

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 69 (1971)

Heft: 6

Artikel: La classification des points en mensuration cadastrale numérique

Autor: Bachmann, W.K.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-224324>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 18.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Photogrammetrie und Kulturtechnik

Revue technique Suisse des Mensurations, de Photogrammétrie et du Génie rural

Herausgeber: Schweiz. Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik; Schweiz. Gesellschaft für Photogrammetrie; Fachgruppe der Kulturingenieure des SIA

Editeurs: Société suisse des Mensurations et Améliorations foncières; Société suisse de Photogrammétrie; Groupe professionnel des Ingénieurs du Génie rural de la SIA

Nr. 6 • LXIX. Jahrgang

Erscheint monatlich

15. Juni 1971

DK 528.441

La classification des points en mensuration cadastrale numérique

Prof. Dr W. K. Bachmann

Résumé

Le premier rapport de la Commission suisse d'automation propose une classification caractérisant la confiance qu'on peut avoir dans la détermination des points d'une mensuration numérique. On relève que la classe 4 des points déterminés une seule fois et contrôlés par une ou plusieurs mesures indépendantes n'offre pas de garanties suffisantes du moment qu'on ne tient pas compte de l'efficacité des contrôles. La notion d'ellipse d'erreur permet de définir la configuration géométrique des mesures de contrôle en un point et d'introduire une classe flottante, comprise entre 4.0 et 5.0.

W. K. Bachmann

La Commission suisse d'automation a publié en 1970, dans les numéros 7 et 8 de la «Revue suisse des mensurations», son premier rapport qui donne une vue d'ensemble des différentes méthodes numériques utilisées en Suisse pour la mensuration cadastrale. Sans aucun doute, ce document sera d'une aide précieuse pour l'élaboration des nouvelles instructions fédérales sur la mensuration numérique.

Dans ce qui suit, nous ne considérerons qu'une infime partie de ce rapport en examinant de plus près la classification des points. Conformément à la pratique exercée dans certaines régions de la Suisse, la Commission a introduit 6 classes de points, à savoir:

Classe 1. Points fixes servant de base à la mensuration parcellaire (triangulations géodésique et cadastrale).

Classe 2. Points fixes complémentaires ayant fait l'objet d'une compensation (triangulation de 5^e ordre et polygonation).

Classe 3. Points nouveaux ayant fait l'objet de deux déterminations indépendantes respectant les tolérances.

Classe 4. Points nouveaux, déterminés une seule fois et contrôlés par une ou plusieurs mesures indépendantes, respectant les tolérances (distances ou éventuellement directions de contrôle).

Classe 5. Points déterminés une seule fois, sans mesures de contrôle (limites de nature).

Classe 6. Points hors tolérance.

Cette classification nous donne une idée de la *confiance* que nous pouvons avoir en un point; elle a été choisie en fonction des différents cycles de calcul.

Dans [1], on a admis que la détermination des points-limites ne peut s'effectuer qu'à partir des points de la classe 1, 2 ou 3*. Etant donné que les points des classes 1, 2 et 3 jouent exactement le même rôle au cours des calculs, on aurait pu les réunir en une seule classe, mais on doit admettre qu'il peut éventuellement être intéressant de savoir à quel genre de points on a affaire, ce qui justifie dans une certaine mesure la classification adoptée.

Les classes 5 et 6 ont fait leurs preuves dans la pratique, raison pour laquelle il est indiqué de les maintenir telles quelles.

Quant aux points de classe 4, ils ont donné lieu à de nombreuses difficultés. Rappelons qu'un point de la classe 5 passe à la classe 4 s'il a fait l'objet d'une ou de plusieurs mesures de contrôle qui doivent *toutes* respecter les tolérances. L'ordinateur traite une mesure de contrôle après l'autre et dès qu'il y en a une qui dépasse les tolérances, le point passe en classe 6 et il est impossible de le «repêcher», même si la détermination initiale a été correcte.

Mais il y a encore une autre difficulté inhérente aux points de la classe 4: supposons que P_1 et P_2 soient deux points de classe 5 entre lesquels on a mesuré a posteriori une distance de contrôle $s_{1,2}$. Si cette dernière est hors tolérance, les deux points passent en classe 6, car on ne sait pas si l'écart constaté provient

- a) d'une mauvaise détermination de P_1 , ou
- b) d'une mauvaise détermination de P_2 , ou
- c) d'une erreur sur $s_{1,2}$

A notre avis, il serait intéressant de reprendre cette programmation et d'établir un programme de calcul permettant d'éliminer certaines de ces difficultés.

Un autre point encore donne lieu à des inquiétudes: un point de la classe 5 passe en classe 4 dès qu'il a fait l'objet d'une ou de plusieurs mesures de contrôle respectant les tolérances. Nous avons de ce fait en classe 4 des points de différentes valeurs suivant que les contrôles effectués sont suffisants ou non. En effet, si un point de classe 5 n'a fait l'objet que d'une seule mesure de contrôle, il se peut qu'il soit faux, sans que cette faute ait été mise en évidence par la mesure de contrôle. Si, par

* Dans [1], la «classe» s'appelle la «valeur» du point.

contre, le point a été contrôlé par deux distances qui se coupent à peu près à angle droit, nous obtenons une double détermination du point et le contrôle est excellent.

Pour éviter l'inconvénient que nous venons de mentionner, on est obligé de compléter le programme de calcul. Nous allons montrer qu'on peut y parvenir en introduisant la notion d'*ellipse d'erreur* qui caractérise la *configuration géométrique* des mesures de contrôle *sans faire intervenir leurs valeurs numériques*.

Vu que les directions de contrôle ne sont pas d'une grande utilité pratique, nous ne considérerons dans ce qui suit que des *distances de contrôle*. De plus, nous pouvons admettre qu'elles ont été mesurées avec un ruban métrique, préalablement étalonné. Par hypothèse, ces mesures ont toutes le poids un; elles sont indépendantes, sans biais, et ont une distribution normale. Rappelons, avant d'aborder le problème proprement dit, la définition de l'ellipse d'erreur moyenne.

§ 1. Définition de l'ellipse d'erreur moyenne

Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ des variables aléatoires normales indépendantes, ayant pour distributions

$$\varepsilon_i \sim N(0 ; \sigma_i^2) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.1)$$

Dans ces conditions, la probabilité élémentaire dp_i de ε_i est donnée par la formule

$$dp_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_i} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i^2}{\sigma_i^2}} d\varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2)$$

Les variables $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ étant indépendantes, la probabilité élémentaire dP du vecteur aléatoire $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ est

$$dP = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \prod_{i=1}^n \sigma_i} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_1^2}{\sigma_1^2} + \dots + \frac{\varepsilon_n^2}{\sigma_n^2} \right)} d\varepsilon_1 \dots d\varepsilon_n \quad (1.3)$$

Par définition,

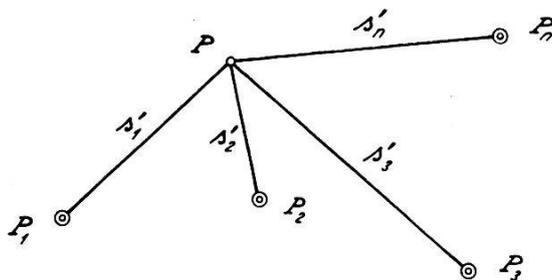
$$\frac{\varepsilon_1^2}{\sigma_1^2} + \dots + \frac{\varepsilon_n^2}{\sigma_n^2} = 1 \quad (1.4)$$

est l'ellipse d'erreur moyenne du vecteur aléatoire $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. En vertu de (1.3), la densité de probabilité est constante sur la surface (1.4). Dans un espace vectoriel à n dimensions, défini par la base orthonormée (e_1, \dots, e_n) , les axes $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ de cet ellipsoïde sont portés par les axes de coordonnées. Si l'on a $n = 2$, on obtient une ellipse d'erreur moyenne et l'on sait que la probabilité d'obtenir un point à l'intérieur de cette ellipse est de 39 %.

