Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Band: 68 (1970)

Heft: 4

Artikel: Das Niveausphäroid zehnten Ranges

Autor: Bretterbauer, Kurt

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-223664

DK 528.234

Das Niveausphäroid zehnten Ranges*

Kurt Bretterbauer

Zusammenfassung

Massefunktionen und Formparameter einer rotations- und äquatorsymmetrischen Massenanordnung werden nach der Methode von Darwin bis einschließlich der Glieder von der fünften Potenz der Abplattung hergeleitet.

Abstract

Following Darwin, the mass functions and form parameters of a rotational- and equator-symmetric mass configuration are derived up to terms of the fifth power of the flattening inclusively.

In der formalen Zerlegung $W = U_n + T_n$ der Entwicklung des Außenraumpotentiales W der Erde nach zonalen Kugelfunktionen heißt U_n das Niveausphäroid n-ten Ranges. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Abplattung e der Fläche klein von 2. Ordnung ist. Die lineare Abweichung der Meridianschnittskurve von der Ellipse gleicher Abplattung ist dann bereits klein von 4. Ordnung. Während für praktische Zwecke die schon von Helmert und Darwin angegebene Näherung 4. Ordnung (siehe [1]) ausreicht, haben theoretische Untersuchungen zunächst die Näherung 6. Ordnung [2], dann jene 8. Ordnung [3] und nunmehr sogar eine Näherung 10. Ordnung notwendig gemacht. Deshalb wird, einer Anregung von Herrn Prof. Dr. Dr. Karl Ledersteger folgend, hier die Entwicklung der Theorie der Niveausphäroide bis 10. Ordnung, das heißt bis Glieder der fünften Potenz der Abplattung einschließlich, gegeben.

Für die praktische Durchführung kommt von den beiden möglichen Verfahren nur jenes von Darwin in Frage, bei dem die Koeffizientensummen der Legendreschen Polynome Null gesetzt werden. Helmerts Methode der Gleichsetzung der Potentialwerte von Pol und Äquator führt zu sehr verwickelten Gleichungen höheren Grades. Im übrigen geschieht die Entwicklung in enger Anlehnung an [3].

Die Mittelpunktsgleichung der Meridianellipse des Rotationsellipsoides lautet in den polaren Koordinaten s (Radiusvektor) und φ (geozentrische Breite) unter gleichzeitiger Einführung der geometrischen Abplattung $e = 1 - c/a$:

$$s = a\left[1 + \frac{2\,e - e^2}{(1 - e)^2} \cdot \sin^2\varphi\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{1}$$

Der Koeffizient von $\sin^2\varphi$ in der Klammer läßt sich als $(2e + 3e^2 + 4e^3 + 5e^4 + 6e^5)$ darstellen. Entwickelt man sodann die rechte Seite von (1) nach dem binomischen Lehrsatz und setzt zur Vereinfachung $\sin^2\varphi = t$, so gewinnt man:

---

*) Die Kosten der umfangreichen Rechenarbeiten wurden von Herrn Hofrat Prof. Dr. Dr. h. c. Karl Ledersteger, Vorstand des Instituts für Höhere Geodäsie der Technischen Hochschule Wien, aus Mitteln des österreichischen Fonds zur Förderung wissenschaftlicher Forschung bestritten.

$$s = a\left[1 + \left(-e - \frac{3}{2}e^2 - 2e^3 - \frac{5}{2}e^4 - 3e^5\right)t + \right.$$
$$+ \left(\frac{3}{2}e^2 + \frac{9}{2}e^3 + \frac{75}{8}e^4 + \frac{33}{2}e^5\right)t^2 + \tag{2}$$
$$+ \left(-\frac{5}{2}e^3 - \frac{45}{4}e^4 - \frac{255}{8}e^5\right)t^3 +$$
$$\left. + \left(\frac{35}{8}e^4 + \frac{105}{4}e^5\right)t^4 + \left(-\frac{63}{8}e^5\right)t^5\right].$$

Gleichung (2) läßt sich auch nach Potenzen von e ordnen:

$$s = a\left[1 - et - \frac{3}{2}e^2(t - t^2) - \frac{1}{2}e^3(4t - 9t^2 + 5t^3) - \right.$$
$$- \frac{5}{8}e^4(4t - 15t^2 + 18t^3 - 7t^4) - \tag{3}$$
$$\left. - \frac{1}{8}e^5(24t - 132t^2 + 255t^3 - 210t^4 + 63t^5)\right].$$

Man beachte, daß die Koeffizientensummen der Potenzen von t in den runden Klammern von (3) jeweils verschwinden müssen.

Durch Einführung der Formparameter f_{2i} kann nun die Gleichung für den Radiusvektor der Meridiankurve des Niveausphäroides angegeben werden:

$$l = a\left[1 - et + \left(f_4 - \frac{3}{2}e^2\right)(t - t^2) + \left(f_6 - \frac{1}{2}e^3\right)(4t - 9t^2 + 5t^3) + \right.$$
$$+ \left(f_8 - \frac{5}{8}e^4\right)(4t - 15t^2 + 18t^3 - 7t^4) + \tag{4}$$
$$\left. + \left(f_{10} - \frac{1}{8}e^5\right)(24t - 132t^2 + 255t^3 - 210t^4 + 63t^5)\right].$$

Die Definition der Formparameter unterliegt einer gewissen Willkür, ist aber aus (4) unschwer zu erkennen.

