

Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Société suisse de la mensuration et du génie rural

Band: 69 (1971)

Heft: 9

Artikel: Der Tischcomputer als Hilfsmittel bei der Orientierung von Luftaufnahmen

Autor: Köchle, Richard

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-224337>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 04.12.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Der Tischcomputer als Hilfsmittel bei der Orientierung von Luftaufnahmen

Richard Köchle

Zusammenfassung

Es wird auf den vorteilhaften Einsatz eines Tischcomputers bei der gegenseitigen und absoluten Orientierung, einschließlich Maßstabsabgleichung und Blattdrehung, aufmerksam gemacht. Drei verschiedene Verfahren der gegenseitigen Orientierung werden hinsichtlich der verbleibenden Höhenparallaxen miteinander verglichen.

Résumé

Les orientations relative et absolue, y compris détermination de l'échelle et rotation du plan, peuvent être résolues avantageusement avec un ordinateur de table. Trois procédés différents d'orientation relative sont comparés d'après leurs parallaxes verticales résiduelles.

1. Soll man optisch-mechanisch oder rechnerisch orientieren?

Der schon seit Jahrzehnten in der Luftphotogrammetrie wogende Wettstreit zwischen optisch-mechanischen und rechnerischen Verfahren der Orientierung von Bildpaaren in Auswertegeräten wurde von den Praktikern, trotz vielerlei interessanten rechnerischen Vorschlägen (zum Beispiel [1], [2], [3], [4]), aus Gründen der Arbeitsökonomie meist zugunsten der Von-Gruberschen optisch-mechanischen Methode entschieden. In neuerer Zeit sind allerdings elektronische Rechenautomaten imstande, die mit der Orientierung verbundenen Formeln exakt und spielend zu lösen, doch lohnt sich ihr Einsatz nur dann, wenn der Auswerter jederzeit unmittelbaren Zugriff zu ihnen hat.

Der Verfasser hat versucht, die linearisierten Orientierungsformeln auf einem kürzlich von der Ingenieur fakultät der Universität Malaya erworbenen, kleinen Tischcomputer, einer Hewlett-Packard 9100A, zu programmieren und möchte im folgenden über seine recht ermutigenden Erfahrungen damit berichten. Er ist der Meinung, daß die meisten photogrammetrischen Betriebe wohl eine gleiche oder ähnliche Maschine bereits in ihrem Büro stehen haben, die sich mit Vorteil bei der Orientierung einsetzen ließe. Das Einlesen des Programms von einer kleinen magnetischen Karte und die eigentliche Rechnung laufen in Sekundenschnelle ab. Die meiste Zeit nimmt das Ablesen, Eintasten und Neueinstellen der Orientierungswerte in Anspruch.

2. Gegenseitige Orientierung

Als Versuchsobjekt diente ein Wild B8, abgelesen werden die alten Werte κ_0' , κ_0'' , φ_0' , φ_0'' und ω_1' , ω_2' , ω_3' , ω_4' , ω_5' , ω_6' , welche letzteren man

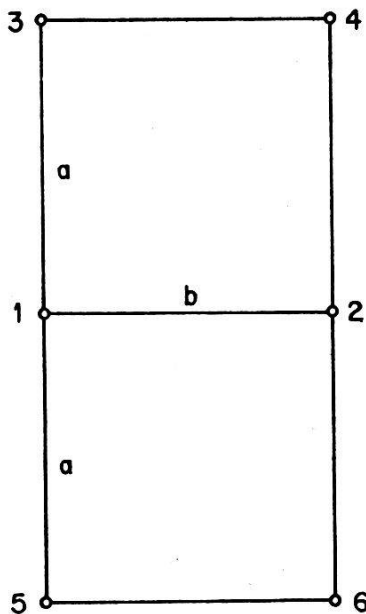


Abb. 1: Numerierung der Punkte bei der gegenseitigen Orientierung

durch einzelnes Wegstellen der Höhenparallaxe in den entsprechenden Punkten mit der ω' -Schraube erhält (Abb. 1). Der Computer liefert die neuen Werte nach folgenden, linearisierten, für den B8 gültigen Formeln. Für ihre Ableitung nach der Methode der kleinsten Quadrate wird auf Abschnitt 6 verwiesen.

$$\omega' = \frac{G_1 \omega_{01}' + G_2 \omega_{02}'}{G_1 + G_2}$$

$$\kappa' = \kappa_0' + \frac{h_2}{B} (\omega_2' - \omega') + \frac{2k}{Bg_2 A_2}$$

$$\kappa'' = \kappa_0'' + \frac{h_1}{B} (\omega_1' - \omega') - \frac{2k}{Bg_1 A_1} \quad (1.1)$$

$$\varphi' = \varphi_0' + \frac{e}{2Ba} [h_4 (\omega_4' - \omega') - h_6 (\omega_6' - \omega')] - \frac{ck}{2Ba A_2} \left(\frac{1}{g_4} - \frac{1}{g_6} \right)$$

$$\varphi'' = \varphi_0'' + \frac{e}{2Ba} [h_3 (\omega_3' - \omega') - h_5 (\omega_5' - \omega')] + \frac{ck}{2Ba A_1} \left(\frac{1}{g_3} - \frac{1}{g_5} \right)$$

In den Formeln bedeuten die Symbole und Abkürzungen:

- a Der im Bild gemessene Abstand der Randpunkte von der Mittellinie (Abb. 1). Er darf für das Format 22×22 cm mit genügender Genauigkeit als 10 cm angenommen werden, wenn die Meßmarke um den Bildfeldradius vom Rand entfernt liegt.
- c Die Kammerkonstante.
- h_1, \dots, h_6 Die Flughöhen bezüglich der zur Orientierung verwendeten Punkte. Für den B8 berechnet man sie im Programm als h_i in mm = $318 - 1000 H_i / M$. Hier ist H_i die Ablesung in Metern der Höhenskala des Maßstabs $1:M$, wenn man die unterste Stellung der z-Säule als Null einstellt.
- B Die Modellbasis.

$$e = c + \frac{a^2}{c}, \quad g_i = \frac{c^2}{h_i^2}, \quad i = 1, 2 \dots 6$$

$$A_1 = 2 h_1 - \frac{e}{c} (h_3 + h_5), \quad A_2 = 2 h_2 - \frac{e}{c} (h_4 + h_6)$$

$$B_1 = 2 h_1 \omega_1' - \frac{e}{c} (h_3 \omega_3' + h_5 \omega_5'), \quad B_2 = 2 h_2 \omega_2' - \frac{e}{c} (h_4 \omega_4' + h_6 \omega_6')$$

$$C_1 = \frac{4}{g_1} + \frac{1}{g_3} + \frac{1}{g_5}, \quad C_2 = \frac{4}{g_2} + \frac{1}{g_4} + \frac{1}{g_6} \quad (1.2)$$

$$G_1 = \frac{A_1^2}{C_1}, \quad G_2 = \frac{A_2^2}{C_2}$$

$$\omega_{01}' = \frac{B_1}{A_1}, \quad \omega_{02}' = \frac{B_2}{A_2}$$

$$k = \frac{\omega_{01}' - \omega_{02}'}{\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}}$$