§ 2. Ellipse d'erreur moyenne des distances de contrôle

Soient P_1, \dots, P_n des points fixes à partir desquels nous mesurons les distances s_1', \dots, s_n' au point P à contrôler; voir figure (2.1).

Figure (2.1)



Par hypothèse, ces mesures sont indépendantes, sans biais, et distribuées normalement; de plus, elles ont toutes le poids $p_i = 1$, l'erreur moyenne à craindre sur l'unité de poids étant σ . Si ε_i désigne l'erreur vraie de s_i' , nous avons

$$\varepsilon_i \sim N(0; \sigma^2) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

et l'ellipsoïde d'erreur (1.4) devient dans ce cas

$$\varepsilon_1^2 + \dots + \varepsilon_n^2 = \sigma^2 \quad (2.2)$$

La valeur numérique de σ peut être estimée à partir des mesures. Mais, étant donné que nous nous proposons uniquement de comparer les différentes ellipses entre elles, nous n'avons pas besoin de connaître la valeur de σ et nous prenons simplement $\sigma^2 = 1$. Dans ces conditions, nous obtenons à la place de (2.2),

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2 = 1 \quad (2.3)$$

En vue du calcul du premier membre de cette équation, nous introduisons les désignations suivantes:

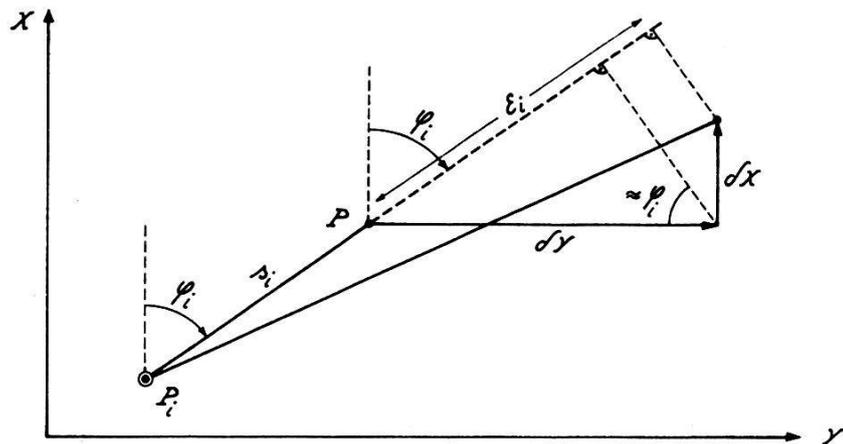
- $P_i (Y_i, X_i)$ = point fixe donné
- $P (Y, X)$ = point à contrôler
- φ_i = gisement du vecteur $\vec{P_i P}$
- s_i = longueur du vecteur $\vec{P_i P}$

En attribuant aux coordonnées Y et X du point vrai P les accroissements δY et δX , l'erreur vraie ε_i de la distance s_i est donnée par

$$\varepsilon_i = \sin \varphi_i \cdot \delta Y + \cos \varphi_i \cdot \delta X \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

voir figure (2.2).

Figure (2.2)



Si nous introduisons ces valeurs dans l'équation (2.3), nous obtenons l'ellipse d'erreur

$$[\sin^2 \varphi_i] \delta Y^2 + 2 [\sin \varphi_i \cos \varphi_i] \delta Y \delta X + [\cos^2 \varphi_i] \delta X^2 = 1 \quad (2.5)$$

Avec les notations habituelles de la méthode des moindres carrés, cette équation s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= a_i \delta Y + b_i \delta X & i &= 1, 2, \dots, n \\ a_i &= \sin \varphi_i & b_i &= \cos \varphi_i \\ [aa] \delta Y^2 + 2 [ab] \delta Y \delta X + [bb] \delta X^2 &= 1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Pour le calcul des axes ϱ_1 et ϱ_2 de cette ellipse et de leurs gisements ψ_1 et ψ_2 , nous pouvons utiliser les formules bien connues

$$\boxed{\text{ctg } 2\psi = \frac{[bb] - [aa]}{2 [ab]}} \quad (2.7)$$

$$\boxed{\varrho^2 = \frac{1}{[aa] + [ab] \text{ctg } \psi} = \frac{1}{[bb] + [ab] \text{tg } \psi}} \quad (2.8)$$

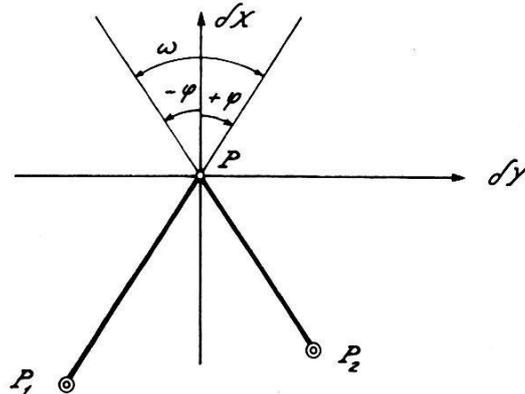
Remarque

L'ellipse d'erreur, définie par l'équation intrinsèque (2.3), est indépendante du système de coordonnées (Y, X) . C'est donc un être géométrique, qui caractérise la configuration géométrique des mesures de contrôle au point P .

§ 3. Cas de deux distances de contrôle

Soient P_1 et P_2 deux points fixes à partir desquels on a mesuré les distances de contrôle s_1' et s_2' au point P ; voir figure (3.1).

Figure (3.1)



L'ellipse d'erreur étant indépendante du choix du système de coordonnées, nous pouvons simplifier les calculs en prenant l'axe des δX confondu avec la bissectrice de l'angle $(P_1 P, P_2 P)$, car nous obtenons dans ce cas $[ab] = 0$. En ayant pour $P_1 P$ le gisement $+\varphi$ et $-\varphi$ pour $P_2 P$, l'angle compris entre ces deux directions est

$$\boxed{\omega = 2\varphi} \quad (3.1)$$

et nous pouvons exprimer les deux axes de l'ellipse en fonction de ω . En appliquant les formules (2.6), nous obtenons

