Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 67 (1969)

Heft: 5

Artikel: Strecken- und Richtungsgewichte

Autor: Fischer, Werner

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-222991

DK 528.118

Strecken- und Richtungsgewichte

Werner Fischer

Zusammenfassung

Das Problem der Bestimmung der Gewichte bei der Ausgleichung verschiedenartiger Meßgrößen wird behandelt. Es wird gezeigt, daß für jede Meßgröße $p_l = C/m_l^2$ gesetzt werden muß, wie das im Prinzip schon von Helmert gemacht wurde. Im Falle eines konstanten relativen Streckenfehlers kann auch die einfache geometrische Beziehung zwischen dem Längenfehler und dem Querfehler einer Polygonseite benützt werden.

Résumé

On traite le problème de la détermination des poids pour des mesures de différente espèce. Pour chaque sorte de mesures on peut mettre selon Helmert $p_l = C/m_l^2$. En cas de mesures de distance, dont l'erreur relative est constante, on peut profiter de la relation géométrique entre l'erreur longitudinale et l'erreur transversale d'un côté polygonal.

1. Das alte Problem

Bekanntlich hat bei jeder Ausgleichung gemessener Größen die Wahl der dazugehörigen Gewichte einen Einfluß auf das Resultat. Dies gilt besonders, wenn verschiedenartige Meßelemente, wie zum Beispiel Strecken und Richtungen, miteinander verknüpft werden. Das Problem ist nicht neu, hat aber in letzter Zeit aus zwei Gründen erhöhte Bedeutung erhalten. Erstens werden dank der Entwicklung elektronischer Distanzmeßgeräte neben Richtungsmessungen vermehrt Streckenmessungen zur Lösung von Vermessungsaufgaben herangezogen. Zweitens ermöglichen elektronische Rechenanlagen die strenge Behandlung von Ausgleichungsaufgaben. Die Frage nach den zutreffenden Gewichten für Strecken und Richtungen ist deshalb in jüngster Zeit immer wieder aufgegriffen worden [1, 3, 8, 9]. Mit den folgenden Ausführungen soll versucht werden, den ganzen Fragenkreis zusammenhängend zu behandeln.

2. Was sagt Helmert dazu?

Wir gehen nicht fehl, wenn wir uns auch in dieser Frage bei den alten Lehrmeistern der Geodäsie Rat holen. Dabei erstaunt nicht wenig, mit welcher Selbstverständlichkeit dort das Problem angegangen wurde, ja es war offensichtlich überhaupt kein Problem. Bei Helmert [4] suchen wir nämlich vergeblich nach einem Kapitel, das diesem Thema gewidmet wäre. Im vierten Kapitel «Korrelatenausgleichung» behandelt er aber im § 2 «Formelübersicht für die Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

Berechnung des mittleren Fehlers einer Beobachtung vom Gewicht 1. Nichtlineare Bedingungsgleichungen» ein kleines Beispiel, aus dem hervorgeht, was zu tun ist.

Es geht dort um die Ausgleichung eines Dreiecks, in dem zwei Winkel mit dem mittleren Fehler $\pm 20''$ und zwei Seiten mit dem mittleren Fehler $\pm$ 0,05 m gemessen sind, also um einen vereinfachten Fall unserer Problemstellung. Nach der Aufstellung der Bedingungsgleichung schreibt Helmert: «Wir bilden nun die Hilfsgrößen g wie folgt: Es sind die reziproken Werte der Quadrate der in derselben Einheit wie die betreffenden λ ausgedrückten mittleren Fehler:

$$\text{für den Winkel gleich} \quad 1:\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 9$$

$$\text{für die Seiten gleich} \quad 1:\left(\frac{1}{20}\right)^2 = 400\,,$$

wofür wir zur größeren Einfachheit setzen:

für den Winkel gleich 10, für die Seiten gleich 400,

so daß also ist:

$$\text{für die Winkel } g_1 = g_2 = 1$$

$$\text{für die Seiten } g_3 = g_4 = 40\,.\text{»}$$

Die Hilfsgrößen g, die wir heute allgemein als Gewichte p bezeichnen, definiert Helmert am Schluß des zweiten Kapitels «Mehrfache Bestimmung einer Größe» als reziproken Wert des mittleren Fehlerquadrates μ^2. In unserer Schreibweise gilt also für eine Beobachtung l

$$p_l = \frac{1}{\mathrm{m}_l^2}\,.$$

Für die Verbesserungen λ [in der heute üblichen Bezeichnungsweise v] wählte Helmert die Einheiten Minuten und Meter, weshalb er für den mittleren Fehler des Winkels $\pm 1/3'$, für den mittleren Fehler der Seiten $\pm$ 1/20 m setzt.

