deux arcs de cercles de rayons respectifs  $(l_2 + dl_2)$  et  $(l_5 + dl_5)$ ; sur la figure 2 on substitue à ces arcs leurs tangentes qui sont perpendiculaires respectivement à  $dl_2$  et  $dl_5$  (tracées en traits courts). On obtient ainsi  $C'$  puis, grâce à une construction analogue, le point  $D'$ . La figure 2 fournit, à une échelle choisie convenablement, l'image des déplacements des sommets ou nœuds en fonction des déformations des côtés ou barres. Dans le langage courant on

dit qu'on a tracé un Williot. Il faut prendre garde aux signes des  $dl$ . Une construction analogue peut être effectuée, non pas avec les  $dl$ , mais avec les  $v$ . Cette méthode est susceptible de rendre aussi des services en géodésie. En statique le Williot intervient dès que le système principal ou isostatique fondamental de référence a été choisi, en d'autres termes, dès que les éléments surabondants dont on veut faire abstraction momentanément ont été supprimés. Cela nous amène à parler, en géodésie comme en statique, de la solution provisoire.

### *Choix de la solution provisoire*

Considérons encore le quadrilatère  $ABCD$  (figure 1) à un élément surabondant; le calculateur a une certaine liberté, car dans les six équations aux variations de coordonnées on peut avoir jusqu'à cinq des  $f$  sur six qui sont nuls. En outre sur les huit variations de coordonnées trois sont nulles et, pour le calcul des ellipses d'erreurs, le choix de ces trois valeurs joue un rôle.

En statique le système se déforme jusqu'à réaliser le travail minimum de déformation; il faut connaître l'état intermédiaire dit isostatique fondamental en supprimant ou coupant une barre sur les six, mais laquelle? Nous verrons dans le second exemple, traité plus loin, que le choix ne comporte pas d'hésitation. Mais dans  $ABCD$  supprimons la diagonale  $BD$  et remplaçons son action par deux forces égales et mutuellement opposées (par exemple:  $\pm 1$  tonne); on sait alors calculer les efforts, c'est-à-dire les déformations, par des voies graphiques (Williot) ou semi-numériques. On en déduit les  $f$ .

En statique la maille  $ABCD$  est souvent inscrite dans un cercle ou à peu près: la formule de Ptolémée est applicable:

$$l_5 l_6 = l_1 l_3 + l_2 l_4$$

$$l_5 dl_6 + l_6 dl_5 \cong l_1 dl_3 + l_3 dl_1 + l_2 dl_4 + l_4 dl_2 \quad (3)$$

Cette formule permettra de calculer un des  $dl$  en fonction des cinq autres. Elle peut rendre bien des services.

### *Travail de déformation minimum*

Si  $T$  désigne la tension dans une barre de section  $S$  connue, normale à la barre, il y a allongement ou raccourcissement

$$dl = \frac{Tl}{ES}. \quad (E = \text{coefficient d'élasticité en tonnes/cm}^2)$$

Pour le travail de déformation ([1], p. 170; [3], p. 278) on a:

$$A = \sum \frac{T^2 l}{2 ES} = \sum \left( \frac{Tl}{ES} \right)^2 \left( \frac{ES}{2l} \right) = \text{minimum}, \quad (4)$$

expression à comparer avec celle connue:

$$[v^2 p] = \text{minimum} \quad p = \frac{ES}{2l}$$

L'identification avec les  $v$  et les  $p$  est immédiate; comme les  $p$  interviennent par leurs valeurs relatives et non absolues, on pose:

$$p = \frac{S}{l}, \text{ et l'on peut avoir: } p = \text{constante.}$$

Dans un même système on a en général:  $E = \text{constante.}$

Mais ici certaines remarques s'imposent: en géodésie les coordonnées et leurs variations sont les réelles inconnues du problème; en statique les coordonnées servent à calculer les coefficients  $a$  et  $b$ , ce qui n'exige pas une grande précision. Les termes absolus  $f$  sont déterminés autrement comme on l'a vu. Les variations  $dx, dy$  pour les nœuds permettent d'exprimer implicitement les déformations en vue de réaliser le principe du travail minimum; ces variations peuvent être éliminées.

Finalement on calcule l'expression connue:

$$m^2 = \frac{[pvv]}{r} \quad (r = \text{éléments surabondants})$$

C'est une notion un peu nouvelle; on pourrait attribuer à  $m$  l'appellation «déformation moyenne quadratique de poids unité».

Ici encore, selon la nature des éléments surabondants, on peut scinder le calcul en deux phases en formant deux groupes d'éléments; on aura alors, les  $v$  étant fractionnés:

$$[pvv] = [pv'v'] + [pv''v'']$$

Cette solution est connue; les variations  $dx, dy$  reçoivent en seconde phase des accroissements  $(dx)$  et  $(dy)$ .