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \sin \varphi & b_1 &= \cos \varphi \\ a_2 &= -\sin \varphi & b_2 &= \cos \varphi \end{aligned} \right\} \begin{aligned} [aa] &= 2 \sin^2 \varphi \\ [bb] &= 2 \cos^2 \varphi \\ [ab] &= 0 \end{aligned}$$

d'où

$$2 \sin^2 \varphi \cdot \delta Y^2 + 2 \cos^2 \varphi \cdot \delta X^2 = 1$$

ou bien

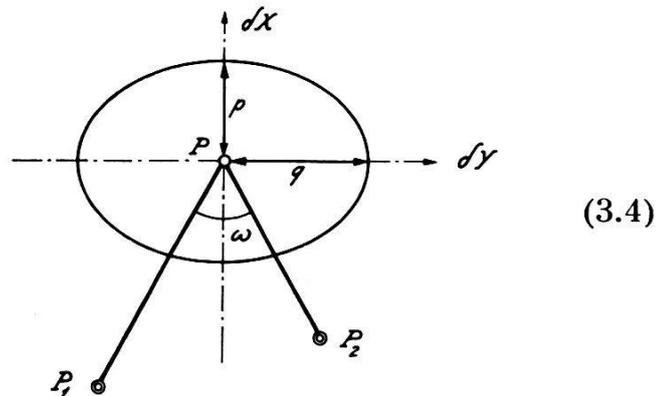
$$\frac{\delta Y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2} \sin \varphi}\right)^2} + \frac{\delta X^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2} \cos \varphi}\right)^2} = 1 \quad (3.2)$$

et par conséquent les deux axes de cette ellipse sont:

$$\begin{aligned} \text{dans la direction des } \delta Y: & \quad q = \frac{1}{\sqrt{2} \sin \varphi} \\ \text{dans la direction des } \delta X: & \quad p = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \varphi} \end{aligned} \quad (3.3)$$

En attribuant à φ successivement les valeurs 10^gr , 20^gr , ..., 50^gr , nous obtenons les ellipses figurant au tableau (3.4).

ω	q	p
20^gr	4,52	0,72
40^gr	2,29	0,74
60^gr	1,56	0,79
80^gr	1,20	0,87
100^gr	1,00	1,00



Ainsi, si nous prenons un angle d'ouverture $\omega = 40^\text{gr}$, l'ellipse a pour axes 0,74 dans la direction des δX et 2,29 dans celle des δY .

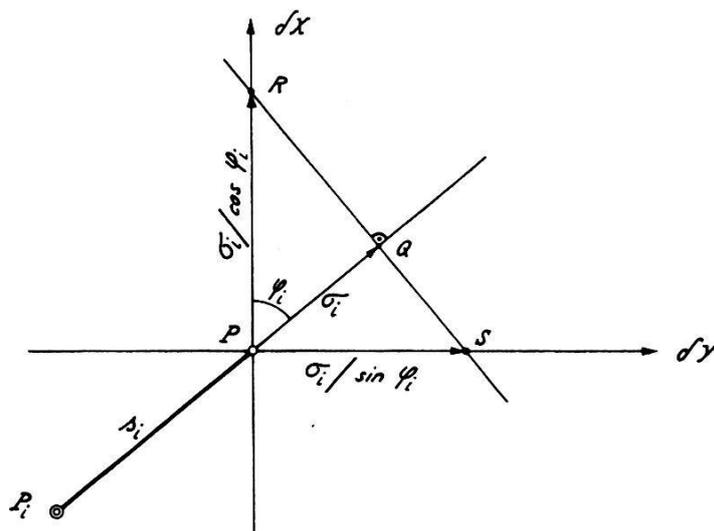
Si l'angle d'ouverture est de 100^gr , les deux axes ont la valeur 1; l'ellipse dégénère donc en un cercle de rayon $R = 1$.

Remarque

Montrons que l'équation (3.2) admet une interprétation géométrique très simple; voir figure (3.2). Soient P_i et P deux points distants de s_i . Soit d'autre part σ_i , représenté par \vec{PQ} , le vecteur-erreur de la distance mesurée s_i . En première approximation, le lieu géométrique des points, dont la distance à P_i est $s_i + \sigma_i$, est une droite perpendiculaire à $P_i P$

passant par le point Q . Cette droite intercepte sur les axes de coordonnées les segments $\sigma_i/\cos\varphi_i$ et $\sigma_i/\sin\varphi_i$. Ce sont les erreurs à craindre sur la détermination de X et de Y . En prenant ensuite $\sigma_i = 1$ et en considérant deux distances de contrôle de gisements $+\varphi$ et $-\varphi$, il suffit d'appliquer la loi de la propagation des erreurs pour trouver les axes de l'ellipse (3.2).

Figure (3.2)



§ 4. Cas général

Lorsque nous avons affaire à un nombre quelconque de distances de contrôle aboutissant au point P , nous calculons les axes de l'ellipse avec les formules (2.7) et (2.8). Considérons un exemple:

Exemple n° 1

En prenant

$$\varphi_1 = +20^{\text{gr}} \quad \varphi_2 = -20^{\text{gr}} \quad \varphi_3 = +70^{\text{gr}}$$

nous obtenons

$$a_1 = \sin\varphi_1 = +0,3090 \quad b_1 = \cos\varphi_1 = +0,9511$$

$$a_2 = \sin\varphi_2 = -0,3090 \quad b_2 = \cos\varphi_2 = +0,9511$$

$$a_3 = \sin\varphi_3 = +0,8910 \quad b_3 = \cos\varphi_3 = +0,4540$$

$$[aa] = +0,9848 \quad [ab] = +0,4045 \quad [bb] = +2,0153$$

$$\text{tg } 2\psi = \frac{2 [ab]}{[bb] - [aa]} = \frac{0,8090}{1,0305} = 0,785\cdot056$$

Ce résultat est indiqué à la figure (4.1), qui contient les courbes suivantes:

C = cercle de rayon $r = 1,00$

El_2 = ellipse d'erreur pour $\varphi_1 = +20^{\text{gr}}$ et $\varphi_2 = -20^{\text{gr}}$

El_3 = ellipse d'erreur pour $\varphi_1 = +20^{\text{gr}}$, $\varphi_2 = -20^{\text{gr}}$ et $\varphi_3 = +70^{\text{gr}}$

La figure (4.1) nous montre que les deux ellipses El_2 et El_3 sont tangentes aux points R et S , le diamètre RS étant perpendiculaire à la direction P_3P . Il en résulte que El_3 est située à l'intérieur de El_2 . Cette propriété n'est pas due au hasard; aussi allons-nous montrer qu'elle est d'ordre tout à fait général.

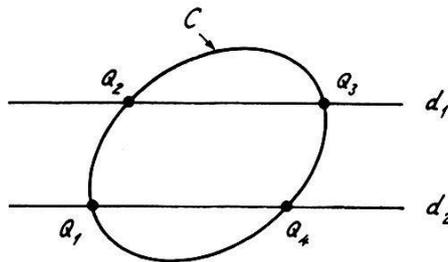
En effet, soient $d_1 = 0$ et $d_2 = 0$ les équations de deux droites et $C = 0$ l'équation d'une conique. Désignons les intersections des droites avec la conique par Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 ; voir figure (4.2).

L'équation

$$C - \lambda d_1 d_2 = 0 \quad (4.1)$$

où λ désigne un paramètre, représente le faisceau de coniques passant par les points Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4 .

Figure (4.2)

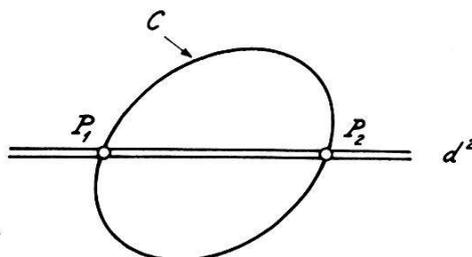


Si les deux droites d_1 et d_2 sont confondues, l'équation (4.1) devient

$$C - \lambda d^2 = 0 \quad (4.2)$$

et nous obtenons un faisceau de coniques, tangentes à C aux points P_1 et P_2 ; voir figure (4.3).