Die Differenz der beiden Radienvektoren ist, wenn für t wieder der ursprüngliche Ausdruck gesetzt wird:

$$(l - s) = \frac{a}{4}\sin^2 2\varphi\,[f_4 + f_6(4 - 5\sin^2\varphi) + f_8(4 - 11\sin^2\varphi + 7\sin^4\varphi) +$$
$$+ f_{10}(24 - 108\sin^2\varphi + 147\sin^4\varphi - 63\sin^6\varphi)]\,,$$

oder auch

$$(l - s) = \frac{a}{4}\sin^2 2\varphi\,[f_4 + 4f_6 + 4f_8 + 24f_{10} -$$
$$- (5f_6 + 11f_8 + 108f_{10})\sin^2\varphi + \tag{5}$$
$$+ (7f_8 + 147f_{10})\sin^4\varphi - 63f_{10}\cdot\sin^6\varphi]\,.$$

Die Entwicklung des Potentials U_{10} nach zonalen Kugelfunktionen lautet:

$$U_{10} = \frac{k^2 M}{a} \left[\left(\frac{a}{l}\right) - \sum_{i=1}^{i=5} J_{2i} \left(\frac{a}{l}\right)^{2i+1} \cdot P_{2i}(\sin\varphi) + \frac{\bar{\varepsilon}}{3} \left(\frac{l}{a}\right)^2 (1 - P_2) \right]. \quad (6)$$

Darin bedeuten die J_{2i} die sogenannten Massefunktionen, die P_{2i} die Legendreschen Polynome, während $\bar{\varepsilon} = \omega^2 a^3 / k^2 M$ eine oft benützte Hilfsgröße 2. Ordnung darstellt. Für das letzte Glied im Ausdruck (6) benötigt man $(l/a)^2$, wegen des Faktors $\bar{\varepsilon}$ jedoch nur bis zur 8. Ordnung. Ordnet man (4) nach Potenzen von t, so gewinnt man:

$$\begin{aligned} \frac{l}{a} = 1 &+ \left(-e - \frac{3}{2} e^2 + f_4 - 2 e^3 + 4 f_6 - \frac{5}{2} e^4 + 4 f_8 - 3 e^5 + 24 f_{10}\right) t + \\ &+ \left(\frac{3}{2} e^2 - f_4 + \frac{9}{2} e^3 - 9 f_6 + \frac{75}{8} e^4 - 15 f_8 + \frac{33}{2} e^5 - 132 f_{10}\right) t^2 + \\ &+ \left(-\frac{5}{2} e^3 + 5 f_6 - \frac{45}{4} e^4 + 18 f_8 - \frac{255}{8} e^5 + 255 f_{10}\right) t^3 + \\ &+ \left(\frac{35}{8} e^4 - 7 f_8 + \frac{105}{4} e^5 - 210 f_{10}\right) t^4 + \\ &+ \left(-\frac{63}{8} e^5 + 63 f_{10}\right) t^5 . \end{aligned} \quad (7)$$

Zur Kontrolle kann man (7) für den Pol ($\varphi = 90°$, $t = 1$) spezialisieren, wofür $c/a = 1 - e$ folgen muß. Aus (7) resultiert:

$$\begin{aligned} \left(\frac{l}{a}\right)^2 = 1 &+ (-2e - 3e^2 + 2 f_4 - 4 e^3 + 8 f_6 - 5 e^4 + 8 f_8)\, t + \\ &+ (4 e^2 - 2 f_4 + 12 e^3 - 18 f_6 - 2 e f_4 + 25 e^4 - 30 f_8 - \\ &\quad - 8 e f_6 + f_4^2 - 3 e^2 f_4)\, t^2 + \\ &+ (-8 e^3 + 10 f_6 + 2 e f_4 - 36 e^4 + 36 f_8 + 18 e f_6 - \\ &\quad - 2 f_4^2 + 6 e^2 f_4)\, t^3 + \\ &+ (16 e^4 - 14 f_8 - 10 e f_6 + f_4^2 - 3 e^2 f_4)\, t^4 . \end{aligned} \quad (8)$$

Wieder gibt die Probe für den Pol richtig $(c/a)^2 = 1 - 2e + e^2$. Nun folgt aus (7) durch Reihenumkehr:

$$\begin{aligned} \frac{a}{l} = 1 &+ \left(e + \frac{3}{2} e^2 - f_4 + 2 e^3 - 4 f_6 + \frac{5}{2} e^4 - 4 f_8 + 3 e^5 - 24 f_{10}\right) t + \\ &+ \left(-\frac{1}{2} e^2 + f_4 - \frac{3}{2} e^3 + 9 f_6 - 2 e f_4 - \frac{25}{8} e^4 + 15 f_8 - 8 e f_6 - \right. \\ &\quad \left. - 3 e^2 f_4 + f_4^2 - \frac{11}{2} e^5 + 132 f_{10} - 8 e f_8 - 12 e^2 f_6 - 4 e^3 f_4 + 8 f_4 f_6 \right) t^2 + \end{aligned}$$

$$+\left(\frac{1}{2}e^3+2ef_4-5f_6+\frac{9}{4}e^4+18ef_6-18f_8+3e^2f_4-2f_4^2+\right.$$
$$\left.+\frac{51}{8}e^5-255f_{10}+30ef_8+27e^2f_6+4e^3f_4-26f_4f_6+3ef_4^2\right)t^3+$$
$$+\left(-\frac{5}{8}e^4-10ef_6+7f_8+f_4^2-\frac{15}{4}e^5-15e^2f_6-6ef_4^2-\right.$$
$$\left.-36ef_8+28f_4f_6+210f_{10}\right)t^4+$$
$$+\left(\frac{7}{8}e^5+14ef_8+3ef_4^2-10f_4f_6-63f_{10}\right)t^5\,. \tag{9}$$

Die Kontrolle durch Spezialisierung auf den Pol reduziert (9) auf a/c wofür gelten muß:

$$\frac{a}{c}=(1-e)^{-1}=1+e+e^2+e^3+e^4+e^5\,.$$

Nun können aus (9) die ungeraden Potenzen von a/l gebildet werden, wobei mit wachsender Potenz die Genauigkeit schrittweise vermindert werden darf, da in (6) die $(a/l)^{2i+1}$ jeweils mit J_{2i} multipliziert erscheinen.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{l}\right)^3 &= 1+\left(3e+\frac{9}{2}e^2-3f_4+6e^3-12f_6+\frac{15}{2}e^4-12f_8\right)t+\\
&+\left(\frac{3}{2}e^2+3f_4+\frac{9}{2}e^3+27f_6-12ef_4+\frac{75}{8}e^4+\right.\\
&\left.+45f_8-48ef_6-18e^2f_4+6f_4^2\right)t^2+\\
&+\left(-\frac{1}{2}e^3+12ef_4-15f_6-\frac{9}{4}e^4+108ef_6-54f_8+\right.\\
&\left.+6e^2f_4-12f_4^2\right)t^3+\\
&+\left(\frac{3}{8}e^4-60ef_6+21f_8+6f_4^2+12e^2f_4\right)t^4;\\
\left(\frac{a}{l}\right)^5 &= 1+\left(5e+\frac{15}{2}e^2-5f_4+10e^3-20f_6\right)t+\\
&+\left(\frac{15}{2}e^2+5f_4+\frac{45}{2}e^3+45f_6-30ef_4\right)t^2+\\
&+\left(\frac{5}{2}e^3+30ef_4-25f_6\right)t^3;\\
\left(\frac{a}{l}\right)^7 &= 1+\left(7e+\frac{21}{2}e^2-7f_4\right)t+\left(\frac{35}{2}e^2+7f_4\right)t^2;\\
\left(\frac{a}{l}\right)^9 &= 1+9et;\qquad \left(\frac{a}{l}\right)^{11}=1\,.
\end{aligned} \tag{10}$$