*Seconde application.* Considérons quatre points fixes  $A, B, C, D$  reliés par cinq côtés ou cinq barres par l'intermédiaire des sommets ou nœuds  $P$  et  $P'$  comme le montre la figure 3. Il y a quatre variations de coordonnées et un élément surabondant; ce cas fut traité récemment ([4], p. 311/12); la matrice des coefficients des  $dx, dy, dx', dy'$  est:

+	0,781	+	0,6245	0,00	0,00	poids
-	0,781	+	0,6245	0,00	0,00	1
	0,00	+	1,00	0,00	- 1,00	1
	0,00	0,00	0,00	- 0,781	- 0,6245	1
	0,00	0,00	0,00	+ 0,781	- 0,6245	1

Dans l'expression  $p = \frac{ES}{2l}$  on a admis:  $E = \text{constante, } \frac{S}{l} = \text{const.}$

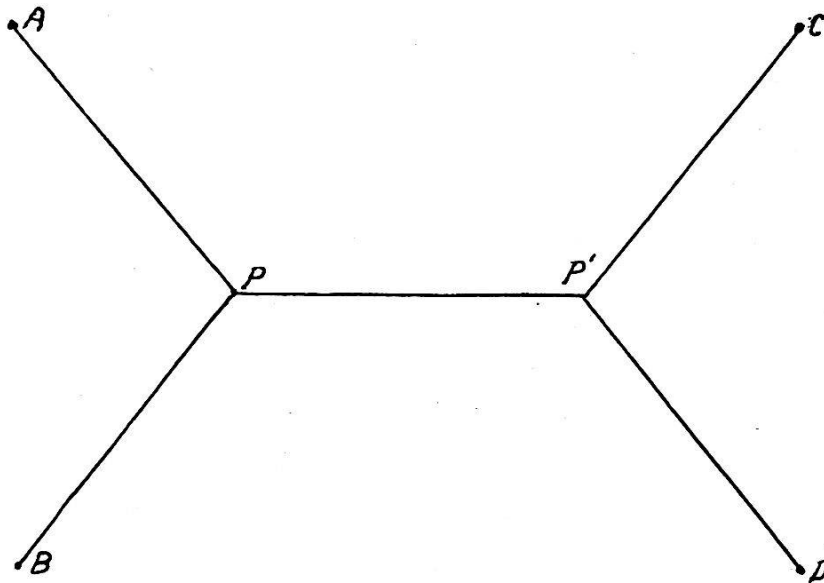


Fig. 3

Ici il n'y a pas d'hésitation à avoir quant au choix de la barre à supprimer et à remplacer par une paire auxiliaire de forces égales et mutuellement opposées; c'est  $PP'$  qu'il y a lieu de couper. Le calcul des  $f$  est aisé (déformations).

En  $P$  et  $P'$  on a des ellipses d'erreur de forme circulaire; statiquement parlant, on dira plutôt ellipses de déformation.

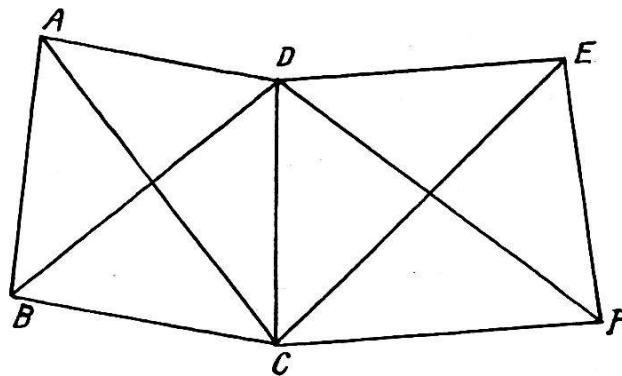


Fig. 4

*Troisième application.* Considérons (figure 4) deux mailles accolées suivant le côté ou la barre  $DC$ . En tout il y a six sommets ou nœuds donc 12 coordonnées dont trois sont arbitraires en général. Ici encore le géodésien pourra être dans l'embarras pour faire un choix; si en un point une variation de coordonnée est nulle, l'ellipse d'erreur se réduit à un petit segment linéaire.

Si les longueurs des côtés  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$  sont respectivement  $l_1$ ,  $l_3$ ,  $l_7$ ,

celles des diagonales  $AC$  et  $BD$  sont  $l_5, l_6$  et les deux autres diagonales  $l_{10}$  et  $l_{11}$ , on a :

$$l_5 l_6 \cong l_1 l_3 + l_2 l_4 \qquad l_{10} l_{11} \cong l_3 l_7 + l_8 l_9$$

les mailles étant inscrites dans un cercle ou à peu près

$$\begin{cases} l_5 dl_6 + l_6 dl_5 \cong l_1 dl_3 + l_3 dl_1 + l_2 dl_4 + l_4 dl_2 \\ l_{10} dl_{11} + l_{11} dl_{10} \cong l_3 dl_7 + l_7 dl_3 + l_8 dl_9 + l_9 dl_8 \end{cases}$$

la valeur commune  $dl_3$  est facile à éliminer surtout si  $l_1 \cong l_7$ .