Figure (4.3)



Cela étant, appliquons cette propriété aux ellipses d'erreur. Soit

$$[aa] \delta Y^2 + 2[ab] \delta Y \delta X + [bb] \delta X^2 = 1 \quad (4.3)$$

l'ellipse d'erreur de $(n - 1)$ distances de contrôle. En y ajoutant une n^e distance $s_n = P_n P$, ayant le gisement φ_n , nous obtenons la nouvelle ellipse

$$\{[aa] + \sin^2 \varphi_n\} \delta Y^2 + 2\{[ab] + \sin \varphi_n \cos \varphi_n\} \delta Y \delta X + \{[bb] + \cos^2 \varphi_n\} \delta X^2 = 1 \quad (4.4)$$

En introduisant les notations

$$C \equiv [aa] \delta Y^2 + 2[ab] \delta Y \delta X + [bb] \delta X^2 - 1 \quad (4.5)$$

$$d \equiv \sin \varphi_n \cdot \delta Y + \cos \varphi_n \cdot \delta X$$

L'équation (4.4) s'écrit

$$C + d^2 = 0 \quad (4.6)$$

Nous avons ainsi obtenu une équation de la forme (4.2) et la propriété énoncée est démontrée.

Lorsque nous avons affaire à un nombre quelconque de distances de contrôle aboutissant au point P , nous calculons les axes de l'ellipse avec les formules (2.7) et (2.8).

Exemple n° 2

Afin de nous rendre compte de la variation d'une ellipse de par l'adjonction d'une nouvelle distance de contrôle, nous allons considérer le cas $\omega = 40^{\text{gr}}$ du tableau (3.4) en lui ajoutant une 3^e distance de contrôle. Nous prenons

$$\varphi_1 = +20^{\text{gr}} \quad \varphi_2 = -20^{\text{gr}} \quad \varphi_3 = 100^{\text{gr}}$$

Pour des raisons de symétrie, on voit que les axes de l'ellipse doivent être confondus avec les axes de coordonnées. Nous obtenons

$$\begin{aligned} a_1 &= \sin \varphi_1 = +0,3090 & b_1 &= \cos \varphi_1 = +0,9511 \\ a_2 &= \sin \varphi_2 = -0,3090 & b_2 &= \cos \varphi_2 = +0,9511 \\ a_3 &= \sin \varphi_3 = +1,0000 & b_3 &= \cos \varphi_3 = +0,0000 \\ [aa] &= +1,1910 & [ab] &= 0 & [bb] &= 1,8092 \end{aligned}$$

$$1,1910 \delta Y^2 + 1,8092 \delta X^2 = 1$$

$$\frac{\delta Y^2}{0,8396} + \frac{\delta X^2}{0,5527} = 1$$

$$q = \sqrt{0,8396} = 0,92 \quad p = \sqrt{0,5527} = 0,74$$

Nous constatons que l'axe p n'a pas varié, ce qui était du reste à prévoir, tandis que l'axe q a fortement diminué. Pour trouver les nouveaux axes il aurait du reste suffi de décomposer l'ellipse d'erreur, donnée par (3.2), en deux vecteurs-erreurs conjugués, en prenant l'un d'eux confondu avec l'axe des δY , et de le combiner ensuite avec le vecteur-erreur relatif à φ_3 ; voir figure (4.4).

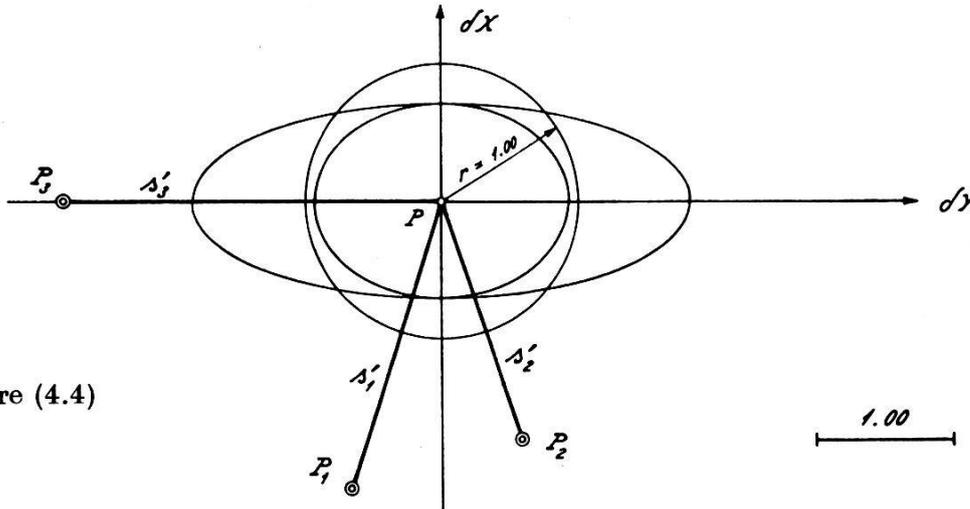


Figure (4.4)

§ 5. Cas d'une seule distance de contrôle

Lorsqu'on a affaire à une seule distance de contrôle, l'ellipse d'erreur dégénère en deux droites parallèles, perpendiculaires à la distance mesurée. Démontrons-le à l'aide de deux exemples.

Exemple n° 3

En prenant $\varphi = 0^{\text{gr}}$, nous avons

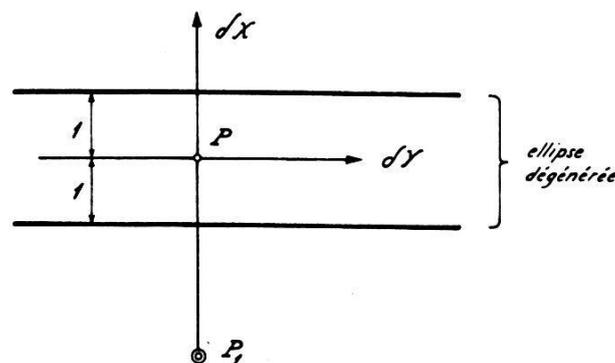
$$\sin \varphi = 0 \quad \cos \varphi = 1 \quad [aa] = [ab] = 0 \quad [bb] = 1$$

et l'ellipse d'erreur a pour équation

$$\delta X^2 = 1$$

ce qui nous donne les deux droites $\delta X = +1$ et $\delta X = -1$; voir figure (5.1).

Figure (5.1)



Exemple n° 4

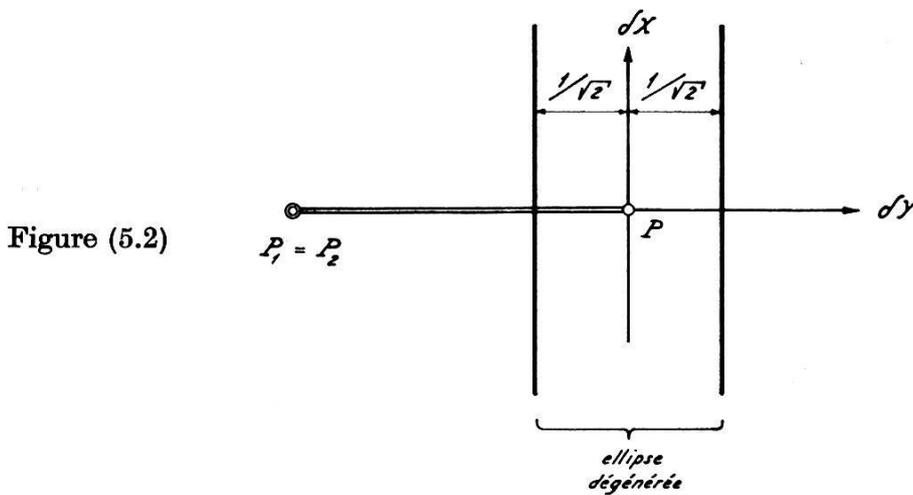
Si nous avons deux distances de contrôle avec $\varphi_1 = \varphi_2 = 100^\circ$, nous obtenons

$$\begin{aligned} a_1 &= +1 & b_1 &= 0 & a_2 &= +1 & b_2 &= 0 \\ [aa] &= 2 & [ab] &= [bb] &= 0 \end{aligned}$$

et l'équation de l'ellipse d'erreur devient dans ce cas

$$2 \delta Y^2 = 1$$

ce qui nous donne les deux droites $\delta Y = + 1/\sqrt{2}$ et $\delta Y = - 1/\sqrt{2}$; voir figure (5.2).