3. Ein weiteres klassisches Beispiel

Bei Jordan [5] tritt das Problem auch mehr beiläufig im § 49 «Ausgleichung der Winkel und Seiten eines ebenen Dreiecks» auf, in dem ein Dreieck mit drei gemessenen Winkeln und drei gemessenen Seiten bedingt ausgeglichen wird. Die Beobachtungen haben folgende mittlere Fehler:

$$m_\alpha = m_\beta = m_\gamma = \pm 7'',$$

$$m_a = \pm 8\text{ mm},\ m_b = \pm 12\text{ mm},\ m_c = \pm 5\text{ mm}\,.$$

Die mittleren Fehlerquadrate erhalten wegen der Unsicherheit der mittleren Fehler gerundete Werte:

$$m_\alpha^2 = m_\beta^2 = m_\gamma^2 = 50\,,$$

$$m_a^2 = 75,\ m_b^2 = 150,\ m_c^2 = 25\,.$$

Darauf werden «für die Gewichte, die ja nur relative Bedeutung haben, die folgenden Werte» angenommen:

$$p_\alpha = p_\beta = p_\gamma = \frac{1}{2}\,,$$

$$p_a = \frac{1}{3}\,,\quad p_b = \frac{1}{6}\,,\quad p_c = 1\,.$$

Auch hier wird also wie bei Helmert nicht direkt

$$p_l = \frac{1}{m_l^2}$$

gesetzt; vielmehr wird dem Umstand Rechnung getragen, daß die Gewichte Relativzahlen sind und mit einem beliebigen Faktor erweitert werden können. Jordan schreibt dazu: «Wir wollen uns hierbei merken, daß dem Gewicht 1 der mittlere Fehler ± 5 entspricht.» Diesen mittleren Fehler der Gewichtseinheit bezeichnen wir heute meist mit m_0; mit seiner Hilfe läßt sich aber das Gewicht definieren als

$$p_l = \frac{m_0^2}{m_l^2}\,.$$

Das Gewicht einer Beobachtung l ist also das Verhältnis des Fehlerquadrates einer Beobachtung mit dem Gewicht 1 zum Fehlerquadrat der betreffenden Beobachtung. Dies gilt für verschiedenartige Beobachtungen genauso wie für gleichartige. Im Falle verschiedenartiger Beobachtungen ist aber noch der folgende Abschnitt im «Jordan» zu beachten: «Bei der Gewichtsbestimmung verschiedenartiger Größen, wie der Winkel und Längen im vorliegenden Falle, ist für zweckmäßige Wahl der Einheiten der mittleren Fehler Sorge zu tragen. Wir haben hier die Sekunde und das Millimeter gewählt, was an sich nicht unbedingt notwendig wäre. Wenn wir jedoch zum Beispiel die mittleren Fehler in Minuten und Millimetern ausgedrückt hätten, so wären die Gewichte derartig ungleich geworden, daß sie zu einer unbequemen Zahlenrechnung geführt hätten.»

4. Netze mit verschiedenartigen Meßgrößen

In der neuesten Ausgabe des «Handbuchs der Vermessungskunde» von Jordan/Eggert/Kneissl wird im Band I «Mathematische Grundlagen, Ausgleichungsrechnung und Rechenhilfsmittel» das Problem der verschiedenartigen Beobachtungen nicht angeschnitten. Hingegen ist es im Band VI «Die Entfernungsmessung mit elektro-magnetischen Wellen und ihre geodätische Anwendung» [6] im § 98 «Netze mit verschiedenartigen Meßgrößen» ausführlich behandelt. Der Abschnitt über das Ausgleichungsprinzip und den Gewichtsansatz stützt sich auf einen Vortrag von Prof. Wolf [13] am Internationalen Kurs für Streckenmessung in München vom Oktober 1957. «Bezeichnen p_l die Gewichte der Meßgrößen l [zum Beispiel Strecken s, Richtungen r usw.], welche wir mit Hilfe der a priori ermittelten oder geschätzten mittleren Fehler m_l der Meßgrößen bestimmen,

$$p_l = \frac{C}{m_l^2},$$

so muß die Ausgleichung nach der Forderung

$$[p_l v_l v_l] = \left[\frac{C v_s v_s}{m_s^2}\right] + \left[\frac{C v_r v_r}{m_r^2}\right] + \ldots\ldots = \text{Min.}$$

erfolgen. Darin ist C eine für alle Meßgrößen gleiche Konstante, und die mittleren Fehler m_l müssen in der gleichen Einheit ausgedrückt werden wie die Verbesserungen v_l.»

Vergleichen wir diese Formulierung für p_l mit der von Jordan übernommenen, sehen wir sofort, daß die Konstante C nichts anderes ist als das Quadrat des Gewichtseinheitsfehlers m_0. Die Konstante C ist an sich frei wählbar, wird aber eindeutig festgelegt, sobald wir das Gewicht einer bestimmten Beobachtung, zum Beispiel einer Richtung, mit 1 bezeichnen. Die Bestimmung zutreffender Gewichte für verschiedenartige Meßgrößen setzt also stets die Kenntnis des mittleren Fehlers a priori dieser Meßgrößen voraus. Das Problem ist somit genau dasselbe wie bei gleichartigen Beobachtungen mit unterschiedlicher Genauigkeit.