Nun werden nach dem bekannten Bildungsgesetz die Legendreschen Polynome ermittelt:

$$\begin{aligned}
P_2 &= \frac{1}{2}(3t-1)\,; \qquad P_4 = \frac{1}{8}(35t^2 - 30t + 3)\,;\\
P_6 &= \frac{1}{16}(231t^3 - 315t^2 + 105t - 5)\,;\\
P_8 &= \frac{1}{128}(6435t^4 - 12012t^3 + 6930t^2 - 1260t + 35)\,;\\
P_{10} &= \frac{1}{256}(46189t^5 - 109395t^4 + 90090t^3 - 30030t^2 + 3465t - 63)\,.
\end{aligned} \tag{11}$$

Für $t = 1$ müssen alle $P_{2i} = 1$ sein, was auch erfüllt ist. Nun mögen aus (11) die t^i in Funktion der P_{2i} berechnet werden:

$$\begin{aligned}
t &= \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{3}\,; \qquad t^2 = \frac{8}{35}P_4 + \frac{4}{7}P_2 + \frac{1}{5}\,;\\
t^3 &= \frac{16}{231}P_6 + \frac{24}{77}P_4 + \frac{10}{21}P_2 + \frac{1}{7}\,;\\
t^4 &= \frac{128}{6435}P_8 + \frac{64}{495}P_6 + \frac{48}{143}P_4 + \frac{40}{99}P_2 + \frac{1}{9}\,;\\
t^5 &= \frac{256}{46189}P_{10} + \frac{128}{2717}P_8 + \frac{32}{187}P_6 + \frac{48}{143}P_4 + \frac{50}{143}P_2 + \frac{1}{11}\,.
\end{aligned} \tag{12}$$

Abermals müssen zur Probe alle $t^i = 1$ werden, wenn man die $P_{2i} = 1$ setzt. Führt man nun die Ausdrücke (12) und (10) und diese wiederum in (6) ein, so treten Produkte von Legendreschen Polynomen auf, und zwar P_2^2, $P_2 P_4$, $P_2 P_6$, $P_2 P_8$, P_4^2 und $P_4 P_6$; diese Produkte können selbst wieder durch die zonalen Kugelfunktionen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
P_2^2 &= \frac{18}{35}P_4 + \frac{2}{7}P_2 + \frac{1}{5}\,; \qquad P_2 P_4 = \frac{5}{11}P_6 + \frac{20}{77}P_4 + \frac{2}{7}P_2\,;\\
P_2 P_6 &= \frac{28}{65}P_8 + \frac{14}{55}P_6 + \frac{45}{143}P_4\,; \qquad P_2 P_8 = \frac{135}{323}P_{10} + \frac{24}{95}P_8 + \frac{28}{85}P_6\,;\\
P_4^2 &= \frac{490}{1287}P_8 + \frac{20}{99}P_6 + \frac{162}{1001}P_4 + \frac{100}{693}P_2 + \frac{1}{9}\,;\\
P_4 P_6 &= \frac{1470}{4199}P_{10} + \frac{504}{2717}P_8 + \frac{28}{187}P_6 + \frac{20}{143}P_4 + \frac{25}{143}P_2\,.
\end{aligned} \tag{13}$$

Probe: für $t = 1$ müssen auch die Produkte der Legendreschen Polynome die Einheit ergeben.

Bevor nun die Reihen (8), (9) und (10) in den Potentialausdruck (6) eingesetzt werden, seien zur Vereinfachung gewisse Abkürzungen angenommen. Die Koeffizientenpolynome der t^i in (9) mögen allgemein A_i heißen, jene von (10) der Reihe nach B_i, C_i, D_i und E_i, die Koeffizientenpolynome in (8) aber F_i. Der Index i stimmt jeweils mit der Potenz von t überein. Werden außerdem für die t^i die Ausdrücke (12) eingeführt, so lautet schließlich der Potentialausdruck:

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{k^2 M} \cdot U_{10} = {} & 1 + A_1\left(\frac{2}{3} P_2 + \frac{1}{3}\right) + A_2\left(\frac{8}{35} P_4 + \frac{4}{7} P_2 + \frac{1}{5}\right) + \\
& + A_3\left(\frac{16}{231} P_6 + \frac{24}{77} P_4 + \frac{10}{21} P_2 + \frac{1}{7}\right) + \\
& + A_4\left(\frac{128}{6435} P_8 + \frac{64}{495} P_6 + \frac{48}{143} P_4 + \frac{40}{99} P_2 + \frac{1}{9}\right) + \\
& + A_5\left(\frac{256}{46189} P_{10} + \frac{128}{2717} P_8 + \frac{32}{187} P_6 + \frac{48}{143} P_4 + \frac{50}{143} P_2 + \frac{1}{11}\right) - \\
& - J_2 P_2 \left[1 + B_1\left(\frac{2}{3} P_2 + \frac{1}{3}\right) + B_2\left(\frac{8}{35} P_4 + \frac{4}{7} P_2 + \frac{1}{5}\right) + \right. \\
& \qquad + P_3\left(\frac{16}{231} P_6 + \frac{24}{77} P_4 + \frac{10}{21} P_2 + \frac{1}{7}\right) + \\
& \qquad \left. + F_4\left(\frac{128}{6435} P_8 + \frac{64}{495} P_6 + \frac{48}{143} P_4 + \frac{40}{99} P_2 + \frac{1}{9}\right)\right] - \\
& - J_4 P_4 \left[1 + C_1\left(\frac{2}{3} P_2 + \frac{1}{3}\right) + C_2\left(\frac{8}{35} P_4 + \frac{4}{7} P_2 + \frac{1}{5}\right) + \right. \\
& \qquad \left. + C_3\left(\frac{16}{231} P_6 + \frac{24}{77} P_4 + \frac{10}{21} P_2 + \frac{1}{7}\right)\right] - \\
& - J_6 P_6 \left[1 + D_1\left(\frac{2}{3} P_2 + \frac{1}{3}\right) + D_2\left(\frac{8}{35} P_4 + \frac{4}{7} P_2 + \frac{1}{5}\right)\right] - \\
& - J_8 P_8 \left[1 + E_1\left(\frac{2}{3} P_2 + \frac{1}{3}\right)\right] - J_{10} P_{10} + \\
& + \frac{\bar{\varepsilon}}{3}(1 - P_2)\left[1 + F_1\left(\frac{2}{3} P_2 + \frac{1}{3}\right) + F_2\left(\frac{8}{35} P_4 + \frac{4}{7} P_2 + \frac{1}{5}\right) + \right. \\
& \qquad + F_3\left(\frac{16}{231} P_6 + \frac{24}{77} P_4 + \frac{10}{21} P_2 + \frac{1}{7}\right) + \\
& \qquad \left. + F_4\left(\frac{128}{6435} P_8 + \frac{64}{495} P_6 + \frac{48}{143} P_4 + \frac{40}{99} P_2 + \frac{1}{9}\right)\right].
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Man beachte, daß die $(A, B, C, D, E, F)_i$ selbst wieder Polynome sind. Werden in (14) die Multiplikationen ausgeführt, treten die schon erwähnten Produkte der Legendreschen Polynome auf, die mit (13) wieder linearisiert werden können. Sodann ordnet man alles nach den P_{2i}. Das