§ 6. Réduction d'une forme quadratique

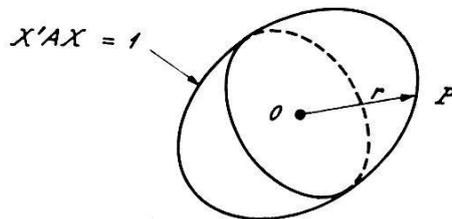
Nous avons vu qu'on peut calculer les axes de l'ellipse d'erreur avec les formules (2.7) et (2.8). Malheureusement, ces dernières ne se prêtent pas très bien au calcul électronique, étant donné que les divers cas particuliers doivent être programmés spécialement. Pour cette raison, nous préférons avoir recours à la *théorie des valeurs propres*, qui fournit un jeu de formules bien adapté aux ordinateurs. Rappelons brièvement cette théorie; voir par exemple [2] ou [3] vol. 2.

Soit A une matrice carrée *symétrique* de dimension (n, n) et $X' = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur-ligne, tandis que X désigne le *transposé*, c'est-à-dire le vecteur-colonne correspondant. Vu la symétrie de A , on a $A' = A$ et l'équation

$$\boxed{X'AX = 1 \quad \text{avec} \quad A' = A} \tag{6.1}$$

est une forme quadratique, définissant dans l'espace vectoriel à n dimensions une surface; voir figure (6.1). On obtient ses axes en cherchant les valeurs maxima de la norme $|X| = \sqrt{X'X}$ du vecteur X . Il s'agit donc de calculer les maxima de $X'X$ tout en tenant compte de la condition (6.1).

Figure (6.1)



Pour trouver la solution de ce problème, nous appliquons la méthode des *multiplicateurs de Lagrange* en introduisant la forme auxiliaire

$$\boxed{\Omega = X'X - \frac{1}{\lambda}(X'AX - 1)} \quad (6.2)$$

où λ désigne un paramètre. En différentiant le scalaire Ω par rapport à X , nous obtenons

$$d\Omega = dX' \cdot X + X' \cdot dX - \frac{1}{\lambda}(dX' \cdot A \cdot X + X' \cdot A \cdot dX) \quad (6.3)$$

Mais comme on a, vu que $A' = A$,

$$X' \cdot dX = dX' \cdot X \quad \text{et} \quad X' \cdot A \cdot dX = dX' \cdot A \cdot X,$$

l'équation (6.3) devient

$$\boxed{\frac{1}{2}d\Omega = dX' \cdot X - \lambda^{-1}dX' \cdot A \cdot X = dX'(X - \lambda^{-1}AX)} \quad (6.4)$$

Pour obtenir les maxima, on doit avoir $d\Omega = 0$, quel que soit dX , ce qui donne la condition

$$X - \lambda^{-1}AX = 0$$

c'est-à-dire

$$\boxed{AX = \lambda X} \quad (6.5)$$

En introduisant la matrice unitaire I , on peut écrire (6.5) sous la forme

$$\boxed{(A - \lambda I)X = 0} \quad (6.6)$$

Pour que ce système d'équations linéaires homogènes admette une solution différente de $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, il faut que son déterminant $\| A - \lambda I \|$ soit nul, c'est-à-dire que

$$\boxed{\| A - \lambda I \| = 0} \quad (6.7)$$

ce qui nous donne le *polynôme caractéristique* de A . Il admet les n racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, qui sont les *valeurs propres de la matrice* A , et l'on sait qu'elles sont toujours réelles lorsque A est symétrique. Il en est du reste de même des *vecteurs propres* X_i , associés aux λ_i par les équations (6.5). En prémultipliant (6.5) par X' et en tenant compte de (6.1), nous obtenons

$$X'AX = X'\lambda X = \lambda X'X = 1$$

d'où nous tirons

$$\boxed{X'X = \frac{1}{\lambda}} \quad (6.8)$$

En désignant la norme du vecteur propre X_i par r_i , nous avons

$$\boxed{r_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \quad i = 1, 2, \dots, n} \quad (6.9)$$

Les formules établies nous permettent de calculer les axes de la surface (6.1), ce qui nous donne la forme quadratique réduite.

Exemple numérique (voir [2], page 22)

En considérant la forme quadratique

$$8x^2 - 4xy + 5y^2 = 1$$

nous avons

$$A = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$$

ce qui nous donne l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} 8 - \lambda & -2 \\ -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire

$$(8 - \lambda)(5 - \lambda) - 4 = 0$$

ou bien

$$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$$

$$(\lambda - 9)(\lambda - 4) = 0$$

Nous obtenons ainsi les valeurs propres

$$\lambda_1 = 9 \qquad \lambda_2 = 4$$

D'après (6.9), les axes de la conique sont

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{1}{3} \qquad r_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = \frac{1}{2}$$

La formule (6.5) nous permet maintenant de calculer les vecteurs propres X_1 et X_2 ; elle nous donne

$$AX = \lambda X \rightarrow \begin{vmatrix} 8x & -2y \\ -2x & +5y \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \qquad \text{d'où}$$

$$\begin{aligned} 8x - 2y &= \lambda x \\ -2x + 5y &= \lambda y \end{aligned}$$

Nous obtenons donc pour

$$\underline{\lambda_1 = 9} \quad : \quad -x - 2y = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{y = -\frac{1}{2}x} \qquad \text{et}$$

$$\underline{\lambda_2 = 4} \quad : \quad -2x + y = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{y = 2x}$$

Ces équations nous donnent les gisements des vecteurs propres, dont la norme peut être choisie arbitrairement. Elles nous montrent du reste que X_1 et X_2 sont orthogonaux, ce qui est une propriété bien connue.