5. Die Kontrolle der Annahmen auf Grund des Resultats der Ausgleichung

Nach Durchführung der Ausgleichung werden wir wie üblich $[pvv]$ und den mittleren Fehler der Gewichtseinheit m bilden. Im Beispiel von Jordan [5] wird

$$m = \sqrt{\frac{179{,}93}{3}} = \pm\, 7{,}75\,.$$

Der Kommentar hiezu lautet: «Bei der Festsetzung der Gewichte waren wir davon ausgegangen, daß dem Gewicht 1 der mittlere Fehler $\pm\, 5$ entspricht. Der soeben gefundene Wert von m sollte bei richtiger Annahme der mittleren Fehler hiermit übereinstimmen, indessen ist der Unterschied nicht erheblich, da der Berechnung von m bei der geringen Zahl der v keine allzugroße Sicherheit beigemessen werden kann, anderseits auch die a priori angenommenen mittleren Fehler nicht sehr genau sind.»

Dem ist nichts beizufügen. Auf die Berechnung der mittleren Fehler der einzelnen Meßgrößen, die sich nun leicht nach der Umkehrung

$$\overline{m}_l = \frac{m}{\sqrt{p_l}}$$

bewerkstelligen ließe, wurde verzichtet, da anschließend das wichtigere Problem, die Bestimmung des Gewichts des ausgeglichenen Winkels α, behandelt wurde.

Anders bei Helmert [4], der auf den Begriff des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit verzichtete und aus $[pvv]$ direkt den mittleren Fehler der Beobachtungen ableitete:

$$\text{m.F. der Winkelbeobachtung} = \pm \sqrt{0{,}00924} = \pm\, 0{,}096 = \pm\, 6'' ,$$

$$\text{m.F. der Seitenbeobachtung} \;\; = \pm \sqrt{\frac{0{,}00924}{40}} = \pm\, 0{,}015 \text{ m} ,$$

wozu er bemerkte: «Jedoch ist diese Bestimmung sehr unsicher, daher eine Übereinstimmung mit den Schätzungen [der mittleren Fehler a priori] nicht zu erwarten ist.»

6. Ein neueres Beispiel zur Veranschaulichung

Bei großen und stark überbestimmten Netzen ist es hingegen sehr wohl möglich, zuverlässige Werte für die mittleren Fehler der verschiedenen Meßgrößen abzuleiten und diese mit den entsprechenden mittleren Fehlern a priori zu vergleichen. Das hat zum Beispiel Aeschlimann [1] gemacht, indem er aus dem mittleren Fehler der Gewichtseinheit $m = \pm\, 14{,}5$ folgende mittlere Beobachtungsfehler abgeleitet hat:

Beobachtung	Instrument	m.F. a priori	Gewicht	m.F. aus Ausgl.
Richtungen	DKM 3	$\pm\ 2^{cc}$	10,0	$\pm\ 4{,}6^{cc}$
	T2	$\pm\ 4^{cc}$	3,0	$\pm\ 8{,}4^{cc}$
	DK-RT	$\pm\ 60^{cc}$	0,01	$\pm\ 145^{cc}$
Strecken	NASM 4B	± 10 mm	0,4	± 23 mm
	DK-RT	± 20 mm/100 m	0,1	± 46 mm/100 m

Das Resultat der Ausgleichung ist nicht so gut ausgefallen, wie aus den mittleren Fehlern a priori erwartet worden wäre, indem die Beobachtungsfehler rund doppelt so groß wurden. Der Grund dafür dürfte darin zu suchen sein, daß es sich um Messungen von Studenten handelt, während sich die Gewichte auf Erfahrungswerte stützen, die von geübten Beobachtern erreicht werden. Zudem bewirken erfahrungsgemäß die meisten Ausgleichungen eine Vergrößerung des mittleren Fehlers, da durch die Verknüpfung verschiedenartiger Beobachtungen miteinander sich weitere Einflüsse bemerkbar machen als bei den einzelnen Beobachtungen allein.

Das Größenverhältnis der Beobachtungsfehler kann allerdings einfacher abgeleitet werden, wenn direkt die mittleren Gewichtseinheitsfehler betrachtet werden. Für die Gewichtsberechnung nach $p_i = C/m_i^2$ wurde in [1] offenbar die Konstante $C = 40$ benützt, was dort nicht erwähnt wurde. Der zugrundegelegte Gewichtseinheitsfehler ist also

$$m_0 = \sqrt{C} = \sqrt{40} = \pm 6{,}3 \, .$$

Aus der Ausgleichung ergab sich $m = \pm 14{,}5$, so daß das Verhältnis der mittleren Fehler der Gewichtseinheit

$$\frac{m}{m_0} = \frac{14{,}5}{\sqrt{40}} = 2{,}3$$

wird. Die einzelnen Beobachtungsfehler stehen nun im selben Verhältnis zu ihren mittleren Fehlern a priori, abgesehen von kleinen Unterschieden, die von der Rundung der Gewichte herrühren.