Wie man bemerkt, sind die Formeln für gebirgiges Gelände angegeben. Das bedingt das Ablesen der Höhen für die Orientierungspunkte, hat aber den Vorteil der in jedem Fall raschen Konvergenz des Verfahrens. Der Verfasser stellte anhand von Versuchen mit verschiedenen Modellen fest, daß das Verfahren öfters beim ersten, spätestens aber nach dem zweiten Durchgang zum Stehen kommt. Ohne Berücksichtigung der Höhenunterschiede waren bei hügeligen Modellen drei bis fünf Durchgänge notwendig.

Zur Beschleunigung der Konvergenz erwies es sich als vorteilhaft, wenn man vor Beginn des ersten Durchgangs die Basislinie mit κ' und κ'' parallaxfrei machte.

3. Restparallaxen nach vollendeter gegenseitiger Orientierung

Jedem, der schon einmal an einem Auswertegerät optisch-mechanisch orientiert hat, ist die lästige Tatsache der untolerierbar großen Restparallaxe im Punkt 6 bekannt. Man versucht dann auf gut Glück einen erneuten Durchgang, indem man die Parallaxen in den Punkten 1 bis 5 mit doppelter Sorgfalt wegstellt; ein erfahrener Auswerter wird vielleicht anhand des Gesamtbildes die Parallaxen nach gewissen Erfahrungsregeln verdrücken. Dieses «Verdrücken» leistet die Methode der kleinsten Quadrate nach einem strengen Optimierungsprinzip. Tatsächlich hat der Verfasser nach Orientierung mit der Methode von Abschnitt 2 auch nie über große Restparallaxen in einzelnen Punkten wahrnehmen können.

Die Überlegenheit der Methode der kleinsten Quadrate über die optisch-mechanischen Verfahren läßt sich sehr schön anhand der theoretischen mittleren Fehler an den Höhenparallaxen nachweisen. Abbildungen 2 bis 9 zeigen für drei verschiedene Orientierungsverfahren, wie die Parallaxen nach vollendeter gegenseitiger Orientierung über das Bild verteilt liegen. Offensichtlich führt die Methode der kleinsten Quadrate in den kritischen Randpunkten auf rund dreimal kleinere Restparallaxen.

Es wurden für jedes Orientierungsverfahren zwei Annahmen untersucht:

- a) daß die Höhenparallaxen in allen Punkten mit gleicher Genauigkeit weggestellt werden können,
- b) daß der mittlere Wegstellfehler der Parallaxe am oberen und unteren Rand doppelt so groß ist wie in der Bildmitte.

Welche der beiden Annahmen besser zutrifft, soll hier nicht weiter erörtert werden, denn wie aus den Abbildungen ersichtlich, ist ein Einfluß der Meßgenauigkeit am Rande auf die Restparallaxen in Bildmitte – anders, als man vielleicht vermuten möchte – kaum vorhanden. Dieses Ergebnis wird noch einmal in Abbildung 10 für die Hallertsche Methode systematisch dargestellt. Innerhalb der Grenzen einer realistischen Variation des Wegstellfehlers am Rande ist die kleine Zunahme des mittleren Restfehlers in den Punkten 1 und 2 ohne Bedeutung.

Die drei zum Vergleich herangezogenen Verfahren sind:

1. In Abbildung 2 bis 5 die *Hallertsche Methode* oder Methode der kleinsten Quadrate, wie sie in Abschnitt 2 beschrieben ist, aber für ebenes Gelände.

2. In Abbildung 6 und 7 die bekannte *Von-Grubersche Methode*, die in folgenden Schritten abläuft:

Man stelle die Höhenparallaxe weg

- (1) in Punkt 1 mit κ'' ,
- (2) in Punkt 2 mit κ' ,
- (3) in Punkt 3 mit φ'' ,
- (4) in Punkt 4 mit φ' ,
- (5) Man lese die ω' -Skala ab: Wert ω_0' . Dann stelle man die Höhenparallaxe in Punkt 5 mit ω' weg, neue Ablesung: ω_1' . Die Neueinstellung für ω' ist $\omega_2' = \omega_0' + \bar{v} (\omega_1' - \omega_0')$ mit dem Überstellungsfaktor $\bar{v} = \frac{1}{2} (1 + c^2/a^2)$.
- (6) Man wiederhole Schritte (1) bis (4).

3. In Abbildung 8 und 9 eine optisch-mechanische Methode ähnlich dem Folgebildanschluß, die wir mangels eines besseren Namens *Methode 2* nennen wollen. Sie läuft in folgenden Schritten ab:

Man stelle die Höhenparallaxe weg

- (1) in Punkt 3 mit ω' : Ablesung ω_1' ,
- (2) in Punkt 5 mit ω' : Ablesung ω_2' , Neueinstellung von ω' :

$$\omega_3' = \frac{1}{2} (\omega_1' + \omega_2'),$$

- (3) in Punkt 5 mit φ'' ,
 (4) in Punkt 1 mit ω' : Ablesung ω_4' , Neueinstellung von ω' :
 $\omega_5' = \omega_3' + \bar{t} (\omega_3' - \omega_4')$ mit dem Überstellungsfaktor $\bar{t} = c^2/a^2$,
 (5) in Punkt 1 mit κ'' ,
 (6) in Punkt 2 mit κ' ,
 (7) in Punkt 4 mit φ' .

Alle drei Verfahren werden nur für das ebene Modell untersucht. Abbildung 2 findet sich auch bei Finsterwalder-Hofmann [5] auf S. 286.

Im folgenden sind die Formeln zu den Abbildungen 2 bis 10 zusammengestellt. Deren Herleitung wird in Abschnitt 7 nachgeholt. In den Figuren ist das Verhältnis der mittleren Fehler σ/σ_0 , also nicht das Quadrat, durch Höhenlinien wiedergegeben. σ_0 ist der mittlere Wegstellfehler der Parallaxe auf der Mittellinie, σ der nach abgeschlossener Orientierung verbleibende mittlere Parallaxfehler. Die Faktoren r und s zeigen an, um wievielfach größer der mittlere Wegstellfehler am Rande ist als auf der Mittellinie, dabei soll r für den tatsächlich vorhandenen Fehler gelten, s für den bei der Ausgleichung nach Hallert eingeführten Wert. Man beachte ferner die teilweise verschiedene Lage der Koordinatenachsen.

