

**Zeitschrift:** Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

**Band:** 66 (1968)

**Heft:** 6

**Artikel:** Der hyperoskulierende Kegelschnitt der Klothoide

**Autor:** Nádenik, Z.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-222304>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Der hyperoskulierende Kegelschnitt der Klothoide

Z. Nádeník, Prag

## Zusammenfassung

Kurze Herleitung der Konstruktion des hyperoskulierenden Kegelschnittes der Klothoide und Kriterium, wann dieser eine Ellipse beziehungsweise Parabel oder Hyperbel ist. Der hyperoskulierende Kegelschnitt läßt den Ansatz rasch konvergierender Näherungsformeln für Absteckungen von Sehnen und Tangenten der Klothoide zu.

Im folgenden werden für die Klothoide  $K$  mit dem Parameter  $A$  die Bezeichnungen nach Abbildung 1 verwendet. (Wenn  $B$  zwischen  $B_0$  und dem Wendepunkt  $W$  liegt, so ist  $\sigma < 0$ .)

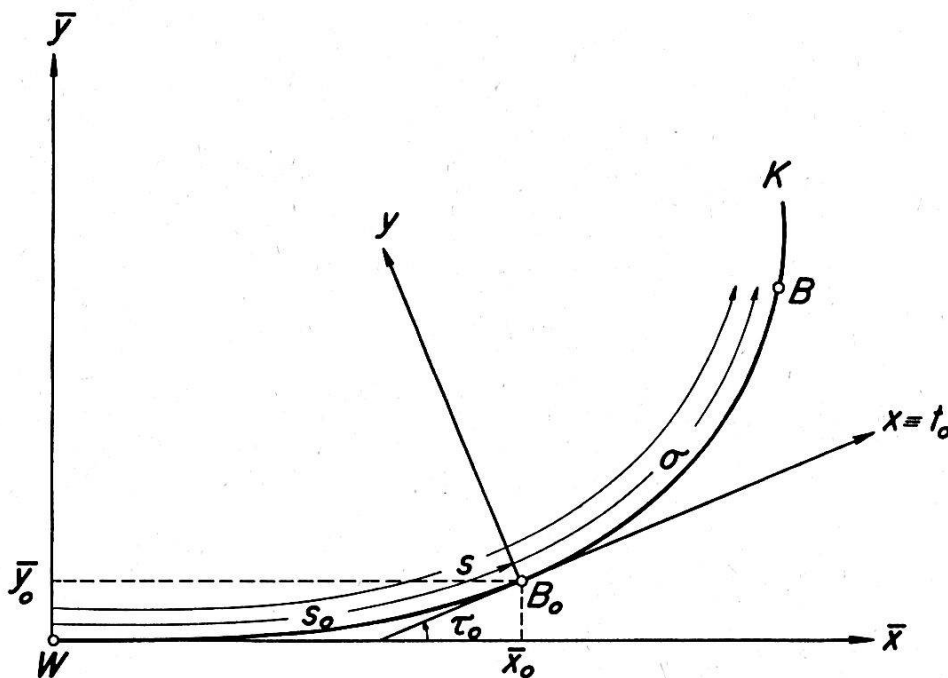


Abb. 1

Die Transformationsgleichungen für die Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  des Punktes  $B$  sind

$$\begin{aligned} x &= (\bar{x} - \bar{x}_0) \cos \tau_0 + (\bar{y} - \bar{y}_0) \sin \tau_0 \\ y &= -(\bar{x} - \bar{x}_0) \sin \tau_0 + (\bar{y} - \bar{y}_0) \cos \tau_0 \end{aligned} \quad (1)$$

Die fundamentale Parameterdarstellung von  $K$  ist:

$$\bar{x} = \int_0^s \cos \frac{l^2}{2 A^2} dl, \quad \bar{y} = \int_0^s \sin \frac{l^2}{A^2} dl \quad (2)$$

Folglich gilt

$$\bar{x}_0 = \int_0^{s_0} \cos \frac{l^2}{2 A^2} dl, \quad \bar{y} = \int_0^{s_0} \sin \frac{l^2}{2 A^2} dl \quad (3)$$

mit  $\tau_0$  im Bogenmaß

$$\tau_0 = s_0^2 / 2 A^2 \quad (4)$$

Nach dem Einsetzen von (2) bis (4) in (1) erhält man

$$\begin{aligned} x &= \int_{s_0}^s \cos \frac{l^2}{2 A^2} dl \cdot \cos \frac{s_0^2}{2 A^2} + \int_{s_0}^s \sin \frac{l^2}{2 A^2} dl \cdot \sin \frac{s_0^2}{2 A^2} \\ &= \int_{s_0}^s \cos \frac{l^2 - s_0^2}{2 A^2} dl \\ y &= \int_{s_0}^s \sin \frac{l^2 - s_0^2}{2 A^2} dl. \end{aligned} \quad (5)$$