7. Waren die eingeführten Gewichte richtig?

Trotz der verallgemeinernden Erklärungen werden wir uns gerade bei diesem Beispiel [1] die Frage stellen müssen, weshalb die Ausgleichung eine derartige Vergrößerung der Beobachtungsfehler zur Folge hatte. Es wäre ja sehr wohl denkbar, daß nur eine oder nur ein Teil der verschiedenen Meßgrößen schlechter war, als ursprünglich geschätzt. Aeschlimann bemerkt denn auch dazu: «Obwohl prinzipiell streng, ist die Ausgleichung trotzdem nicht frei von einer gewissen Willkür, da die Gewichtseinführung sich auf Erfahrungswerte von Genauigkeiten der Meßinstrumente beziehen, welche wohl von geübten Beobachtern in den meisten Fällen erreicht werden, jedoch im vorliegenden Beispiel nicht innegehalten worden sind. Es könnte nun eine weitere Ausgleichung mit verbesserten Gewichten angesetzt werden, doch ändern sich dadurch die interessierenden Unbekannten nur unwesentlich.» Den letzten Nachsatz könnte man immerhin in Frage stellen, so daß vorerst einmal das Problem zu lösen wäre, die erforderlichen verbesserten Gewichte herzuleiten.

8. Eine bewährte Methode zur Überprüfung der Gewichtsannahmen

Zu diesem Zweck ziehen wir wieder einmal Helmert [4] hervor, der im fünften Kapitel «Untersuchung der Beobachtungsfehler» im § 4 «Prüfung und Verbesserung der Gewichtsannahmen» auf das Problem eingeht. Wir begnügen uns mit dem dort angegebenen «Näherungsverfahren», zu dem er einleitend schreibt: «Eine Untersuchung darüber, ob die

Beobachtungen mit richtigen Gewichten in die Ausgleichung eingeführt sind, ist sehr wichtig, weil bei falschen Gewichtsannahmen die Ausgleichung nicht die besten Werte ergibt.» Nach Helmert kann man nun «in der Weise vorgehen, daß man ermittelt, ob die durchschnittlichen Werte der λ^2 [bei uns der v^2] im umgekehrten Verhältnisse der angenommenen Gewichte stehen. Bei erheblichen Abweichungen ist eine neue Ausgleichung vorzunehmen mit Gewichten, die dem umgekehrten Verhältnisse jener Durchschnittsfehlerquadrate genügend entsprechen.»

Als Beispiel für dieses Vorgehen führt Helmert die trigonometrischen Höhenmessungen am Gotthardtunnel von Koppe an mit «27 Bestimmungen für 9 Unbekannte. Die Gewichte g [$= p$] waren gleich $100 : s^2$ gesetzt, mit s als Distanz in km. Die Bildung von drei Gruppen $[\lambda\lambda]$ [$= [vv]$] ergab, daß $g = 100^2 : s^4$ besser ist.»

[Die Zahlen dieses sehr instruktiven Beispiels seien hier in Tabellenform wiedergegeben.

Ansatz	$p = 100 : s^2$			$p = 100^2 : s^4$		
Anzahl	p	$[pvv]$	Durchschn.	p	$[pvv]$	Durchschn.
8	1	6510	814	1	6 510	814
8	2–5	1617	202	4–25	6 790	849
11	6–60	972	88	36–3600	14 034	1276

Abschließend bemerkt Helmert dazu: «Bedenkt man, daß eine neue Ausgleichung mit den vergrößerten Gewichten die entsprechenden λ [$= v$] verkleinern wird, so dürften die drei Gruppen wohl sehr nahe gleiche Durchschnittswerte $[\lambda\lambda g]$ [$= [pvv]$] geben.»

Natürlich können wir auch, wie hier angedeutet, sogleich mit den ursprünglichen Gewichten p die durchschnittlichen Werte der $[pvv]$ bilden und miteinander vergleichen oder, was auf dasselbe herauskommt, aus diesen $[pvv]$ für jede Gruppe den Gruppeneinheitsfehler [2]:

$$m_g = \sqrt{\frac{[pvv]_g}{n_g} \cdot \frac{n}{n-u}} \quad \left\{ \begin{array}{ll} n & = \text{Anzahl Beobachtungen des Netzes} \\ n_g & = \text{Anzahl Beobachtungen der Gruppe} \\ u & = \text{Anzahl notwendige Beobachtungen} \end{array} \right.$$

Der Faktor $\frac{n}{n-u}$ vergrößert die mittleren Fehlerquadrate aller Gruppen um einen konstanten Betrag, um sie mit dem m^2 der Gesamtheit vergleichbar zu machen. Für die Bildung der neuen Gruppengewichte ist er aber bedeutungslos, weshalb er zum Beispiel bei Wolf [15], Formel (436,11), weggelassen wird.