Abb. 2, Hallert, $s = r = 1$

$$\sigma^2/\sigma_0^2 = \frac{3}{4} \eta^4 + \xi'^2 \eta^2 + \frac{2}{3} \xi'^2 - \frac{3}{4} \eta^2 + \frac{1}{2} \quad (2.1)$$

Abb. 3, Hallert, $s = 1, r = 2$

$$\sigma^2/\sigma_0^2 = \frac{3}{2} \eta^4 + 4 \xi'^2 \eta^2 + 2 \xi'^2 + \frac{1}{2} \quad (2.2)$$

Abb. 4, Hallert, $s = 2, r = 1$

$$\sigma^2/\sigma_0^2 = \frac{3}{4} \eta^4 + \xi'^2 \eta^2 + \xi'^2 - \frac{3}{4} \eta^2 + \frac{1}{2} \quad (2.3)$$

Abb. 5, Hallert, $s = r = 2$

$$\sigma^2/\sigma_0^2 = \frac{3}{2} \eta^4 + 4 \xi'^2 \eta^2 + \frac{4}{3} \xi'^2 + \frac{1}{2} \quad (2.4)$$

Abb. 6, Von Gruber, $r = 1$

$$\sigma^2/\sigma_0^2 = \frac{3}{2} \eta^2 (\eta - 1)^2 + [(\xi - 1)^2 + \xi^2] [(\eta - 1)^2 + \eta^2] \quad (2.5)$$

Abb. 7, Von Gruber, $r = 2$

$$\sigma^2/\sigma_0^2 = 3 \eta^2 (\eta - 1)^2 + [(\xi - 1)^2 + \xi^2] [(\eta - 1)^2 + 4 \eta^2] \quad (2.6)$$

Abb. 8, Methode 2, $r = 1$

$$\begin{aligned} \sigma^2/\sigma_0^2 = & \frac{3}{2} \eta^4 + 6 \xi^2 \eta^2 - 4 \xi \eta^3 - 2 \xi^2 \eta - 4 \xi \eta^2 + \eta^3 + 2 \xi^2 + \frac{3}{2} \eta^2 - \\ & - 2 \xi + 1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Abb. 9, Methode 2, $r = 2$

$$\begin{aligned} \sigma^2/\sigma_0^2 = & 3 \eta^4 + 18 \xi^2 \eta^2 - 10 \xi \eta^3 - 2 \xi^2 \eta - 16 \xi \eta^2 + 4 \eta^3 + 2 \xi^2 + \\ & + 6 \eta^2 - 2 \xi + 1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