Le choix des deux barres à supprimer et à remplacer par des paires de forces égales et mutuellement opposées est plus malaisé; le calcul du système statiquement déterminé qui subsiste est influencé par ce choix. Il reste neuf barres, donc pas d'éléments surabondants, état momentané bien entendu. On aura recours par exemple à un Williot; les déformations étant connues à cette étape du calcul, on peut développer les équations aux variations de coordonnées au nombre de 11

$$-f + v = a(dx_1 - dx_2) + b(dy_1 - dy_2) \qquad (a^2 + b^2 = 1)$$

est encore l'équation pour le côté ou la barre joignant les points de coordonnées provisoires  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$ .

Grâce à des éliminations on obtient :

$$[Av] + w_1 = 0 \qquad [Bv] + w_2 = 0 \qquad (6)$$

Les  $v_1, v_2 \dots v_{11}$  n'interviennent pas tous dans chacune de ces équations; celles-ci pourraient être établies directement.

### *Réseaux et systèmes spatiaux*

L'extension à l'espace du problème traité ici est aisée.

L'équation aux variations de coordonnées devient :

$$\begin{aligned} -f + v = a(dx_1 - dx_2) + b(dy_1 - dy_2) + c(dz_1 - dz_2) \\ \text{ou } (a^2 + b^2 + c^2 = 1) \end{aligned} \qquad (7)$$

pour le côté ou la barre reliant les sommets ou les nœuds  $(x_1, y_1, z_1)$  et  $(x_2, y_2, z_2)$ , valeurs provisoires.

Comme cas concret considérons cinq points reliés par 10 côtés spatiaux ou barres, ce qui donne lieu à 10 équations aux variations de coordonnées. En tout il y a 15 coordonnées, mais six de celles-ci sont arbitraires puisque les axes de coordonnées peuvent subir trois translations et trois rotations indépendamment du système. Le choix de ces six éléments n'est pas indifférent; lorsqu'en un point une ou deux variations de coordonnées sont nulles, l'ellipsoïde d'erreur dégénère. Sans cela cette extension du problème à l'espace ne donne pas lieu à des commentaires spéciaux.

## *Résumé*

On peut dire que la géodésie bénéficie des méthodes de la statique pour le calcul des déformations tandis qu'en statique on appliquera parfois avec avantage le principe des moindres carrés. L'emploi de calculatrices électroniques sera souvent le bienvenu.

## *Littérature:*

- [1] *M. Paschoud*, Cours de statique graphique (Lausanne).
- [2] *A. Pirard*, Traité d'hyperstatique (Paris, Dunod).
- [3] *F. Stüssi*, Baustatik I (Bâle, Birkhäuser).
- [4] *A. Ansermet*, Extension du problème de l'ellipse d'erreur (Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie, 1960, N<sup>o</sup>. 9).

## **Zusammenarbeit der Fachleute des Straßenbaues und des Meliorationswesens beim Nationalstraßenbau**

*Von Hans Meyer, Dipl.-Ing., Bern,  
Chef des Eidgenössischen Meliorationsamtes*

Die Mitwirkung der Kulturingenieure, Forstingenieure und Geometer beim Nationalstraßenbau ist bedingt durch die Vorschrift in Artikel 36<sup>bis</sup> der Bundesverfassung, wonach der wirtschaftlich nutzbare Boden nach Möglichkeit zu schonen und den durch die Straßenanlagen entstehenden Nachteilen in der Verwendung und Bewirtschaftung des Bodens durch geeignete Maßnahmen auf Kosten des Straßenbaues entgegenzuwirken ist.

Das Bundesgesetz über die Nationalstraßen vom 8. März 1960 sodann stellt für den Landerwerb das Umlegungsverfahren in den Vordergrund, weil eben dabei gleichzeitig mit der Beschaffung des Straßenareals in der Regel auch die Maßnahmen zum Schutze des wirtschaftlich nutzbaren Bodens getroffen werden können. Diese Aufgaben, insbesondere diejenigen der Landumlegungen, fallen in unseren Tätigkeitsbereich; sie sind aber in enger Zusammenarbeit mit den Fachleuten des Straßenbaues zu lösen. Es wird daher nützlich sein, nachzugehen, wie sich dies in der Praxis abspielt und wie dabei die Rollen verteilt sind.

Eine erste Gelegenheit zur Mitwirkung bestand bei der Trasseplanung, wo im Interesse der schonenden Behandlung des Bodens einerseits und der Vermeidung zu häufiger Kreuzungen andererseits versucht wurde, das Straßentrasse nach Möglichkeit in die Kontaktzone der örtlichen Wirtschaftsräume zu legen.

Eine zweite Phase, jene der generellen Projektierung, ist für einige Strecken bereits erledigt, für weitere aber im Gang oder noch bevorstehend. Eine möglichst frühzeitige Kontaktnahme zwischen den Fachleuten