Potential kann entlang der Niveaufläche nur dann konstant sein, wenn die Koeffizientenpolynome der P_{2i} verschwinden. Setzt man also diese Koeffizientenpolynome gleich Null, erhält man 5 Gleichungen, welche die fünf Massefunktionen mit den Größen e, $\bar{\varepsilon}$ und den vier Formparametern in Beziehung setzen. Diese 5 Gleichungen haben die folgende Gestalt, wobei die erste Gleichung das Koeffizientenpolynom von P_2 darstellt, die zweite jenes von P_4 usw.:

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{2}{3}e-\frac{1}{3}\bar{\varepsilon}\right)+\left(\frac{5}{7}e^2-\frac{2}{21}f_4-\frac{2}{21}e\,\bar{\varepsilon}\right)+\left(\frac{5}{7}e^3+\frac{2}{21}f_6-\frac{4}{21}e\,f_4+\frac{1}{21}e^2\,\bar{\varepsilon}\right)+\right.\\
&+\left(\frac{485}{693}e^4+\frac{16}{99}f_8-\frac{4}{99}e\,f_6-\frac{2}{7}e^2 f_4+\frac{16}{693}f_4^2+\frac{64}{693}e^3\,\bar{\varepsilon}-\frac{80}{693}\bar{\varepsilon}\,f_6-\right.\\
&-\left.\frac{16}{693}e\,\bar{\varepsilon}\,f_4\right)+\left(\frac{2053}{3003}e^5+\frac{32}{39}f_{10}+\frac{64}{1001}e\,f_8-\frac{2}{33}e^2 f_6-\frac{8}{21}e^3 f_4+\right.\\
&+\frac{64}{9009}f_4 f_6+\frac{160}{3003}e\,f_4^2+\frac{800}{9009}e^4\,\bar{\varepsilon}-\frac{1168}{9009}\bar{\varepsilon}\,f_8-\frac{32}{9009}e\,\bar{\varepsilon}\,f_6+\\
&+\left.\left.\frac{8}{3003}\bar{\varepsilon}\,f_4^2-\frac{8}{1001}e^2\,\bar{\varepsilon}\,f_4\right)\right]-J_2\left[1+\left(\frac{11}{7}e+3e^2-\frac{2}{7}f_4\right)+\right.\\
&+\left(\frac{1129}{231}e^3-\frac{18}{77}f_6-\frac{8}{11}e\,f_4\right)+\left(\frac{21\,740}{3003}e^4-\frac{296}{3003}f_8-\frac{536}{3003}e\,f_6-\right.\\
&-\left.\left.\frac{4916}{3003}e^2 f_4+\frac{272}{3003}f_4^2\right)\right]-J_4\left[\frac{20}{21}e+\left(\frac{670}{231}e^2+\frac{20}{693}f_4\right)+\right.\\
&+\left.\left(\frac{6810}{1001}e^3+\frac{580}{3003}f_6-\frac{40}{429}e\,f_4\right)\right]-J_6\left(\frac{100}{143}e^2+\frac{40}{143}f_4\right)=0
\end{aligned} \tag{15a}$$

$$\begin{aligned}
&\left[\left(-\frac{4}{35}e^2+\frac{8}{35}f_4+\frac{8}{35}e\,\bar{\varepsilon}\right)+\left(-\frac{72}{385}e^3+\frac{192}{385}f_6+\frac{64}{385}e\,f_4+\frac{68}{385}e^2\,\bar{\varepsilon}-\right.\right.\\
&-\left.\frac{8}{55}\bar{\varepsilon}\,f_4\right)+\left(-\frac{223}{1001}e^4+\frac{24}{143}f_8+\frac{304}{715}e\,f_6+\frac{96}{385}e^2 f_4-\frac{296}{5005}f_4^2+\right.\\
&+\left.\frac{272}{5005}e^3\,\bar{\varepsilon}-\frac{1432}{5005}\bar{\varepsilon}\,f_6+\frac{296}{5005}e\,\bar{\varepsilon}\,f_4\right)+\left(-\frac{107}{455}e^5+\frac{24}{715}f_{10}+\right.\\
&+\frac{688}{5005}e\,f_8+\frac{456}{715}e^2 f_6+\frac{128}{385}e^3 f_4-\frac{1168}{5005}f_4 f_6-\frac{72}{1001}e\,f_4^2-\\
&-\left.\left.\frac{36}{1001}e^4\,\bar{\varepsilon}-\frac{496}{5005}\bar{\varepsilon}\,f_8+\frac{584}{5005}e\,\bar{\varepsilon}\,f_6-\frac{8}{455}\bar{\varepsilon}\,f_4^2+\frac{24}{455}e^2\,\bar{\varepsilon}\,f_4\right)\right]-\\
&-J_2\left[\frac{36}{35}e+\left(\frac{114}{55}e^2+\frac{12}{385}f_4\right)+\left(\frac{17\,382}{5005}e^3+\frac{1044}{5005}f_6-\frac{48}{715}e\,f_4\right)+\right.\\
&\qquad+\left.\left(\frac{5232}{1001}e^4+\frac{288}{5005}f_8+\frac{2256}{5005}e\,f_6-\frac{1224}{5005}e^2 f_4-\frac{192}{5005}f_4^2\right)\right]-
\end{aligned} \tag{15b}$$