§ 7. Réduction de l'ellipse d'erreur

En écrivant l'équation (2.6) de l'ellipse d'erreur sous la forme

$$\boxed{[aa] \eta^2 + 2[ab] \eta \xi + [bb] \xi^2 = 1} \quad (7.1)$$

l'équation matricielle (6.1) devient

$$\boxed{\begin{array}{l} A = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} \eta \\ \xi \end{vmatrix} \\ X' A X = 1 \quad A' = A \end{array}} \quad (7.2)$$

et le polynôme caractéristique de A est d'après (6.7)

$$\boxed{\| A - \lambda I \| = \left\| \begin{vmatrix} [aa] - \lambda & [ab] \\ [ab] & [bb] - \lambda \end{vmatrix} \right\| = 0} \quad (7.3)$$

ou bien

$$\{[aa] - \lambda\} \{[bb] - \lambda\} - [ab][ab] = 0$$

ce qui nous donne

$$\boxed{\lambda^2 - \{[aa] + [bb]\} \lambda + \{[aa][bb] - [ab][ab]\} = 0} \quad (7.4)$$

Les racines λ_1 et λ_2 de cette équation sont

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \{[aa] + [bb] \pm \sqrt{([aa] + [bb])^2 - 4([aa][bb] - [ab][ab])}\}$$

ou bien

$$\boxed{\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \{[aa] + [bb] \pm \sqrt{([aa] - [bb])^2 + (2[ab])^2}\}} \quad (7.5)$$

Pour que les normes r_i des vecteurs propres X_i , données par (6.9), soient réelles, il faut qu'on ait $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_2 \geq 0$. Il résulte de (7.5) que tel ne peut être le cas que si l'on a

$$\boxed{[aa] + [bb] \geq + \sqrt{([aa] - [bb])^2 + (2[ab])^2}} \quad (7.6)$$

ou bien, en élevant les deux membres de cette inéquation au carré,

$$\begin{aligned} [aa]^2 + [bb]^2 + 2[aa][bb] &\geq [aa]^2 + [bb]^2 - 2[aa][bb] + 4[ab]^2 \\ 4[aa][bb] &\geq 4[ab][ab] \end{aligned}$$

$$\boxed{[aa][bb] \geq [ab][ab]} \quad (7.7)$$

Mais nous savons que cette inéquation est toujours vérifiée, car (7.7) n'est rien d'autre que l'*inégalité de Schwartz*; voir [3], volume 2, page 33. Il en résulte qu'on a effectivement $\lambda_1 \geq 0$ et $\lambda_2 \geq 0$. Les axes r_1 et r_2 , donnés par (6.9), sont donc toujours réels, c'est-à-dire que nous avons affaire à une ellipse.

Pour calculer les vecteurs propres X_1 et X_2 , nous pouvons utiliser la formule (6.5), qui nous donne

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \eta \\ & \xi \\ \hline [aa] & [ab] \\ [ab] & [bb] \\ \hline \end{array} = \lambda \begin{array}{|c|} \hline \eta \\ \xi \\ \hline \end{array}$$

d'où nous tirons

$$\boxed{\begin{aligned} \{[aa] - \lambda\} \eta + [ab] \xi &= 0 \\ [ab] \eta + \{[bb] - \lambda\} \xi &= 0 \end{aligned}} \quad (7.8)$$

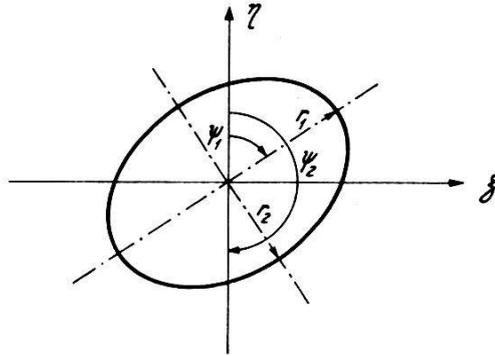
En vertu de (7.3), ces deux équations sont compatibles; si nous désignons les gisements des axes de l'ellipse par ψ_1 et ψ_2 , nous avons

$$\operatorname{tg} \psi_i = \frac{\eta}{\xi}$$

$$\boxed{\psi_i = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{[ab]}{\lambda_i - [aa]} = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{\lambda_i - [bb]}{[ab]} \quad i = 1, 2} \quad (7.9)$$

voir figure (7.1)

Figure (7.1)



Si l'on a

$$\boxed{[aa] = [bb] \quad \text{et} \quad [ab] = 0} \quad (7.10)$$

la formule (7.5) donne

$$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 \quad \text{d'où} \quad r_1 = r_2} \quad (7.11)$$

L'ellipse dégénère alors en un cercle et les gisements ψ_i deviennent indéterminés vu qu'on a

$$\text{tg } \psi_i = \frac{0}{0}.$$

Un autre cas particulier est celui où l'un des axes de l'ellipse est infini. Il en est ainsi lorsqu'on a

$$\boxed{[aa][bb] - [ab][ab] = 0} \quad (7.12)$$

En effet, dans ces conditions (7.5) devient

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ [aa] + [bb] \pm \sqrt{[aa]^2 + [bb]^2 - 2[aa][bb] + 4[ab]^2} \right\}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ [aa] + [bb] \pm \sqrt{([aa] + [bb])^2 - 4[aa][bb] + 4[ab][ab]} \right\}$$

= 0 (voir (7.12))

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ [aa] + [bb] \pm ([aa] + [bb]) \right\}$$

$$\boxed{\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = [aa] + [bb]} \quad (7.13)$$

ce qui résulte du reste aussi de (7.4) pour $\lambda_1 = 0$. Mais l'équation (7.12) n'est vérifiée que si l'un des vecteurs

$$\boxed{a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \quad b = (b_1, b_2, \dots, b_n)} \quad (7.14)$$

est nul ou s'ils sont parallèles. Comme nous avons d'après (2.6) pour les distances de contrôle

$$\boxed{a_i = \sin \varphi_i \quad b_i = \cos \varphi_i} \quad (7.15)$$

les deux vecteurs «*a*» et «*b*» ne sont parallèles que si

$$\boxed{a_i = k \cdot b_i \quad \rightarrow \quad \operatorname{tg} \varphi_i = k \quad i = 1, \dots, n} \quad (7.16)$$

c'est-à-dire que toutes les distances de contrôle s_1, \dots, s_n doivent avoir le même support. Pour $n > 1$ ce cas ne présente aucun intérêt pratique. Par contre, (7.16) est toujours vérifiée pour $n = 1$; l'un des axes devient alors infini, c'est-à-dire que l'ellipse dégénère en deux droites parallèles, ce qui est du reste évident au point de vue géométrique. En ayant $a = 0$ ou $b = 0$, nous sommes encore amenés aux mêmes conclusions.

Pour le calcul des gisements φ_i d'après (7.9), nous considérons les valeurs absolues du dénominateur, soit

$$\boxed{|\lambda_1 - [aa]| \quad |\lambda_2 - [aa]| \quad |[ab]|} \quad (7.17)$$