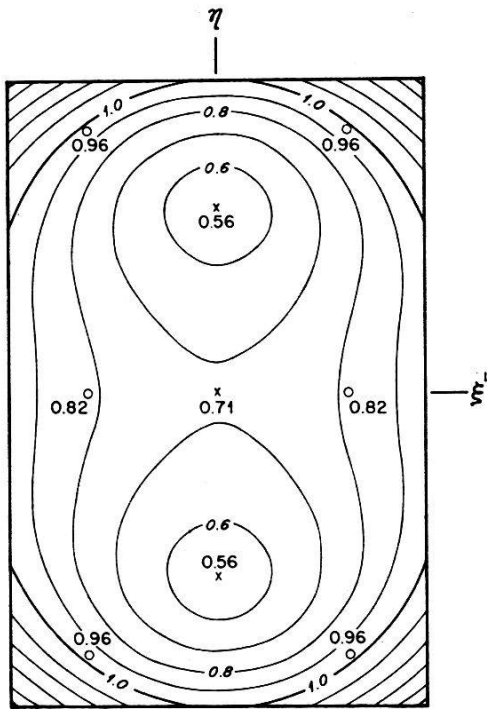


Abb. 2, Gl. (2.1):
Hallert, $s = r = 1$

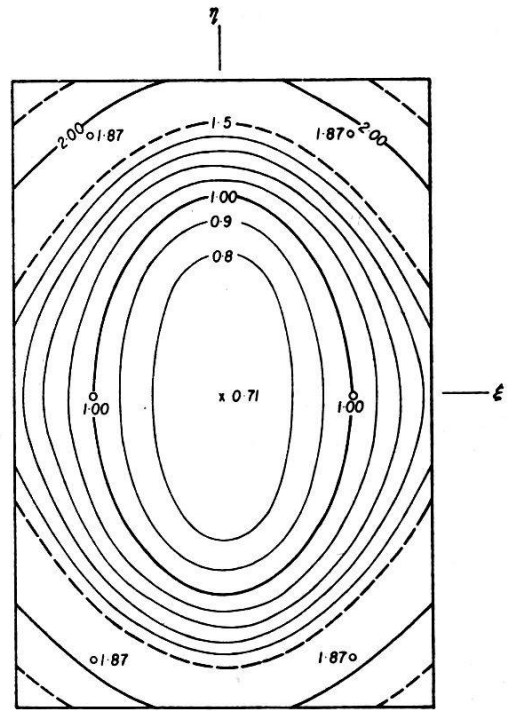


Abb. 3, Gl. (2.2):
Hallert, $s = 1, r = 2$

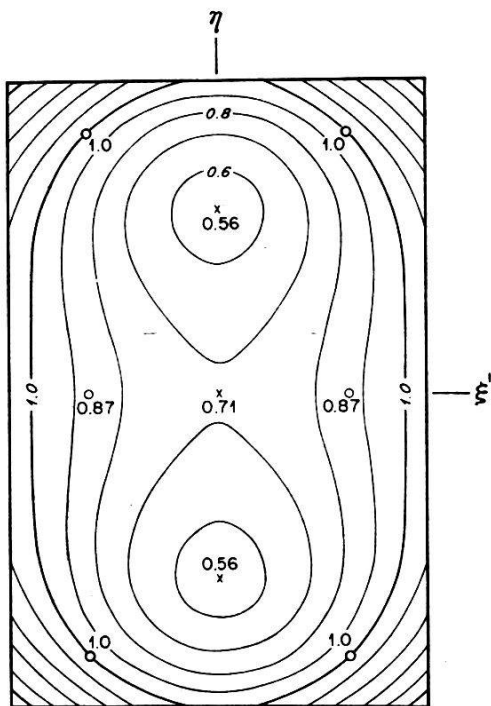


Abb. 4, Gl. (2.3):
Hallert, $s = 2, r = 1$

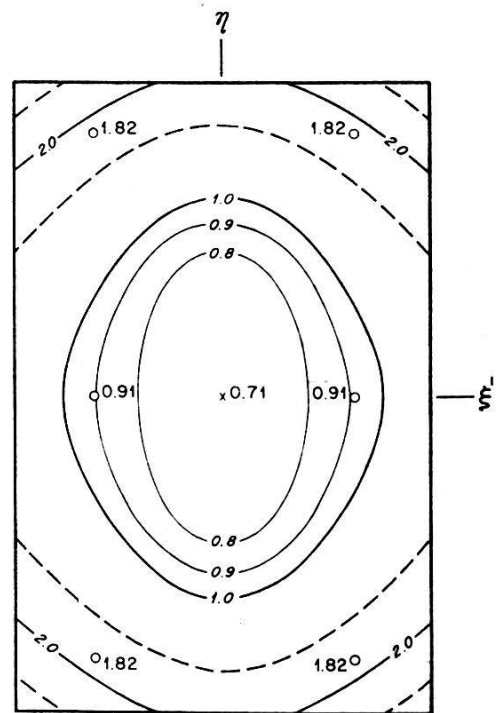


Abb. 5, Gl. (2.4):
Hallert, $s = r = 2$

Verteilung über das Bild der mittleren Fehler σ der visuellen Höhenparallaxen nach Abschluß der gegenseitigen Orientierung für drei im Text beschriebene Verfahren. Die Kreislein markieren die sechs Orientierungspunkte. *Annahmen:* Der mittlere Wegstellfehler der Höhenparallaxe be-

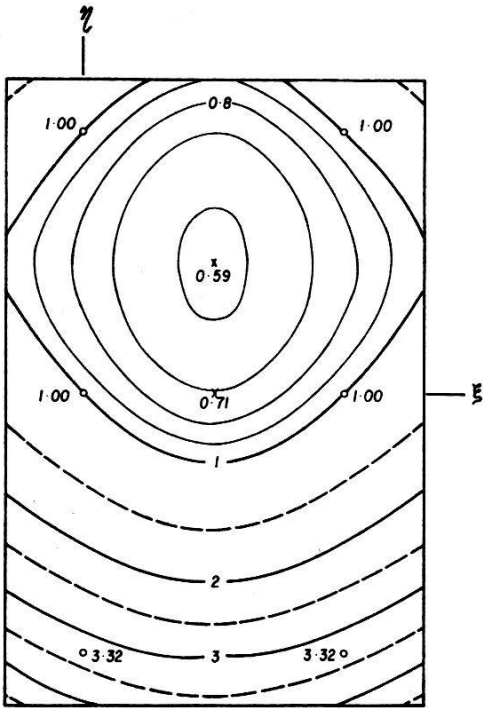


Abb. 6, Gl. (2.5):
Von Gruber, $r = 1$

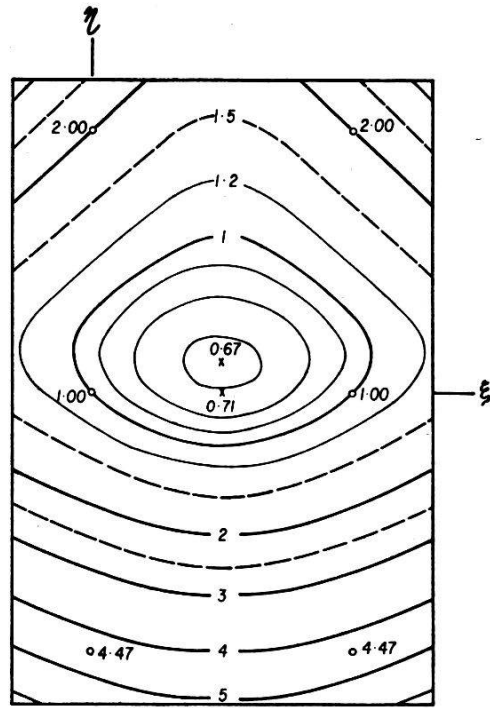


Abb. 7, Gl. (2.6):
Von Gruber, $r = 2$

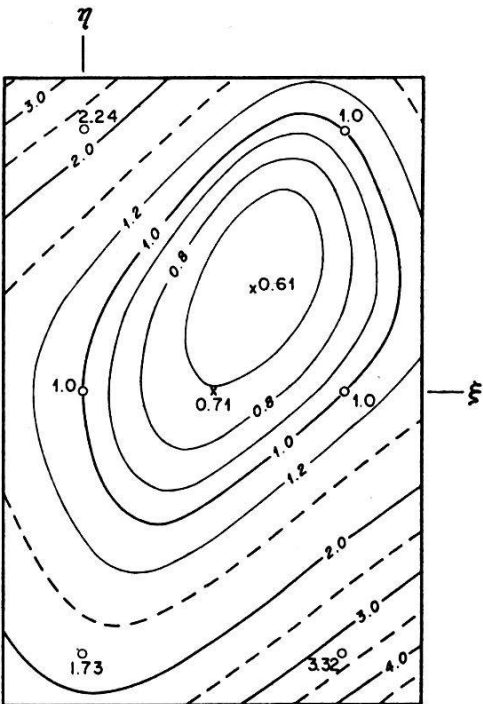


Abb. 8, Gl. (2.7):
Methode 2, $r = 1$

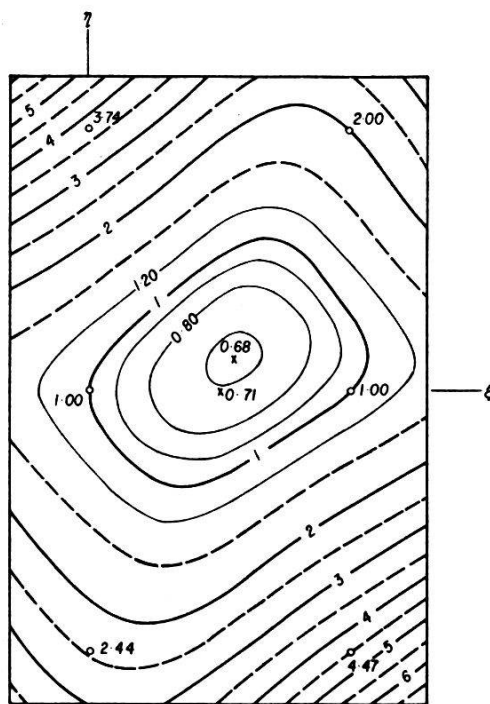


Abb. 9, Gl. (2.8):
Methode 2, $r = 2$

trage auf der Mittellinie $\sigma_0 = 1$, in den Randpunkten r . Im Ausgleichsverfahren (Hallert) werde in den Randpunkten bei der Wahl der Gewichte ein mittlerer Fehler s angenommen, der nicht gleich r zu sein braucht.