$$-J_4\left[1+\frac{195}{77}e+\left(\frac{6696}{1001}e^2-\frac{606}{1001}f_4\right)+\left(\frac{14\,568}{1001}e^3-\frac{954}{1001}f_6-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1764}{1001}ef_4\right)\right]-J_6\left[\frac{210}{143}e+\left(\frac{65}{11}e^2+\frac{2}{143}f_4\right)\right]=0$$

$$\left[\left(\frac{8}{231}e^3+\frac{32}{231}ef_4-\frac{80}{231}f_6-\frac{32}{231}e^2\bar{\varepsilon}+\frac{16}{231}\bar{\varepsilon}f_4\right)+\left(\frac{52}{693}e^4-\right.\right.$$
$$-\frac{32}{693}ef_6-\frac{1184}{3465}f_8+\frac{16}{77}e^2f_4-\frac{32}{3465}f_4^2-\frac{608}{3465}e^3\bar{\varepsilon}+\frac{32}{99}\bar{\varepsilon}f_6+$$
$$\left.+\frac{32}{3465}e\bar{\varepsilon}f_4\right)+\left(\frac{38}{357}e^5-\frac{5072}{3927}f_{10}-\frac{1184}{6545}ef_8-\frac{16}{231}e^2f_6+\frac{64}{231}e^3f_4+\right.$$
$$+\frac{6368}{58\,905}f_4f_6-\frac{1072}{19\,635}ef_4^2-\frac{7064}{58\,905}e^4\bar{\varepsilon}+\frac{2960}{11\,781}\bar{\varepsilon}f_8-\frac{3184}{58\,905}e\bar{\varepsilon}f_6+$$
$$\left.\left.+\frac{8}{1785}\bar{\varepsilon}f_4^2-\frac{8}{595}e^2\bar{\varepsilon}f_4\right)\right]-J_2\left[\left(\frac{12}{77}e^2+\frac{24}{77}f_4\right)+\left(\frac{64}{165}e^3+\frac{32}{77}f_6+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{256}{385}ef_4\right)+\left(\frac{13\,501}{19\,635}e^4+\frac{296}{2805}f_8+\frac{1952}{2805}ef_6+\frac{27\,296}{19\,635}e^2f_4-\right. \tag{15c}$$
$$\left.\left.-\frac{2672}{19\,635}f_4^2\right)\right]-J_4\left[\frac{50}{33}e+\left(\frac{1055}{231}e^2+\frac{10}{693}f_4\right)+\left(\frac{13\,925}{1309}e^3+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1810}{3927}f_6+\frac{6380}{357}ef_4\right)\right]-J_6\left[1+\frac{581}{165}e+\left(\frac{11\,151}{935}e^2-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{2422}{2805}f_4\right)\right]-\frac{168}{85}e\cdot J_8=0\,.$$

$$\left[\left(-\frac{16}{1287}e^4-\frac{1280}{6435}ef_6+\frac{896}{6435}f_8+\frac{128}{6435}f_4^2+\frac{3584}{45\,045}e^3\bar{\varepsilon}-\frac{896}{9009}\bar{\varepsilon}f_6-\right.\right.$$
$$\left.-\frac{896}{45\,045}e\bar{\varepsilon}f_4\right)+\left(-\frac{272}{8151}e^5-\frac{128}{429}e^2f_6+\frac{896}{40\,755}ef_4^2-\frac{768}{13\,585}ef_8+\right.$$
$$+\frac{10\,496}{122\,265}f_4f_6+\frac{896}{741}f_{10}+\frac{17\,152}{122\,265}e^4\bar{\varepsilon}-\frac{4096}{24\,453}\bar{\varepsilon}f_8-$$
$$\left.\left.-\frac{5248}{122\,265}e\bar{\varepsilon}f_6+\frac{256}{40\,755}\bar{\varepsilon}f_4^2-\frac{768}{40\,755}e^2\bar{\varepsilon}f_4\right)\right]-J_2\left[\left(-\frac{32}{2145}e^3+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{256}{715}ef_4-\frac{64}{143}f_6\right)+\left(-\frac{1808}{40\,755}e^4-\frac{17\,152}{40\,755}ef_6-\frac{13\,696}{40\,755}f_8+\right. \tag{15d}$$
$$\left.\left.+\frac{36\,992}{40\,755}e^2f_4+\frac{256}{40\,755}f_4^2\right)\right]-J_4\left[\left(\frac{280}{429}e^2+\frac{560}{1287}f_4\right)+\left(\frac{18\,640}{8151}e^3+\right.\right.$$

$$+\frac{10880}{8151}e f_4+\frac{5120}{8151}f_6\Big)\Big]-J_6\left[\frac{392}{195}e+\left(\frac{8428}{1045}e^2+\frac{392}{40755}f_4\right)\right]-$$

$$-J_8\left[1+\frac{429}{95}e\right]=0.$$

$$[224\,e^5+3584\,e\,f_8+768\,e\,f_4^2-2560\,f_4 f_6-16128\,f_{10}-2048\,e^4\bar{\varepsilon}+$$
$$+1792\,\bar{\varepsilon} f_8+1280\,e\,\bar{\varepsilon} f_6-128\,\bar{\varepsilon} f_4^2+384\,e^2\bar{\varepsilon} f_4]-$$
$$-J_2[144\,e^4-23040\,e\,f_6+8064\,f_8+2304\,f_4^2+4608\,e^2 f_4]- \qquad (15e)$$
$$-J_4[2800\,e^3+33600\,e\,f_4-28000\,f_6]-$$
$$-J_6[64680\,e^2+25872\,f_4]-115830\,e\cdot J_8-46189\,J_{10}=0.$$