Die Ausgleichungsrechnung ist so zu einer Iterationsaufgabe geworden, wobei auch hier wieder gesagt werden muß, daß dies nicht nur für verschiedenartige Meßgrößen zutrifft, sondern für alle Messungen, die nicht als gleich genau angesprochen werden können (vgl. Wolf [15], Abschnitt 436 «Gruppengewichte»). Eine wichtige Voraussetzung dafür, daß die Iteration zu einer vernünftigen Lösung führt, besteht allerdings darin, daß die Beobachtungen genügend stark miteinander verknüpft sind. Ist dies nämlich nicht der Fall, können wir uns leicht vorstellen, daß Beobachtungen mit großen Verbesserungen ein kleineres Gewicht erhalten, auf Grund desselben wieder größere Verbesserungen und damit wieder ein kleineres Gewicht usw., bis sie zuletzt die Widersprüche zur Hauptsache allein tilgen müssen, während andere Beobachtungen fast keine Verbesserung erhalten. Diesem «Abgleiten» der Ausgleichung können wir dadurch begegnen, daß wir die Gruppen groß genug wählen.

So wurde zum Beispiel das Bodensee-Testnetz «Österreich–Schweiz–Deutschland» [14] mit 564 beobachteten Richtungen in vier etwa gleich große Teilnetze aufgegliedert. Die vier Gruppengewichte (1,00; 0,57; 0,31; 0,34) wurden vorerst aus den mittleren Fehlern der je für sich allein gleichgewichtig ausgeglichenen Teilnetze abgeleitet. Aus den Verbesserungen der Gesamtausgleichung wurden dann die verbesserten Gruppengewichte (1,11; 0,46; 0,28; 0,38) bestimmt. Auf eine eigentliche Iteration wurde bisher verzichtet, hingegen wurde noch eine weitere Gesamtausgleichung durchgeführt, bei der die Beobachtungen aller vier Teilnetze mit dem gleichen Gewicht versehen wurden. Aus den Verbesserungen dieser Variante, die mir von Prof. Wolf bzw. vom Institut für Angewandte Geodäsie in Frankfurt am Main freundlicherweise zur Verfügung gestellt worden sind, habe ich die (auf die gleiche Gewichtssumme bezogenen) Gruppengewichte (1,03; 0,46; 0,31; 0,41) abgeleitet. Aus diesen Zahlen kann der Schluß gezogen werden, daß die Gruppengewichte weitgehend durch die Beobachtungen in den vier Teilnetzen bestimmt sind, unabhängig von den Gewichten a priori. Eine Iteration führt also bei dieser Wahl der Gruppen sehr rasch zum Ziel.

Nun liegt im «Zeitalter der Automatisierung» der nächste Schritt eigentlich auf der Hand. Wir können unser Rechenprogramm für die vermittelnde Ausgleichung derart ausbauen, daß für anfänglich vorgegebene Gruppen von Beobachtungen die durchschnittlichen Werte für $[pvv]$ gebildet werden. Streuen diese Werte stärker als der normalen Verteilung der Beobachtungsfehler entsprechend, werden die Gewichte sinngemäß geändert, und die Ausgleichung wird anschließend mit den neuen Gewichten wiederholt usw. Selbstverständlich müssen die Ergebnisse der einzelnen Schritte in einem Protokoll festgehalten werden, damit wir nachträglich feststellen können, ob und bis zu welchem Schritt das Verfahren richtig funktioniert hat; bei allfälligem Versagen müßte die Gruppeneinteilung geändert werden. Eine Hauptschwierigkeit besteht vermutlich in der Programmierung des Abbruchkriteriums, doch dürfte auch für diese Aufgabe eine der Fehlertheorie gerecht werdende Lösung gefunden werden.

10. Wie steht es um die Dimensionen bei verschiedenartigen Meßgrößen?

Eine etwas heikle Frage, die sich nun ausschließlich auf die Behandlung verschiedenartiger Meßgrößen beschränkt, stellt sich bei der Wahl der Dimensionen. Wie wir gesehen haben, wurde diese meist ganz beiläufig erledigt, indem lediglich festgehalten wurde, daß für den mittleren Fehler a priori bei der Bildung des Gewichtes und für die Verbesserungen einer bestimmten Meßgröße die gleiche Einheit gewählt werden muß. Betrachten wir nochmals die Definition

$$p_l = \frac{C}{m_l^2},$$

in der C eine für alle Meßgrößen gültige Konstante ist. An sich kann C irgendeine Dimension annehmen, wenn sie nur für alle p_l gleich ist. Wird sie zum Beispiel derjenigen eines der auftretenden m_l^2 gleichgesetzt, so wird das Gewicht der entsprechenden Beobachtungen dimensionslos. Im Hinblick auf die Gleichbehandlung aller Beobachtungen ist es aber eher gegeben, C als eine dimensionslose Größe einzuführen. Weil nun m_l je nach Meßgröße in Längenmaß (z.B. dm) oder in Winkelmaß (z.B. ″) oder in einem andern Maß (entsprechend der Wahl der Maßeinheit für die Verbesserungen v_l) gegeben ist, erhält damit das Gewicht p_l die Dimension $[1/\text{dm}]^2$ oder $[1/'']^2$ usw.