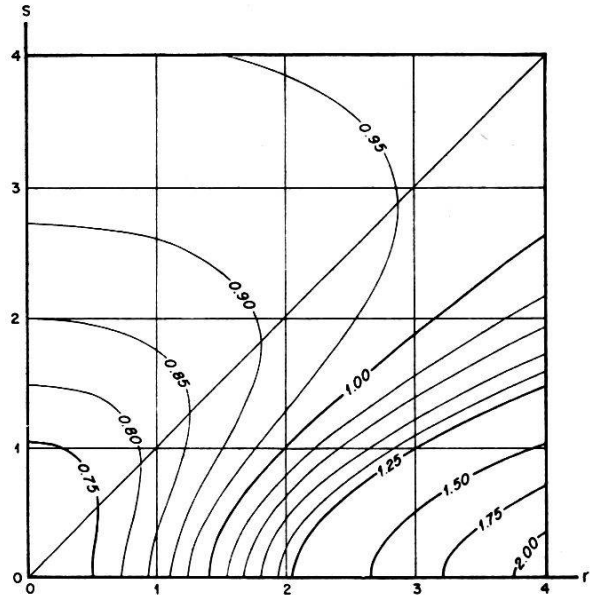


Abb. 10: Hallert, σ in Punkt 1 und 2 in Abhängigkeit von s und r

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = \frac{s^4 + 2s^2 + r^2 + 2}{(s^2 + 2)^2} \quad (2.9)$$

4. Maßstabsabgleichung und Einpassen des Kartenblattes

Nach vollendeter gegenseitiger Orientierung wird der Maßstab angeglichen und das Kartenblatt mit Hilfe von zwei Paßpunkten grob orientiert. Falls mehr als zwei oder drei Lagepaßpunkte zur Verfügung stehen, dürfte sich das hier zu beschreibende Verfahren lohnen.

Im Einpaßprotokoll werden wie üblich die Abweichungen der Punkte von der Sollage vektoriell eingezeichnet (zum Beispiel 0,5 mm in Richtung 8 Uhr). Das Rechenprogramm zerlegt diese Widerstände in ihre x - und y -Komponenten r_x , r_y und führt anschließend eine Helmert-Transformation mit Maßstabsänderung aus. Die auf den Schwerpunkt bezogenen Formeln für die Blattschiefungen $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ in x, y -Richtung, die relative Änderung β der Basis und den Verdrehungswinkel α lauten bekanntlich

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= -\frac{1}{n} [r_x] \quad , \quad \bar{\eta} = -\frac{1}{n} [r_y] \\ \beta &= \frac{[\bar{x}r_x + \bar{y}r_y]}{[\bar{x}^2 + \bar{y}^2]} \quad , \quad \alpha = -\frac{[-\bar{y}r_x + \bar{x}r_y]}{[\bar{x}^2 + \bar{y}^2]} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Das Programm liefert direkt den neuen Basiswert $b = b_0 + \beta b_0$ und für zwei oder auf Wunsch auch mehrere Punkte Richtung und Betrag der Restvektoren nach den Formeln

$$\varphi_v = \frac{1}{30} \arctg \frac{v_x}{v_y}$$

in Stunden des Zifferblattes mit 12h in y -Richtung,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

worin

$$v_x = \bar{\xi} - \bar{x}\beta - \bar{y}\alpha + r_x \quad (4.2)$$

$$v_y = \bar{\eta} - \bar{y}\beta + \bar{x}\alpha + r$$

die rechtwinkligen Komponenten sind.

Das Ablesen der Koordinaten geschieht beim B8 am besten auf mm genau in einem auf durchsichtige Folie gezeichneten Zentimeternetz, das auf die Karte gelegt wird (Abb. 11). Im Hinblick auf den nächsten Abschnitt wählt man die Achsen vorteilhaft parallel zu den Tischkanten, sonst aber beliebig. Die Produkte der Schwerpunktskoordination leiten sich aus den beliebigen Koordinaten nach (5.2) ab.

5. Die Modelldrehungen Φ und Ω

Die Höhen der Paßpunkte werden wie üblich abgelesen, die Klaffen z_i im Sinne abgelesene minus Sollhöhe im Protokoll eingetragen und anschließend rechnerisch die Steigungsfaktoren a und b einer ausgleichenden Ebene gefunden. Die Steigungsfaktoren dürfen mit genügender Genauigkeit als Arcuswerte der Korrekturwinkel genommen werden.

Formelmäßig ergibt sich für die Modellkippen

$$\Delta \Phi^g = - \frac{1000 \rho^g}{m} a$$

$$\Delta \Omega^g = - \frac{1000 \rho^g}{m} b$$

mit

(5.1)

$$a = \frac{1}{D} ([\bar{y}\bar{y}] [\bar{x}z] - [\bar{x}\bar{y}] [\bar{y}z])$$

$$b = \frac{1}{D} ([\bar{x}\bar{x}] [\bar{y}z] - [\bar{x}\bar{y}] [\bar{x}z])$$

$$c = \frac{1}{n} [z]$$

$$D = [\bar{x}\bar{x}] [\bar{y}\bar{y}] - n [\bar{x}\bar{y}]^2$$

m = Kartenmaßstabszahl

\bar{x}, \bar{y} = Schwerpunktskoordinaten der Paßpunkte, berechnet in einem auf die Karte aufgelegten Koordinatennetz x, y mit den Achsen parallel zu den Zeichentischkanten (Abb. 11)

n = Anzahl der Paßpunkte

— c = Schiebung des Glasmaßstabs. c ist nur der Vollständigkeit halber mit angeführt. Praktisch wird man den Glasmaßstab besser empirisch einstellen

ρ^g = der Faktor zur Umwandlung von Arcus auf Neugrad.