Die Auflösung dieser 5 Gleichungen nach den Massefunktionen liefert:

$$J_2=\left(\frac{2}{3}e-\frac{1}{3}\bar{\varepsilon}\right)+\left(-\frac{1}{3}e^2-\frac{2}{21}f_4+\frac{3}{7}e\,\bar{\varepsilon}\right)+\left(\frac{2}{21}f_6-\frac{10}{147}e f_4-\right.$$
$$-\frac{25}{147}e^2\bar{\varepsilon}-\left.\frac{2}{21}\bar{\varepsilon} f_4\right)+\left(\frac{16}{99}f_8-\frac{2470}{4851}e f_6+\frac{5980}{33957}e^2 f_4-\right.$$
$$-\frac{52}{4851}f_4^2+\frac{593}{33957}e^3\bar{\varepsilon}-\frac{134}{693}\bar{\varepsilon} f_6+\left.\frac{64}{539}e\,\bar{\varepsilon} f_4\right)+\left(\frac{32}{39}f_{10}-\right.$$
$$-\frac{2560}{9009}e f_8-\frac{2300}{147147}e^2 f_6+\frac{138508}{1030029}e^3 f_4+\frac{34952}{693693}f_4 f_6- \qquad (16a)$$
$$-\frac{5400}{539539}e f_4^2+\frac{673}{1030029}e^4\bar{\varepsilon}-\frac{488}{3003}\bar{\varepsilon} f_8+\frac{1312}{3003}e\,\bar{\varepsilon} f_6-$$
$$\left.-\frac{26980}{693693}\bar{\varepsilon} f_4^2-\frac{44272}{441441}e^2\bar{\varepsilon} f_4\right).$$

$$J_4=\left(-\frac{4}{5}e^2+\frac{8}{35}f_4+\frac{4}{7}e\,\bar{\varepsilon}\right)+\left(\frac{4}{5}e^3+\frac{192}{385}f_6-\frac{904}{2695}e f_4-\right.$$
$$-\frac{50}{49}e^2\bar{\varepsilon}-\left.\frac{52}{385}\bar{\varepsilon} f_4\right)+\left(-\frac{1}{5}e^4+\frac{24}{143}f_8-\frac{218208}{385385}e f_6+\right.$$
$$+\frac{49496}{2697695}e^2 f_4+\frac{576}{7007}f_4^2+\frac{226}{343}e^3\bar{\varepsilon}-\frac{1084}{5005}\bar{\varepsilon} f_6+$$
$$+\left.\frac{213912}{385385}e\,\bar{\varepsilon} f_4\right)+\left(\frac{24}{715}f_{10}+\frac{1592}{165165}e f_8-\frac{8142808}{89023935}e^2 f_6-\right. \qquad (16b)$$
$$-\frac{36732224}{623167545}e^3 f_4+\frac{71248}{231231}f_4 f_6-\frac{545696}{8093085}e f_4^2-\frac{13922}{79233}e^4\bar{\varepsilon}-$$
$$\left.-\frac{80}{1001}\bar{\varepsilon} f_8+\frac{130712}{165165}e\,\bar{\varepsilon} f_6-\frac{129016}{1156155}\bar{\varepsilon} f_4^2-\frac{51469708}{89023935}e^2\bar{\varepsilon} f_4\right).$$

$$J_6 = \left(\frac{8}{7}e^3 - \frac{32}{77}ef_4 - \frac{80}{231}f_6 - \frac{20}{21}e^2\bar{\varepsilon} + \frac{40}{231}\bar{\varepsilon}f_4\right) + \left(-\frac{12}{7}e^4 + \right.$$

$$+ \frac{1072}{7623}ef_6 - \frac{1184}{3465}f_8 + \frac{43\,888}{53\,361}e^2f_4 + \frac{416}{24\,255}f_4^2 + \frac{320}{147}e^3\bar{\varepsilon} +$$

$$\left. + \frac{320}{693}\bar{\varepsilon}f_6 - \frac{16\,864}{53\,361}e\bar{\varepsilon}f_4\right) + \left(\frac{6}{7}e^5 - \frac{5072}{3927}f_{10} + \frac{53\,378\,816}{126\,351\,225}ef_8\right.$$

$$+ \frac{1\,171\,420\,688}{1\,945\,808\,865}e^2f_6 + \frac{196\,845\,321\,632}{13\,620\,662\,055}e^3f_4 - \frac{1\,331\,584}{4\,535\,685}f_4f_6 - \qquad (16c)$$

$$- \frac{26\,906\,148\,848}{6\,191\,210\,025}ef_4^2 - \frac{2005}{1029}e^4\bar{\varepsilon} + \frac{5624}{19\,635}\bar{\varepsilon}f_8 -$$

$$\left. - \frac{37\,852\,768}{35\,378\,343}e\bar{\varepsilon}f_6 + \frac{636\,224}{4\,535\,685}\bar{\varepsilon}f_4^2 - \frac{29\,912\,273\,680}{2\,724\,132\,411}e^2\bar{\varepsilon}f_4\right).$$

$$J_8 = \left(-\frac{16}{9}e^4 + \frac{1024}{1287}ef_6 + \frac{896}{6435}f_8 - \frac{512}{6435}f_4^2 + \frac{1024}{1287}e^2f_4 + \right.$$

$$\left. + \frac{160}{99}e^3\bar{\varepsilon} - \frac{320}{1287}\bar{\varepsilon}f_6 - \frac{640}{1287}e\bar{\varepsilon}f_4\right) + \left(\frac{32}{9}e^5 - \right.$$

$$- \frac{4\,327\,424}{4\,034\,745}e^2f_6 + \frac{31\,289\,344}{141\,216\,075}ef_4^2 + \frac{413\,824}{1\,833\,975}ef_8 - \qquad (16d)$$

$$- \frac{2\,956\,288}{9\,414\,405}f_4f_6 + \frac{896}{741}f_{10} - \frac{55\,832\,576}{28\,243\,215}e^3f_4 - \frac{1040}{231}e^4\bar{\varepsilon} -$$

$$\left. - \frac{11\,392}{40\,755}\bar{\varepsilon}f_8 - \frac{80\,000}{513\,513}e\bar{\varepsilon}f_6 + \frac{88\,064}{1\,344\,915}\bar{\varepsilon}f_4^2 + \frac{7\,869\,760}{5\,648\,643}e^2\bar{\varepsilon}f_4\right).$$

$$J_{10} = \frac{1}{46\,189}(134\,368\,e^5 - 17\,920\,e\,f_8 + 11\,520\,e\,f_4^2 +$$

$$+ 12\,800\,f_4f_6 - 16\,128\,f_{10} - 76\,800\,e^2f_6 - \qquad (16e)$$

$$- 71\,680\,e^3f_4 - 129\,200\,e^4\bar{\varepsilon} + 4480\,\bar{\varepsilon}f_8 +$$

$$+ 38\,400\,e\bar{\varepsilon}f_6 - 3840\,\bar{\varepsilon}f_4^2 + 53\,760\,e^2\bar{\varepsilon}f_4).$$