Somit besteht ein grundsätzlicher Unterschied gegenüber der Behandlung gleichartiger Messungen, bei denen p_l das Verhältnis m_0^2/m_l^2 zweier in der gleichen Dimension ausgedrückter Fehlermaße m_0^2 und m_l^2 bedeutet und daher eine dimensionslose Größe wird, für die entsprechend der Ableitung aus der allgemeinen Mittelbildung der sehr naheliegende Begriff «Gewicht» geprägt wurde. Liegen hingegen ungleichartige Messungen vor, läßt sich der von der Dimension der Beobachtungen abhängige Ausdruck für p_l nicht mehr schlechthin als «Gewicht» bezeichnen, da seine Funktion eine ganz andere ist. So hat zum Beispiel Helmert die Bezeichnung «Gewicht» sehr vorsichtig angewandt, indem er im Abschnitt «Verallgemeinerung der Bedeutung der Gewichtszahlen» [4], Seite 98, schrieb: «Wir können nun auch die Benennung der λ und μ [in unserer Schreibweise der v und m im Ausdruck $[\lambda^2/\mu^2] = \text{Min.}$] ohne Fehler wegstreichen und für die jetzt absoluten Zahlen μ_1^2, μ_2^2, μ_3^2, ... durch Vergleichung mit einer passend gewählten Zahl μ^2 andere Zahlen $g_1, g_2, g_3, \ldots$ einführen, genau so, als sollten Gewichte berechnet werden.» Es wäre vielleicht angezeigt, bei der Behandlung ungleichartiger Beobachtungen einen zutreffenderen Begriff für p_l zu prägen, wie etwa Standardisierungs-, Normierungs- oder Homogenisierungsfaktor.

Die Wirkung dieser vorläufig unbenannten Größe p_l ist eigentlich sehr einleuchtend und wird in [6] wie folgt umschrieben: «Benutzen wir homogenisierte Verbesserungen $\bar{v}_l = \sqrt{p_l} \cdot v_l$, so ergeben sich dimensionslose Verbesserungsgleichungen, und wir brauchen uns während der weiteren Rechnung um die Frage der verschiedenen Dimensionen nicht zu kümmern.»

Am Schluß der Ausgleichung werden wir uns nochmals mit den Dimensionen befassen müssen, nämlich bei der Berechnung des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit

$$m = \sqrt{\frac{[p_l v_l v_l]}{n-u}} = \sqrt{\frac{[p_s v_s v_s] + [p_r v_r v_r] + \dots}{n-u}}.$$

Nach Definition werden alle Glieder der Fehlerquadratsumme dimensionslos und somit auch der mittlere Fehler der Gewichtseinheit, wie denn auch im Beispiel von Jordan [5] ganz schlicht $m = \pm 7{,}75$ steht. Die mittleren Fehler der Beobachtungsgrößen erhalten wir aber automatisch wieder in ihrer richtigen Dimension, da nach

$$\overline{m}_l = \frac{m}{\sqrt{p_l}}$$

der Gewichtseinheitsfehler m durch eine Größe mit der Dimension [1/dm] oder [1/″] usw. dividiert wird.

11. Das Gewicht sei von einem bekannten Fehlergesetz abhängig

Wir wollen auch die Möglichkeit betrachten, das Gewicht einer Meßgröße nicht auf Grund ihres mittleren Fehlers a priori, sondern auf Grund eines vorgegebenen Fehlergesetzes zu bestimmen, wobei wir uns an die Ausführungen in Jordan/Eggert/Kneissl [6] halten. «Bei einer gemeinsamen Ausgleichung von Strecken und Richtungen wird es im allgemeinen zulässig sein, den beobachteten Richtungen a priori den gleichen mittleren Fehler, also das gleiche Gewicht zuzuordnen und dieses als Gewichtseinheit anzunehmen. Wir können in diesem Fall die Konstante C aus den Beziehungen

$$p_r = \frac{C}{m_r^2} = 1\,, \qquad p_s = \frac{C}{m_s^2}$$

eliminieren. Führen wir noch den relativen Fehler der Streckenmessung

$$\frac{m_s}{s} = \frac{1}{\mu}$$

ein, so erhalten wir für die Streckengewichte die Formel:

$$p_s = \left(\frac{m_r}{m_s}\right)^2 = \left(\frac{\mu}{s}\right)^2 \cdot m_r^2 .$$

Aus physikalischen Gründen ist die Annahme eines proportional mit der Entfernung zunehmenden mittleren Fehlers plausibel. Hierfür werden relativer Fehler und μ Konstante und das Streckengewicht verkehrt proportional zum Quadrat der Entfernung, so daß die Gewichte

$$p_r = 1 , \qquad p_s = \frac{C'}{s^2} , \qquad C' = (\mu \cdot m_r)^2$$

in die Ausgleichung einzuführen sind.»

Obschon «aus physikalischen Gründen die Annahme eines proportional mit der Entfernung zunehmenden mittleren Fehlers plausibel» ist, ließen sich auch andere Gesetzmäßigkeiten anwenden. Dies ist gelegentlich auch gemacht worden, so zum Beispiel bei der Ausgleichung der Richtungen und Strecken im Testnetz Graz [6, 10, 11]. Im Anschluß an solche Ausgleichungen mit verschiedenen Annahmen ist aber wiederum eine Überprüfung der Gewichte nach dem von Helmert angegebenen Verfahren angezeigt. Sie gibt ein zuverlässigeres Kriterium für die günstigste Gewichtsannahme als der Vergleich der mittleren Fehler der ausgeglichenen Größen.