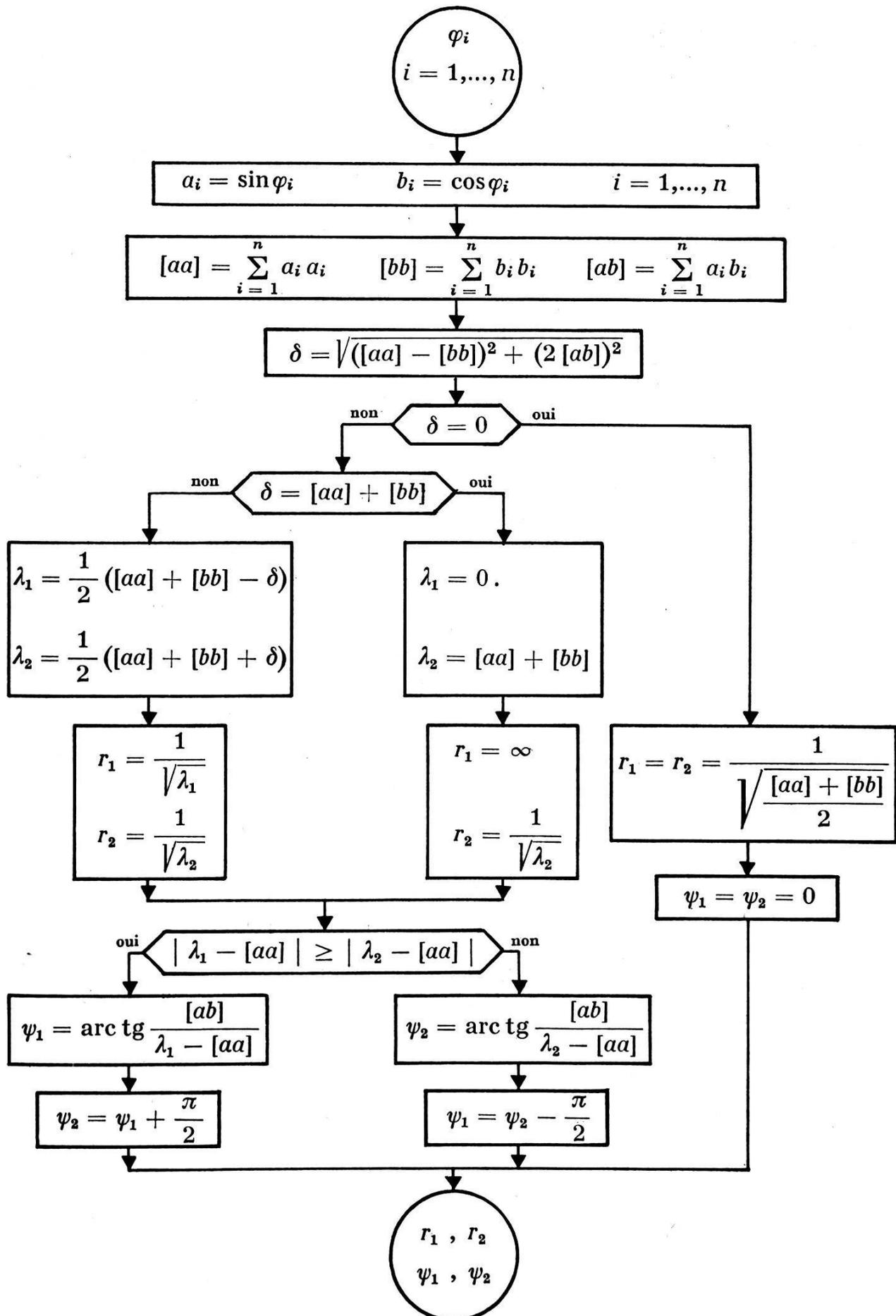
et nous choisissons la formule correspondant à la valeur la plus grande. Cette règle n'est en défaut que lorsqu'on a $\lambda_1 = \lambda_2$ puisque l'ellipse dégénère alors en un cercle.

§ 8. Calcul électronique des ellipses d'erreur

Pour le calcul électronique des ellipses d'erreur, nous avons établi un sous-programme, appelé LIPSEM, qui donne les axes et leurs gisements. L'organigramme qui le précède montre la configuration générale de ces calculs.

Finalement, ce programme a été appliqué au cas de trois distances de contrôle formant les angles ω_1 et ω_2 entre elles. Les résultats, figurant au tableau (8.1), nous montrent dans chaque cas l'efficacité du contrôle, et il devient dès lors facile de fixer un critère pour qu'un point soit accepté en classe 4.

Organigramme
du sous-programme LIPSEM
pour le calcul de l'ellipse d'erreur des distances de contrôle



Listage

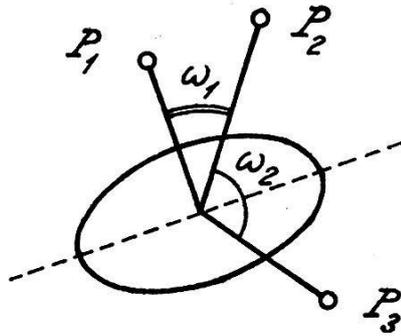
FORTRAN IV du sous-programme LIPSEM pour le calcul de l'ellipse d'erreur des distances de contrôle

```
SUBROUTINE LIPSEM (N, PHI, P, Q, PSIP, PSIQ)
DIMENSION PHI (5)
RO = 63.66197724
AA = 0.
BB = 0.
AB = 0.
DO 1 I = 1,N
A = SIN(PHI(I)/RO)
B = COS(PHI(I)/RO)
AA = AA + A**2
BB = BB + B**2
1 AB = AB + A*B
DELTA = SQRT((AA - BB)**2 + 4.*AB**2)
IF(DELTA.LT.0.001) GOTO2
IF(AA + BB - DELTA - 2.0E - 8)4,4,3
3 AMDAP = (AA + BB + DELTA)/2.
AMDAQ = (AA + BB - DELTA)/2.
P = 1./SQRT(AMDAP)
Q = 1./SQRT(AMDAQ)
GOTO5
4 AMDAQ = 0.
AMDAP = AA + BB
Q = 99999.99
P = 1./SQRT(AMDAP)
5 IF(ABS(AMDAQ - AA) - ABS(AMDAP - AA))7,6,6
6 PSIQ = ATAN(AB/(AMDAQ - AA))*RO + 0.00001
IF(PSIQ.LT.0.)PSIQ = PSIQ + 400.
PSIP = PSIQ + 100.
IF(PSIP.GE.400.)PSIP = PSIP - 400.
RETURN
7 PSIP = ATAN(AB/(AMDAP - AA))*RO + 0.00001
IF(PSIP.LT.0.)PSIP = PSIP + 400.
PSIQ = PSIP - 100.
IF(PSIQ.LT.0.)PSIQ = PSIQ + 400.
RETURN
2 P = 1./SQRT((AA + BB)/2.)
Q = P
PSIP = 0.000001
PSIQ = 0.000001
RETURN
END
```

Nom	Désignation des variables
A	$a_i = \sin \varphi_i$
AA	$[aa]$
AB	$[ab]$
AMDAQ	$\left. \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix} \right\} \text{ racines du polynôme caractéristique}$
AMDAP	
B	$b_i = \cos \varphi_i$
BB	$[bb]$
DELTA	δ
N	$n = \text{nombre de distances de contrôle}$
P	$r_2 = \text{petit axe de l'ellipse}$
PHI(I)	$\varphi_i = \text{gisements des distances de contrôle}$
PSIQ	$\psi_1 = \text{gisement du grand axe}$
PSIP	$\psi_2 = \text{gisement du petit axe}$
Q	$r_1 = \text{grand axe de l'ellipse}$
RO	1 radian en grades

Tableau (8.1): Ellipses d'erreur pour 3 distances de contrôle

$\omega_1 \backslash \omega_2$	0	20	40	60	80	100	grades
grades	300.00	303.41	307.56	313.69	325.41	350.00	$\left\{ \begin{matrix} \text{gisement} \\ \text{du grand} \\ \text{axe} \\ \text{grand axe} \\ \text{petit axe} \end{matrix} \right.$
0	∞ 0.58	3.92 0.58	1.99 0.60	1.37 0.64	1.09 0.68	1.00 0.71	
20	306.57 3.92 0.58	310.00 2.29 0.60	314.59 1.53 0.62	322.44 1.17 0.66	340.00 1.00 0.71	370.00 1.00 0.71	id.
40	312.44 1.99 0.60	315.41 1.53 0.62	320.00 1.20 0.66	330.00 1.00 0.71	360.00 0.92 0.74	390.00 1.00 0.71	id.
60	316.31 1.37 0.64	317.56 1.17 0.66	320.00 1.00 0.71	330.00 0.87 0.77	0.00 0.87 0.77	10.00 1.00 0.71	id.
80	314.59 1.09 0.68	310.00 1.00 0.71	300.00 0.92 0.74	270.00 0.87 0.77	40.00 0.92 0.74	30.00 1.00 0.71	id.
100	300.00 1.00 0.71	290.00 1.00 0.71	280.00 1.00 0.71	270.00 1.00 0.71	260.00 1.00 0.71	250.00 1.00 0.71	id.
120	285.41 1.09 0.68	282.44 1.17 0.66	280.00 1.20 0.66	277.56 1.17 0.66	274.59 1.09 0.68	270.00 1.00 0.71	id.
140	283.69 1.37 0.64	284.59 1.53 0.62	285.41 1.53 0.62	286.31 1.37 0.64	287.56 1.17 0.66	290.00 1.00 0.71	id.
160	287.56 1.99 0.60	290.00 2.29 0.60	292.44 1.99 0.60	295.41 1.53 0.62	300.00 1.20 0.66		id.
180	293.43 3.92 0.58	296.57 3.92 0.58	300.00 2.29 0.60				id.