Man kann die Gleichungen (16) einer wertvollen Probe unterziehen, indem man sie für das homogene Ellipsoid spezialisiert. Aus der Theorie von MacLaurin ist bekannt, daß im Falle des homogenen Ellipsoides allgemein gelten muß: $f_{2i} = 0$ und

$$J_{2i} = \frac{3\,(-1)^{i-1}}{(2i+1)(2i+3)}(2e - e^2)^i,$$

daher:

$$J_2 = \frac{2}{5}e - \frac{1}{5}e^2; \qquad J_4 = -\frac{12}{35}e^2 + \frac{12}{35}e^3 - \frac{3}{35}e^4;$$

$$J_6 = \frac{8}{21}e^3 - \frac{4}{7}e^4 + \frac{2}{7}e^5 - \ldots, \tag{17}$$

$$J_8 = -\frac{16}{33}e^4 + \frac{32}{33}e^5 - \ldots, \qquad J_{10} = \frac{96}{143}e^5 - \ldots.$$

Die Hilfsgröße $\bar{\varepsilon}$ läßt sich außerdem aus der MacLaurinschen Bedingung in Funktion der Abplattung darstellen zu:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{4}{5}e + \frac{22}{35}e^2 + \frac{2}{5}e^3 + \frac{272}{1155}e^4 + \frac{400}{3003}e^5. \tag{18}$$

Setzt man im System (16) $f_{2i} = 0$ und für $\bar{\varepsilon}$ den Ausdruck (18), so folgen tatsächlich die Massefunktionen (17).

Nun bleibt noch die Darstellung der Formparameter in Funktion von $(e, \bar{\varepsilon}, J_{2i})$. Die Arbeit kann wesentlich erleichtert werden, wenn man unter Benützung der bereits vorliegenden Näherung 8. Ordnung zunächst aus (16e) den Parameter f_{10} darstellt, mit dessen Kenntnis sodann den Parameter f_8 aus (16d) usw., bis schließlich f_4 aus (16b) folgt. Die gesuchten Ausdrücke sind:

$$\begin{aligned}
f_4 = {} & \left(\frac{35}{8}J_4 + \frac{7}{2}e^2 - \frac{5}{2}e\bar{\varepsilon}\right) + \left(\frac{63}{10}J_6 + \frac{143}{8}eJ_4 - \frac{35}{16}\bar{\varepsilon}J_4 + \right.\\
& \left. + \frac{18}{5}e^3 - \frac{3}{2}e^2\bar{\varepsilon} + \frac{5}{4}e\bar{\varepsilon}^2\right) + \left(\frac{45639}{4480}J_8 + \frac{891}{20}eJ_6 - \right.\\
& - \frac{24}{5}\bar{\varepsilon}J_6 + \frac{237}{4}e^2J_4 + \frac{75}{32}\bar{\varepsilon}^2J_4 - \frac{179}{8}e\bar{\varepsilon}J_4 + \\
& \left. + \frac{105}{16}J_4^2 + \frac{272}{35}e^4 - \frac{382}{35}e^3\bar{\varepsilon} + \frac{40}{7}e^2\bar{\varepsilon}^2 - \frac{75}{56}e\bar{\varepsilon}^3\right) + \\
& + \left(\frac{33319}{2688}J_{10} + \frac{55293}{640}eJ_8 - \frac{69663}{8960}\bar{\varepsilon}J_8 + \frac{7549}{40}e^2J_6 - \right.\\
& - \frac{3571}{80}e\bar{\varepsilon}J_6 + \frac{157}{40}\bar{\varepsilon}^2J_6 + \frac{133576}{231}e^3J_4 - \\
& - \frac{476467}{1232}e^2\bar{\varepsilon}J_4 + \frac{5315}{224}e\bar{\varepsilon}^2J_4 - \frac{305}{192}\bar{\varepsilon}^3J_4 + \\
& + \frac{595235}{1056}eJ_4^2 - \frac{275}{24}\bar{\varepsilon}J_4^2 + \frac{995}{64}J_4J_6 + \frac{362}{21}e^5 - \\
& \left. - \frac{841}{35}e^4\bar{\varepsilon} + \frac{6011}{420}e^3\bar{\varepsilon}^2 - \frac{119}{24}e^2\bar{\varepsilon}^3 + \frac{305}{336}e\bar{\varepsilon}^4\right).
\end{aligned} \tag{19a}$$

$$
\begin{aligned}
f_6 = & \left(-\frac{231}{80} J_6 - \frac{21}{4} e J_4 + \frac{35}{16} \bar{\varepsilon} J_4 - \frac{9}{10} e^3 + 2 e^2 \bar{\varepsilon} - \right. \\
& \left. - \frac{5}{4} e \bar{\varepsilon}^2 \right) + \left(- \frac{15\,873}{2240} J_8 - \frac{2001}{80} e J_6 + \frac{351}{80} \bar{\varepsilon} J_6 - \right. \\
& - \frac{271}{8} e^2 J_4 - \frac{65}{32} \bar{\varepsilon}^2 J_4 + \frac{151}{8} e \bar{\varepsilon} J_4 - \frac{315}{32} J_4^2 - \\
& \left. - \frac{584}{105} e^4 + \frac{1523}{210} e^3 \bar{\varepsilon} - \frac{39}{14} e^2 \bar{\varepsilon}^2 + \frac{65}{56} e \bar{\varepsilon}^3 \right) + \\
& + \left(- \frac{74\,503}{5376} J_{10} - \frac{2937}{40} e J_8 + \frac{85\,107}{8960} \bar{\varepsilon} J_8 - \right. \\
& - \frac{11\,467}{80} e^2 J_6 - \frac{421}{80} \bar{\varepsilon}^2 J_6 + \frac{4339}{80} e \bar{\varepsilon} J_6 - \\
& - \frac{18\,999}{56} e^3 J_4 + \frac{28\,333}{112} e^2 \bar{\varepsilon} J_4 - \frac{7985}{224} e \bar{\varepsilon}^2 J_4 + \\
& + \frac{535}{192} \bar{\varepsilon}^3 J_4 - \frac{16\,195}{48} e J_4^2 + \frac{1025}{48} \bar{\varepsilon} J_4^2 - \frac{2435}{64} J_4 J_6 - \\
& \left. - \frac{129}{7} e^5 + \frac{1049}{35} e^4 \bar{\varepsilon} - \frac{9809}{420} e^3 \bar{\varepsilon}^2 + \frac{205}{24} e^2 \bar{\varepsilon}^3 - \frac{535}{336} e \bar{\varepsilon}^4 \right).
\end{aligned} \tag{19b}
$$