12. Die Beziehung zwischen dem Längs- und dem Querfehler einer Polygonseite ist nur bedingt anwendbar

Vielfach wird für die Gewichtsfestlegung von Strecken und Richtungen das Verhältnis zwischen dem Längsfehler und dem Querfehler von Polygonseiten herangezogen. Dieses Vorgehen soll deshalb auch noch erwähnt werden, wobei wir der Darstellung von Gleinsvik [3] folgen. Da es sich auch beim Querfehler um einen mittleren Fehler handelt, wollen wir aber konsequenterweise dafür m_q statt q setzen und zudem die Reihenfolge der Beziehungen $m_s = f(m_q) = f(m_\alpha)$ umstellen. «Eine generelle Verbindung zwischen der Genauigkeit der Winkel und Seiten läßt sich mittels der Beziehung

$$m_s = t \cdot m_q = t \cdot \frac{s}{\varrho} \cdot m_\alpha$$

herstellen, wobei m_q den durch den Winkelfehler m_α erzeugten Querfehler, das heißt die lineare Genauigkeit der Winkelmessung darstellt, während

t eine Konstante ist, über welche wir frei verfügen können. Auf Grund dieser Beziehung lassen sich die Gewichte von α und s miteinander verknüpfen.»

Gleinsvik berücksichtigt in der Folge den Proportionalitätsfaktor t nicht mehr oder setzt ihn stillschweigend gleich 1. Wir wollen ihn aber weiter in Betracht ziehen und finden für die Gewichte p_r (wenn wir anstelle der Winkel α wieder auf die Richtungen r zurückgehen) und p_s nach Definition

$$p_r = \frac{C}{m_r^2}, \qquad p_s = \frac{C}{m_s^2} = \left(\frac{\varrho}{t \cdot s}\right)^2 \cdot \frac{C}{m_r^2}.$$

Setzen wir $p_r = 1$ für die Richtungsbeobachtung r, so wird

$$p_s = \left(\frac{\varrho}{t \cdot s}\right)^2 = \frac{C'}{s^2}, \qquad C' = \left(\frac{\varrho}{t}\right)^2.$$

Wir erhalten somit für p_s den gleichen Ausdruck wie bei der Herleitung nach Jordan/Eggert/Kneissl [6], bei der ein konstanter Relativfehler angenommen wurde. Wenn wir die hier zugrundegelegte Beziehung zwischen m_s, m_q und m_r bzw. m_α betrachten, sehen wir aber, daß darin ebenfalls die Voraussetzung mit eingeschlossen ist, daß der Streckenfehler linear mit der Streckenlänge zunimmt. Die beiden Ausdrücke für C' lassen sich einander gleichsetzen, und aus der Beziehung

$$\left(\frac{\varrho}{t}\right)^2 = (\mu \cdot m_r)^2$$

findet man schließlich den Wert des Proportionalitätsfaktors t. Er wird zum Beispiel [6] für $\mu = 10^5$ und $m_r = \pm 2^{cc}$

$$t = \frac{\varrho}{\mu \cdot m_r} = \frac{636\,620}{100\,000 \cdot 2} \approx 3\,;$$

das heißt, der Streckenfehler ist hier rund dreimal so groß wie der Querfehler. Für andere Annahmen für μ und m_r können wir die entsprechenden Werte bei Steiner [12] finden, wo in der Tabelle 8 das relative Genauigkeitsverhältnis R (wie es dort genannt wird) für relative Winkel- und Streckenfehler zwischen 1:50000 und 1:1000000 zusammengestellt ist. Unter der Voraussetzung einer konstanten relativen Streckengenauigkeit können wir also den mittleren Streckenfehler in direkte Beziehung zum mittleren Richtungsfehler setzen.

Sobald wir aber ein anderes Fehlergesetz für die Strecken annehmen müssen, ist der Fall nicht mehr so einfach. So hat auch Gleinsvik [3] bei der Ausgleichung eines Polygonnetzes die Gewichte stillschweigend nach der allgemeinen Beziehung $p_l = C/m_l^2$ gebildet, nachdem seine Genauigkeitsabschätzung für die Strecken keinen konstanten Relativfehler, sondern den mittleren Fehler $m_s = \text{Konst.}\ \sqrt{s}$ gebracht hatte.

13. Einige abschließende Bemerkungen

Zusammenfassend läßt sich festhalten, daß auch bei verschiedenartigen Meßgrößen das Gewicht einer Beobachtung nach der allgemeinen Definition $p_l = C/m_l^2$ gebildet werden kann. Im Gegensatz zum Fall der gleichartigen Beobachtungen ist p_l allerdings kein dimensionsloser Faktor, den man seinem Ursprung gemäß als Gewicht bezeichnet. Es hat vielmehr eine Dimension, die von derjenigen der betrachteten Meßgröße abhängt. Wenn man jedoch die Fehlergleichungen homogenisiert, das heißt mit $\sqrt{p_l}$ multipliziert, werden sie aus diesem Grund dimensionslos, und die Ausgleichung ist auf eine solche von bloßen Zahlen zurückgeführt.