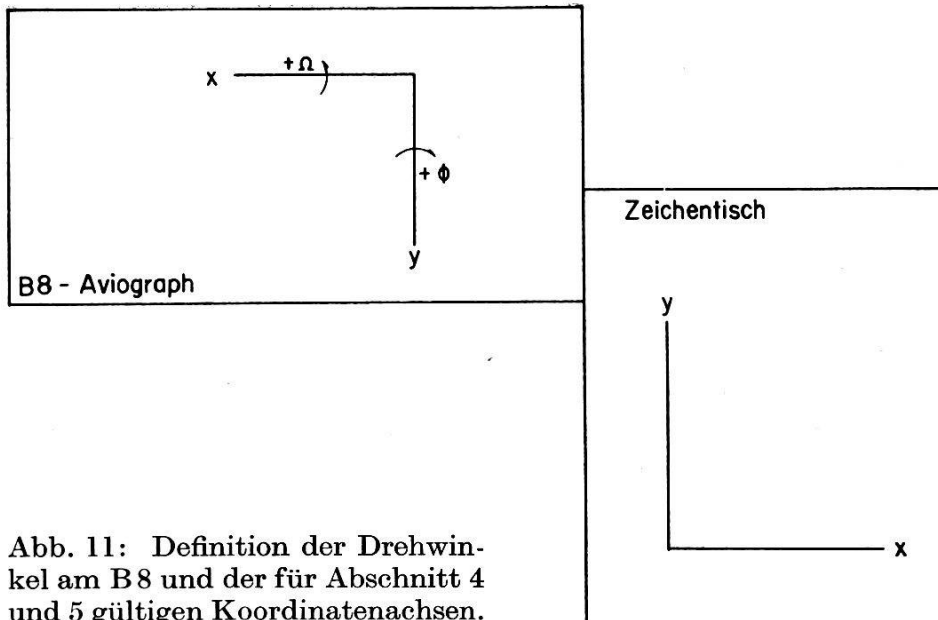


Abb. 11: Definition der Drehwinkel am B8 und der für Abschnitt 4 und 5 gültigen Koordinatenachsen.

Die Produktsummen der Schwerpunktskoordinaten werden im Rechenautomaten mit Vorteil in folgender Form berechnet:

$$\begin{aligned}
 [\bar{x}\bar{x}] &= [xx] - \frac{1}{n} [x]^2 & [\bar{x}z] &= [xz] - \frac{1}{n} [x] [z] \\
 [\bar{y}\bar{y}] &= [yy] - \frac{1}{n} [y]^2 & [\bar{y}z] &= [yz] - \frac{1}{n} [y] [z] \\
 [\bar{x}\bar{y}] &= [xy] - \frac{1}{n} [x] [y] & &
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Die x - und y -Werte müssen in Millimetereinheiten, die z in Metern in die Formeln eingesetzt werden. Das Programm liefert direkt die neuen Werte für Φ und Ω .

6. Herleitung der Formeln von Abschnitt 2

Jerie [4] gelangt zu seinen Formeln für die gegenseitige Orientierung bei gebirgigem Gelände, indem er nach der Methode der kleinsten Quadrate die *Modellparallaxen* minimalisiert. Dies ist dort einwandfrei, wo die Parallaxen im Modell beobachtet werden, also zum Beispiel bei Multiplexgeräten. In Auswertegeräten, in denen die Parallaxen in den Bildern weggestellt werden, müßte man genaugenommen die *Bildparallaxen* minimalisieren. Diese Unterscheidung dürfte in der Luftphotogrammetrie praktisch kaum ins Gewicht fallen. Wenn in Abschnitt 2 gleichwohl die nach Bildparallaxen ausgeglichenen Elemente angegeben werden, geschieht es mehr der theoretischen Perfektion als des praktischen Gewinnes wegen. Wie Jerie [4] schon andeutet, lassen sich beide Fälle in eine leichte Verallgemeinerung seiner Formeln einschließen.

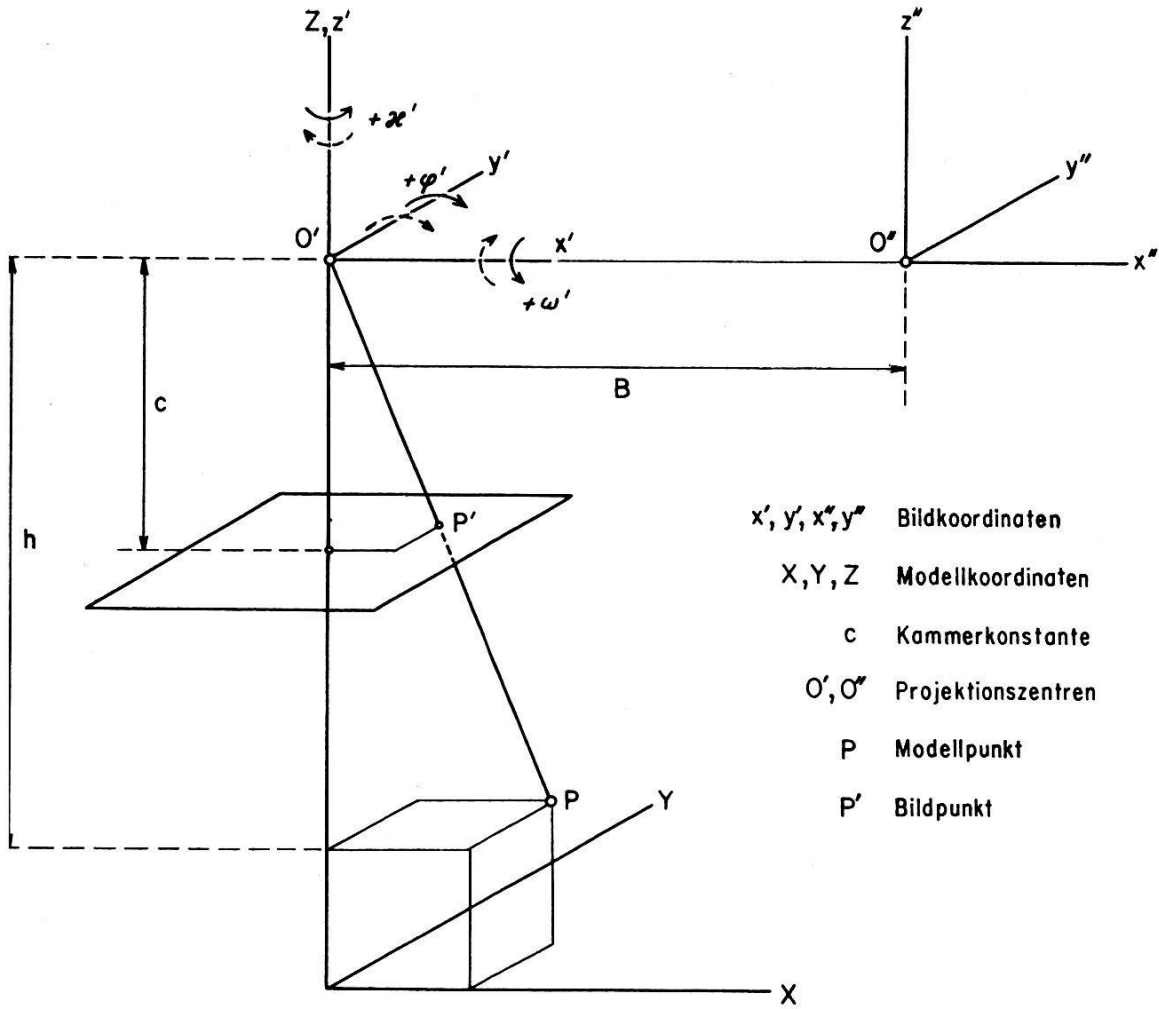


Abb. 12: Definition der Koordinaten und Drehwinkel bei Finnerwalder-Hofmann [5]. Die gestrichelten Drehwinkel gelten für den B 8.