$$
\begin{aligned}
f_8 = & \left(\frac{6435}{896} J_8 + \frac{33}{2} e J_6 - \frac{165}{32} \bar{\varepsilon} J_6 + \frac{45}{2} e^2 J_4 + \right. \\
& + \frac{125}{32} \bar{\varepsilon}^2 J_4 - \frac{75}{4} e \bar{\varepsilon} J_4 + \frac{175}{16} J_4^2 + \frac{275}{56} e^4 - \\
& \left. - \frac{55}{7} e^3 \bar{\varepsilon} + \frac{75}{14} e^2 \bar{\varepsilon}^2 - \frac{125}{56} e \bar{\varepsilon}^3 \right) + \left(\frac{133\,705}{5376} J_{10} + \right. \\
& + \frac{87\,945}{896} e J_8 - \frac{27\,885}{1792} \bar{\varepsilon} J_8 + \frac{2717}{16} e^2 J_6 - \\
& - \frac{1445}{16} e \bar{\varepsilon} J_6 + \frac{635}{64} \bar{\varepsilon}^2 J_6 + \frac{4195}{21} e^3 J_4 - \frac{22\,055}{112} e^2 \bar{\varepsilon} J_4 + \\
& + \frac{13\,875}{224} e \bar{\varepsilon}^2 J_4 - \frac{125}{24} \bar{\varepsilon}^3 J_4 + \frac{36\,625}{192} e J_4^2 - \\
& - \frac{8975}{192} \bar{\varepsilon} J_4^2 + \frac{5765}{64} J_4 J_6 + \frac{565}{21} e^5 - \frac{685}{14} e^4 \bar{\varepsilon} + \\
& \left. + \frac{1495}{42} e^3 \bar{\varepsilon}^2 - \frac{1825}{168} e^2 \bar{\varepsilon}^3 + \frac{125}{42} e \bar{\varepsilon}^4 \right).
\end{aligned} \tag{19c}
$$

$$f_{10} = -\frac{46189}{16128} J_{10} - \frac{1925}{192} J_4 J_6 - \frac{3575}{448} e J_8 + \frac{3575}{1792} \bar{\varepsilon} J_8 -$$
$$- \frac{605}{48} e^2 J_6 + \frac{55}{6} e \bar{\varepsilon} J_6 - \frac{275}{192} \bar{\varepsilon}^2 J_6 - \frac{275}{18} e^3 J_4 +$$
$$+ \frac{925}{48} e^2 \bar{\varepsilon} J_4 - \frac{125}{16} e \bar{\varepsilon}^2 J_4 + \frac{625}{576} \bar{\varepsilon}^3 J_4 - \frac{9625}{576} e J_4^2 + \tag{19d}$$
$$+ \frac{875}{144} \bar{\varepsilon} J_4^2 - \frac{1081}{504} e^5 + \frac{215}{42} e^4 \bar{\varepsilon} - \frac{575}{126} e^3 \bar{\varepsilon}^2 +$$
$$+ \frac{125}{63} e^2 \bar{\varepsilon}^3 - \frac{625}{1008} e \bar{\varepsilon}^4 .$$

Damit liegen in den Gleichungssystemen (16) und (19) die allgemeinen Beziehungen für das Niveausphäroid in Näherung 10. Ordnung vor. Diese Systeme kann man einer strengen Kontrolle unterziehen. Spezialisiert man nämlich das System (19) für das homogene Ellipsoid, das heißt, setzt man für die J_{2i} und für $\bar{\varepsilon}$ die Ausdrücke (17) bzw. (18) ein, so müssen sämtliche f_{2i} ident verschwinden, was tatsächlich der Fall ist. Betrachtet man andererseits den zweiten Extremfall der Niveausphäroide, nämlich die Niveauflächen des Massenpunktes, so gilt bekanntlich: $J_{2i} = 0$ und

$$\bar{\varepsilon} = 2e + 2e^2 + 2e^3 + 2e^4 + 2e^5 + \dots$$

Führt man dies in die Gleichungen (19) ein, so erhält man für die Formparameter der Niveauflächen des Massenpunktes die einfachen Ausdrücke:

$$\begin{aligned} f_4 &= -\frac{3}{2} e^2 + \frac{3}{5} e^3 + \frac{3}{35} e^4 + \frac{1}{35} e^5 + \dots \\ f_6 &= -\frac{19}{10} e^3 + \frac{38}{35} e^4 + \frac{1}{35} e^5 + \dots \\ f_8 &= -\frac{405}{56} e^4 + \frac{40}{7} e^5 + \dots \\ f_{10} &= -\frac{101}{24} e^5 + \dots \end{aligned} \tag{20}$$

Werden diese Ausdrücke (20) in das System (16) eingesetzt, müssen nun alle J_{2i} verschwinden. Da auch dies erfüllt ist, erscheint die Korrektheit aller Glieder der Systeme (16), (19) und (20) gesichert.

Literatur

[1] *Jordan-Eggert-Kneissl:* Handbuch der Vermessungskunde, Band V: Astronomische und Physikalische Geodäsie von Karl Ledersteger.

[2] *G. Oliwa:* Das äußere Schwerefeld eines Rotationssphäroides, Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, *48* (1960), Nr. 4, S. 113–119.

[3] *K. Ledersteger:* Das allgemeine Niveausphäroid in Näherung achter Ordnung, Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, *53* (1965), Nr. 5, S. 137–144.