Durch die Substitution  $l = \lambda - s_0$  kann man die Integrale rechts in (5) wie folgt umformen:

$$x = \int_0^\sigma \cos \frac{\lambda s_0 + \frac{1}{2} \lambda^2}{A^2} d\lambda, \quad y = \int_0^\sigma \sin \frac{\lambda s_0 + \frac{1}{2} \lambda^2}{A^2} d\lambda; \quad (6)$$

denn bei  $l = s_0$  beziehungsweise  $l = s$  gilt offensichtlich  $\lambda = 0$  beziehungsweise  $\lambda = s - s_0 = \sigma$ .

Entwickelt man die Integranden in (6) nach den bekannten Formeln in Potenzreihen und integriert dann, so ergibt sich

$$x = \sigma - \frac{s_0^2}{3! A^4} \sigma^3 + [4], \quad (7)$$

$$y = \frac{s_0}{2! A^2} \sigma^2 + \frac{1}{3! A^2} \sigma^3 - \frac{s_0^3}{4! A^6} \sigma^4 + [5]$$

Der nicht ausgeartete Kegelschnitt, welcher im Punkt  $B_0$  mit der Klothoide  $K$  eine gemeinsame Tangente hat, besitzt die Gleichung

$$a x^2 + 2 b \times y + c y^2 + 2 y = 0 \quad (8)$$

wo  $a, b, c = \text{konst.}, a = 0$ .

Das formale Einsetzen aus (7) in (8) gibt nach ganz einfachen Umformungen:

$$\begin{aligned} & \sigma^2 \left\{ a + \frac{s_0}{A^2} \right\} + \sigma^3 \left\{ b \frac{s_0}{A^2} + \frac{1}{3 A^2} \right\} + \\ & + \sigma^4 \left\{ -a \frac{s_0^2}{3 A^4} + b \frac{1}{3 A^2} + c \frac{s_0^2}{4 A^4} - \frac{s_0^3}{12 A^6} \right\} + [4] \end{aligned} \quad (9)$$

Folglich hat der Kegelschnitt (8) mit der Klothoide  $K$  im Punkt  $B_0$  eine Berührung 4. Ordnung (das heißt «fünfpunktige» Berührung) dann, und nur dann, wenn

$$a = -\frac{s_0}{A^2}, \quad b = -\frac{1}{3 s_0}, \quad c = \frac{4 A^4 - 9 s_0^4}{9 A^2 s_0^3} \quad (10)$$

Die eingehendere Untersuchung zeigt, daß eine höhere Berührung unmöglich ist. Der Kegelschnitt (8) mit den nach (10) bestimmten Koeffizienten – das heißt der sogenannte *hyperoskulierende Kegelschnitt* – ersetzt die Klothoide in einer Umgebung ihres vom Wendepunkt verschiedenen Punktes  $B_0$  am besten\*.

Der Kegelschnitt (8) ist eine Ellipse beziehungsweise eine Parabel beziehungsweise eine Hyperbel, je nachdem  $b^2 - ac < 0$  beziehungsweise  $= 0$  beziehungsweise  $> 0$ . Dementsprechend ist nach (10) für

$$A \cdot \sqrt[4]{\frac{5}{9}} < s_0 \text{ beziehungsweise } = s_0 \text{ beziehungsweise } > s_0$$

der hyperoskulierende Kegelschnitt  $\kappa_0$  von  $K$  im Punkt  $B_0$  eine Ellipse beziehungsweise Parabel beziehungsweise Hyperbel.

Nach dem Einsetzen aus (10) in (8) kann man die Gleichung des hyperoskulierenden Kegelschnittes  $\kappa_0$  folgendermaßen umformen:

$$y (y - 3 \gamma_0 x) - 9 \tau_0^2 (x^2 + y^2 - 2 R_0 y) = 0 \quad (11)$$

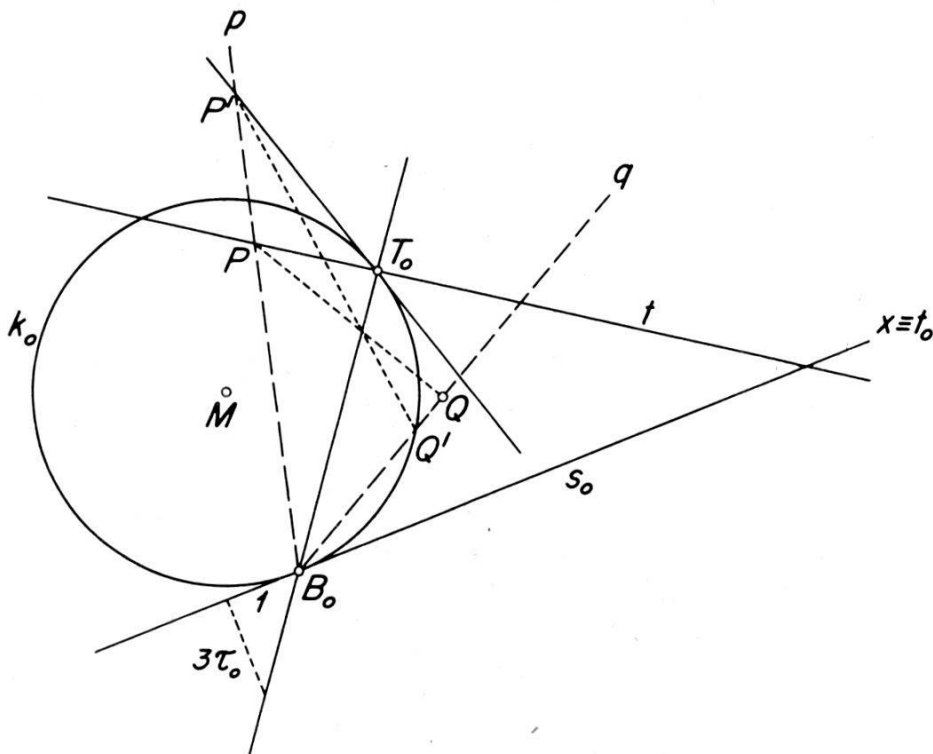
wo

$$R_0 = \frac{A^2}{s_0} \quad (12)$$

\* Literaturhinweis: 4. Abschnitt des Aufsatzes «Über Formeln zur Absteckung von Klothoidenpunkten durch rechtwinkelige Koordinaten ...». Von Z. Nádeník in *Práce ČVUT, IV/2, Praha 1964*.

der Krümmungsradius von  $K$  im Punkt  $B_0$  ist und  $\tau_0$  den durch (4) gegebenen Winkel der Wendetangente mit der Tangente  $t_0$  von  $K$  im Punkt  $B_0$  bezeichnet.

Die Gerade  $y = 3 \tau_0 x$  schneidet den in  $B_0$  konstruierten Krümmungskreis  $k_0$  von  $K$  außer in  $B_0$  noch im Punkt  $T_0$ , welcher nach (11) ein Punkt des hyperoskulierenden Kegelschnittes  $\kappa_0$  ist. Die Tangente  $t$  von  $\kappa_0$  in  $T_0$  hat nach (11) die Gleichung  $x + (\cdot) y - 2 R_0 \tau_0 = 0$ . Die Tangenten  $t$  und  $t_0$  schneiden sich deshalb nach (12) und (4) im Punkt mit der Abszisse  $s_0$ . Aus diesen Angaben kann man schon den Punkt  $T_0$  und die Tangente  $t$  leicht konstruieren (s. Abb. 2).



Die projektive Geometrie der Kegelschnitte bietet nun für den durch den Punkt  $T_0$  mit der Tangente  $t$  und durch den Punkt  $B_0$  mit dem Krümmungskreis  $k_0$  eindeutig bestimmten hyperoskulierenden Kegelschnitt  $\kappa_0$  folgende einfache Konstruktion seiner weiteren Punkte (s. Abb. 2): Es sei  $p$  eine beliebige Gerade, welche durch den Punkt  $B_0$  geht und von der Verbindungslinie  $B_0 T_0$  verschieden ist. Es seien  $P$  und  $P'$  die Schnittpunkte der Geraden  $p$  mit den Tangenten des Kegelschnittes  $\kappa_0$  und des Kreises  $k_0$  im Punkt  $T_0$ . Es sei ferner  $q$  eine beliebige Gerade, welche durch den Punkt  $B_0$  geht und von den Geraden  $t_0$ ,  $p$  verschieden ist; ihre von  $B_0$  verschiedenen Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt  $\kappa_0$  und dem Kreis  $k_0$  bezeichnen wir mit  $Q$  und  $Q'$ . Den gesuchten Punkt  $Q$  von  $\kappa_0$  konstruieren wir unmittelbar aus der Bedingung, daß der Schnittpunkt der Verbindungslinien  $P'Q'$  und  $PQ$  auf der Verbindungslinie  $B_0 T_0$  liegen muß.