Zwischen Modellparallaxen P und Bildparallaxen p besteht nämlich für den Normalfall die Beziehung

$$p = P \frac{c}{h}. \quad (6.1)$$

Die Beobachtungsgleichungen für die Bildparallaxen lauten

$$p_i + \Delta p_i = v_i. \quad (6.2)$$

Hierin ist p_i eine mit zufälligen Fehlern behaftete, beobachtete Bildparallaxe im Punkt i , in unserem Fall also $p_i = 0$, weil die Parallaxen in den Orientierungspunkten mit der ω' -Schraube einzeln weggeschafft werden. Δp_i sind von den Änderungen an den Orientierungselementen abhängige Parallaxkorrekturen und v_i zur Erhaltung der Widerspruchsfreiheit einzuführende Verbesserungen. Es wird angenommen, daß die Skalen der Orientierungsschrauben fehlerfrei abgelesen und die ausgeglichenen Werte fehlerfrei eingestellt werden können. Damit werden die Δp_i fehlerfrei.

Nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate soll $[v_i^2/s_i^2] = \text{Min.}$ werden, wobei wir einen variablen mittleren Wegstellfehler s_i , je nach Punktlage, zulassen. Entsprechend (6.1) gilt auch für die Restparallaxen in Bild und Modell $v_i = V_i c/h_i$, und dies in die Minimumbedingung eingesetzt ergibt:

$$\left[\frac{c^2}{s_i^2 h_i^2} V_i^2 \right] = \text{Min.}$$

Um die Bildparallaxen zu minimalisieren, darf man also die Beobachtungsgleichungen der *Modellparallaxen*

$$P_i + \Delta P_i = V_i \quad (6.3)$$

nehmen und diese mit dem Gewicht

$$g_i = \frac{c^2}{s_i^2 h_i^2} \quad (6.4)$$

(oder einer Proportionalen davon) ausgleichen. Jeries Formeln beziehen sich auf den Spezialfall $g_i = 1$. Ein Zurückblättern zu den Abbildungen 2 bis 5 und 10 macht jetzt auch deutlich, daß die kleine Gewichtsänderung bei Ausgleichen nach Bildparallaxen anstatt nach Modellparallaxen ohne praktische Konsequenzen auf den mittleren Fehler an den Restparallaxen ist, selbst bei stark gebirgigen Modellen.

Es seien $\kappa_i', \kappa_i'', \varphi_i', \varphi_i'', \omega_i'$ die Einstellungen der Orientierungselemente zur Wegschaffung der Parallaxe im Punkt i , ferner $\kappa', \kappa'', \varphi', \varphi'', \omega'$ die ausgeglichenen Elemente. Damit schreibt sich ΔP_i nach der bekannten Parallaxgleichung mit den Definitionen aus [5] (siehe Abb. 12) als

$$\begin{aligned} \Delta P_i = & - X_i (\kappa' - \kappa_i') + (X_i - B) (\kappa'' - \kappa_i'') + \frac{X_i Y_i}{h_i} (\varphi' - \varphi_i') \\ & - \frac{(X_i - B) Y_i}{h_i} (\varphi'' - \varphi_i'') - h_i \left(1 + \frac{Y_i^2}{h_i^2} \right) (\omega' - \omega_i') \end{aligned} \quad (6.5)$$

B ist die Basis, h_i die Flughöhe bezüglich des i -ten Orientierungspunktes, X_i, Y_i dessen Koordinaten, alles im Modell.

Beachtet man, daß $P_i = 0$ ist und daß die Parallaxen nur mit ω' weggestellt werden, also gilt

$$\begin{aligned} \kappa_i' &= \kappa_0' = \text{const.}, \kappa_i'' = \kappa_0'' = \text{const.}, \varphi_i' = \varphi_0' = \text{const.}, \\ \varphi_i'' &= \varphi_0'' = \text{const.}, \end{aligned}$$

so lautet die Verbesserungsgleichung in einem beliebigen Punkt i nach (6.3)

$$V_i = - X_i \kappa' + (X_i - B) \kappa'' + \frac{X_i Y_i}{h_i} \varphi' - \frac{(X_i - B) Y_i}{h_i} \varphi'' - h_i \left(1 + \frac{Y_i^2}{h_i^2} \right) \omega' + F_i \quad (6.6)$$

mit dem Absolutglied

$$F_i = X_i \kappa_0' - (X_i - B) \kappa_0'' - \frac{X_i Y_i}{h_i} \varphi_0' + \frac{(X_i - B) Y_i}{h_i} \varphi_0'' + h_i \left(1 + \frac{Y_i^2}{h_i^2} \right) \omega_i' \quad (6.7)$$

Für die sechs üblichen, zur gegenseitigen Orientierung benützten Punkte ist links $X_i = 0$, rechts $X_i = B$, auf der Mittellinie $Y_i = 0$ und am obern und untern Rande $Y_i/h_i = \pm a/c = \text{const.}$ Setzt man noch der Kürze halber $e = c + a^2/c$, so gelangt man auf die sechs Fehlergleichungen

$$\begin{aligned} V_1 &= - B \kappa'' && - h_1 \omega' &+ F_1 \\ V_2 &= - B \kappa' && - h_2 \omega' &+ F_2 \\ V_3 &= - B \kappa'' &+ \frac{Ba}{c} \varphi'' &- \frac{e}{c} h_3 \omega' &+ F_3 \\ V_4 &= - B \kappa' &+ \frac{Ba}{c} \varphi' &- \frac{e}{c} h_4 \omega' &+ F_4 \\ V_5 &= - B \kappa'' &- \frac{Ba}{c} \varphi'' &- \frac{e}{c} h_5 \omega' &+ F_5 \\ V_6 &= - B \kappa' &- \frac{Ba}{c} \varphi' &- \frac{e}{c} h_6 \omega' &+ F_6 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Das System gleicht man am einfachsten bedingt aus. Dazu bildet man zunächst

$$\begin{aligned} - 2V_1 + V_3 + V_5 &= A_1 \omega' + B_1 \\ - 2V_2 + V_4 + V_6 &= A_2 \omega' + B_2 \end{aligned} \quad (6.9)$$

mit den Abkürzungen

$$A_1 = 2 h_1 - \frac{e}{c} (h_3 + h_5)$$

$$A_2 = 2 h_2 - \frac{e}{c} (h_4 + h_6)$$

$$B_1 = - 2 F_1 + F_3 + F_5 = - 2 h_1 \omega_1' + \frac{e}{c} (h_3 \omega_3' + h_5 \omega_5')$$

$$B_2 = - 2 F_2 + F_4 + F_6 = - 2 h_2 \omega_2' + \frac{e}{c} (h_4 \omega_4' + h_6 \omega_6')$$