Wie zur Bestätigung der hier vorgelegten Zusammenstellung erschien kürzlich eine umfassende Arbeit von Rainsford [9] über das Prinzip der vermittelnden Ausgleichung von Winkeln und Strecken. Darin sind zwei Basisvergrößerungsnetze (Ridgeway und Caithness), deren Seiten mit dem Tellurometer gemessen worden sind, in aller Ausführlichkeit behandelt. Dabei stellte sich auch hier das Problem, möglichst zutreffende Gewichtsansätze für Winkel und Strecken zu finden. Zu dessen Lösung wurden mehrere Ausgleichungen mit verschiedenen mittleren Fehlern für Winkel und Strecken durchgerechnet, bis der Durchschnittswert $[pvv]/n_g$ für Winkel und Strecken ungefähr gleich groß wurde. Zudem sollte die Bedingung

$$[pvv] = n_c\ (= \text{der Anzahl der Bedingungen} = n - u)$$

durch entsprechende Wahl der Gewichte möglichst gut erfüllt werden. Dies heißt nichts anderes, als daß nach der Ausgleichung

$$m = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-u}} \approx 1$$

werden sollte, nachdem für die Bildung der Gewichte $C = m_0^2 = 1$ gesetzt worden war. Als Besonderheit kann dabei vermerkt werden, daß $[pvv]$ und somit auch m stets zu klein wurde, weil auf Grund allgemeiner Angaben über die Genauigkeit von Tellurometer-Messungen p_s zu klein eingeführt worden war. Die Ausgleichungen haben so den Beweis erbracht, daß die Messungen ausnahmsweise besser waren als ihr Ruf.

Rainsford führt übrigens auch noch eine lange Liste von Literatur auf, aus der man erkennt, wie das Problem der Gewichtsbestimmung immer wieder aufgegriffen worden ist. Wenn hier aus der Fülle der Aufsätze nur noch derjenige von Lilly [7] erwähnt wird, so deshalb, weil er mit einem auch auf die vorliegenden Ausführungen anwendbaren Satz schließt. «It is hoped that this paper may make some contribution to a clearer understanding and a satisfactory solution of the problem of adjusting survey networks involving measured lengths and measured angles.»

Literatur

[1] *H. Aeschlimann:* ALGOL-Programme zur vermittelnden Netzausgleichung. Schweiz. Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik (66) Nr. 2, 1968, S. 37.

[2] *W. Fischer:* Distomat-Messungen im Verbindungsnetz Feldberg. Schweiz. Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik (65) Nr. 7, 1967, S. 229.

[3] *P. Gleinsvik:* Strenge Ausgleichung kontra Näherungsverfahren bei der Berechnung polygonaler Züge und Netze. Zeitschrift für Vermessungswesen (93) Nr. 1, 1968, S. 1.

[4] *F.R. Helmert:* Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 2. Auflage, Leipzig und Berlin 1907.

[5] *W. Jordan:* Handbuch der Vermessungskunde, 1. Band: Ausgleichungsrechnung. 8., erweiterte Auflage, Stuttgart 1935.

[6] *Jordan/Eggert/Kneissl:* Handbuch der Vermessungskunde, 10. Ausgabe, Band VI: Die Entfernungsmessung mit elektro-magnetischen Wellen und ihre geodätische Anwendung. Stuttgart 1966.

[7] *J.E. Lilly:* Least squares adjustments of dissimilar quantities. Empire Survey Review, Vol. XVI, No. 121, July 1961, Seite 120.

[8] *H. Matthias:* «Strenge» Ausgleichung von Polygonzügen und -netzen mit Fehlerellipsen, ohne Normalgleichungen. Schweiz. Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik (65) Nr. 5, 1967, S. 183.

[9] *H.F. Rainsford:* Combined adjustments of angles and distances. Survey Review, Vol. XIX, No. 150, October 1968, S. 348.

[10] *K. Rinner:* Entfernungsmessungen mit lichtelektrischen und elektrischen Geräten im Testnetz Graz. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft Nr. 123, V. Internationaler Kurs für geodätische Streckenmessung 1965 in Zürich, München 1966.

[11] *K. Rinner:* EDM Research in Austria. Electromagnetic Distance Measurement, London 1967.

[12] *B. Steiner:* Übertragungseigenschaften gleichseitiger Dreiecksketten mit Richtungs- und Längenmessungen. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 50, Diss., München 1962.

[13] *H. Wolf:* Die Ausgleichung von Streckennetzen. Zeitschrift für Vermessungswesen (83) Nr. 10, 1958, S. 337.

[14] *H. Wolf:* Erste Versuchsausgleichungen im Bodensee-Testnetz «Österreich–Schweiz–Deutschland». Bericht über das Symposium über die Neuausgleichung der europäischen Hauptnetztriangulationen vom 9. bis 12. Oktober 1962 in München, Paris und München 1963, S. 146.

[15] *H. Wolf:* Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Bonn 1968.