§ 9. Calcul de la classe d'un point

Nous admettons que la classe CL d'un point, déterminé une fois et contrôlé par une ou plusieurs distances, est comprise entre 4.0 et 5.0. Pour le calcul de la classe, nous ne faisons intervenir que le *grand axe* q de l'ellipse d'erreur en prenant

$CL = 4 \quad \text{si } q \leq 1.5$ $CL = 5.0 - \frac{(1.5)^2}{q^2} \quad \text{si } q > 1.5$ <p style="text-align: center;">$q = \text{grand axe de l'ellipse d'erreur}$</p>	(9.1)
---	-------

La seconde de ces formules nous donne alors

- a) $CL = 5.0$ si $q = \infty$ et
- b) $CL = 4.0$ si $q = 1.5$ c'est-à-dire si l'angle de recouvrement est de 62.5 grades dans le cas de deux distances de contrôle (voir tableau 3.4).

Nous acceptons alors le point si l'on a $CL = 4$ tandis que nous le rejetons si $CL > 4.0$. En adoptant cette règle, l'ordinateur met en évidence tous les points insuffisamment contrôlés, ce qui est d'une importance capitale pour la mensuration cadastrale.

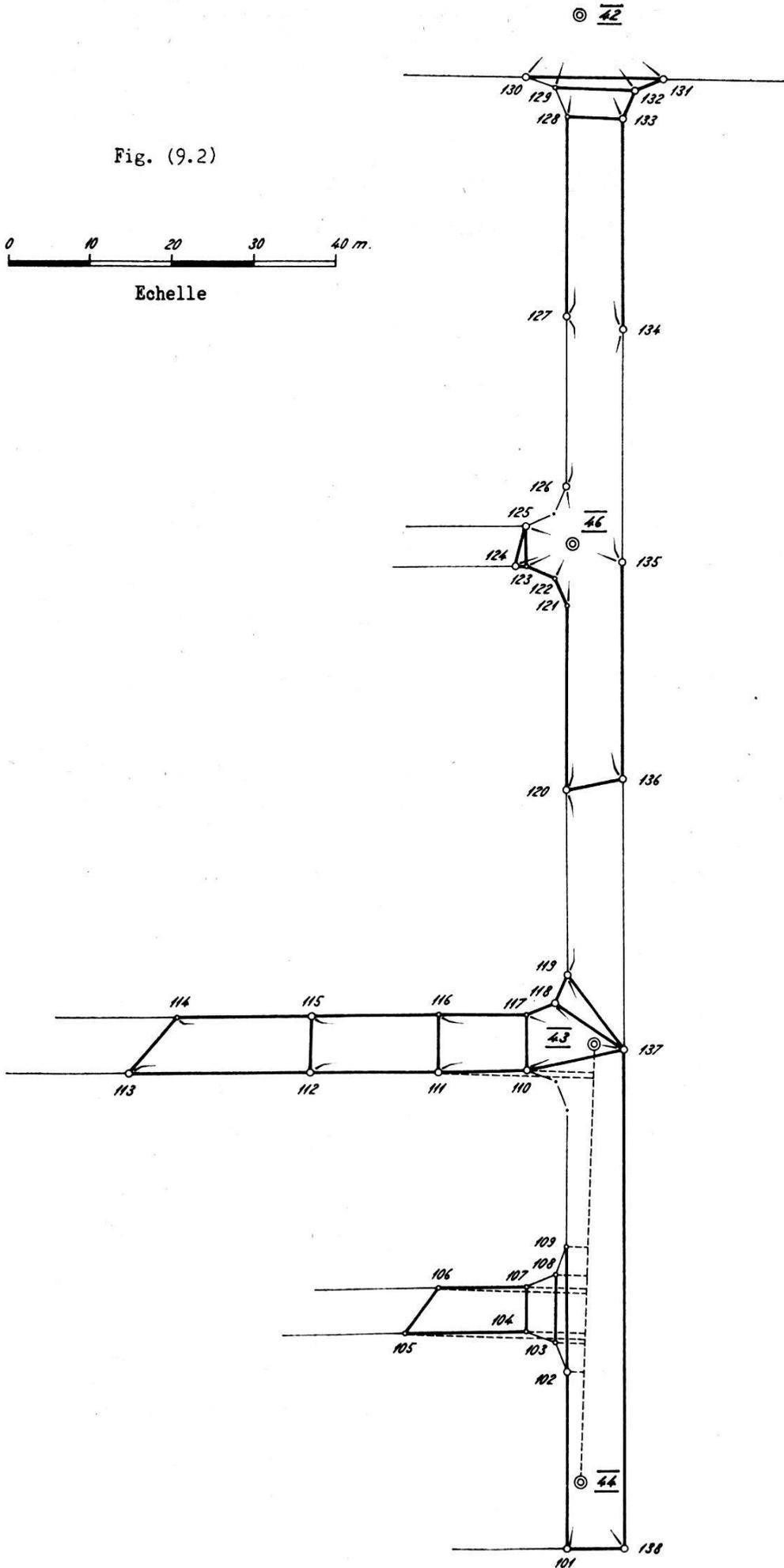
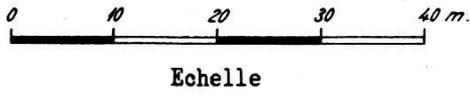
Exemple numérique

Nous avons traité par voie électronique un petit exemple de lever par les méthodes polaire et orthogonale. Les résultats de la classification et la structure de ce lever, qui est loin d'être un modèle, sont représentés à la figure (9.2). Les distances de contrôle mesurées y sont caractérisées par des traits épais.

Liste des publications mentionnées

- [1] *S. Djazmati*: Calcul électronique des levés de détail en mensuration cadastrale. EPF-Lausanne, 1966.
- [2] *S. J. Hammarling*: Latent Roots and Latent Vectors. Ed. Adam Hilger, London 1970.
- [3] *W. K. Bachmann*: Cours de statistique et méthode des moindres carrés pour ingénieurs ruraux et géomètres. EPF-Lausanne, 1969.

Fig. (9.2)



Point	Classe
101	4
102	5.0
103	5.0
104	4
105	4.1
106	4.1
107	4
108	5.0
109	5.0
110	3
111	3
112	4
113	4.2
114	4.2
115	4
116	4
117	4
118	4
119	3
120	3
121	4.8
122	4.3
123	4
124	4
125	5.0
126	3
127	3
128	4
129	5.0
130	5.0
131	4.8
132	4
133	4
134	3
135	3
136	4
137	4
138	4