Offenbar ergeben sich, wenn nur die Punkte 1, 3, 5 beziehungsweise 2, 4, 6 beigezogen werden, für ω' die Näherungswerte

$$\omega_{01}' = -\frac{B_1}{A_1} \quad \text{bzw.} \quad \omega_{02}' = -\frac{B_2}{A_2}.$$

Die Gleichungen (6.9) lassen sich damit auch anschreiben als

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1}(-2V_1 + V_3 + V_5) &= \omega' - \omega_{01}' \\ \frac{1}{A_2}(-2V_2 + V_4 + V_6) &= \omega' - \omega_{02}' \end{aligned} \quad (6.9')$$

Die einzige *Bedingungsgleichung* findet man daraus durch Subtrahieren als

$$\frac{1}{A_1}(-2V_1 + V_3 + V_5) - \frac{1}{A_2}(-2V_2 + V_4 + V_6) + w = 0 \quad (6.10)$$

mit dem Widerspruch $w = \omega_{01}' - \omega_{02}'$. Daraus leitet sich, wenn man noch die Abkürzungen

$$C_1 = \frac{4}{g_1} + \frac{1}{g_3} + \frac{1}{g_5}, \quad C_2 = \frac{4}{g_2} + \frac{1}{g_4} + \frac{1}{g_6}$$

und

$$G_1 = \frac{A_1^2}{C_1}, \quad G_2 = \frac{A_2^2}{C_2}$$

einführt, die *Korrelatennormalgleichung*

$$\left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right) k + w = 0$$

ab, die für die Korrelate den Wert

$$k = -\frac{w}{\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}}$$

liefert. Die Verbesserungen werden

$$V_1 = -\frac{2k}{g_1 A_1}, \quad V_3 = \frac{k}{g_3 A_1}, \quad V_5 = \frac{k}{g_5 A_1}$$

$$V_2 = \frac{2k}{g_2 A_2}, \quad V_4 = -\frac{k}{g_4 A_2}, \quad V_6 = -\frac{k}{g_6 A_2}$$

Addieren der beiden Gleichungen (6.9') und Einsetzen der V_i und k führt dann auf

$$\omega' = \frac{G_1 \omega_{01}' + G_2 \omega_{02}'}{G_1 + G_2}$$

ω' ist also in der bekannten Weise (Kasper [3]) das Gewichtsmittel aus den ω' -Werten der linken und rechten Punktreihe.

Aus der zweiten beziehungsweise ersten Gleichung von (6.8) ergeben sich

$$\kappa' = \kappa_0' + \frac{h_2}{B} (\omega_2' - \omega') - \frac{2k}{Bg_2 A_2}$$

$$\kappa'' = \kappa_0'' + \frac{h_1}{B} (\omega_1' - \omega') + \frac{2k}{Bg_1 A_1}$$

und aus $V_4 - V_6$ beziehungsweise $V_3 - V_5$

$$\varphi' = \varphi_0' - \frac{e}{2Ba} [h_4(\omega_4' - \omega') - h_6(\omega_6' - \omega')] - \frac{ck}{2Ba A_2} \left(\frac{1}{g_4} - \frac{1}{g_6} \right)$$

$$\varphi'' = \varphi_0'' - \frac{e}{2Ba} [h_3(\omega_3' - \omega') - h_5(\omega_5' - \omega')] + \frac{ck}{2Ba A_1} \left(\frac{1}{g_3} - \frac{1}{g_5} \right)$$

Um zu den Gleichungen (1.1) und (1.2) für den B8 zu gelangen, bemerkt man, daß am B8 (Abb. 12) κ und ω umgekehrt definiert sind wie in [5]; das heißt, man ersetze in allen Gleichungen ω' , κ' , κ'' durch $-\omega'$, $-\kappa'$, $-\kappa''$. Ferner wird für alle Punkte $s_i = 1$ angenommen.

7. Herleitung der Formeln in Abschnitt 3 für die mittleren Fehler an den Restparallaxen

Es sei vorausgeschickt, daß für alle drei Verfahren nur das ebene Modell betrachtet wird. Die Parallaxgleichung lautet dann nach (6.1) und (6.5) für die Bildparallaxe im Punkt x, y

$$p = -x\kappa' + (x-b)\kappa'' + \frac{xy}{c}\varphi' - \frac{(x-b)y}{c}\varphi'' - c\left(1 + \frac{y^2}{c^2}\right)\omega' \quad (7.1)$$

Bezüglich der Symbolik bemerken wir, daß p für die Höhenparallaxe im Punkt x, y steht und daß die Orientierungswinkel κ', κ'' usw. als vom orientierten Wert aus gezählt angenommen werden. Es erweist sich im folgenden als vorteilhaft, die Verhältnisse

$$\xi = \frac{x}{b}, \quad \eta = \frac{y}{a}$$

einzuführen. Damit schreibt sich p als

$$p = -\xi b \kappa' + (\xi - 1) b \kappa'' + \xi \eta \frac{ab}{c} \varphi' - (\xi - 1) \eta \frac{ab}{c} \varphi'' - \left(c + \frac{a^2}{c} \eta^2 \right) \omega' \quad (7.2)$$

Die Gleichungen (7.1) heißen in den sechs Orientierungspunkten

$$\begin{aligned} p_1 &= -b \kappa'' && -c \omega' \\ p_2 &= -b \kappa' && -c \omega' \\ p_3 &= -b \kappa'' && + \frac{ab}{c} \varphi'' - e \omega' \\ p_4 &= -b \kappa' && + \frac{ab}{c} \varphi' - e \omega' \\ p_5 &= -b \kappa'' && - \frac{ab}{c} \varphi'' - e \omega' \\ p_6 &= -b \kappa' && - \frac{ab}{c} \varphi' - e \omega' \end{aligned} \quad (7.3)$$

Wie schon früher gilt die Abkürzung

$$e = c + \frac{a_2}{c} \quad (7.4)$$

1) Das Hallertsche Verfahren

Aus den Gleichungen (7.3) entnimmt man die Beziehungen

$$\begin{aligned} 2 \bar{p}_1 + 2 \bar{p}_2 - \bar{p}_3 - \bar{p}_4 - \bar{p}_5 - \bar{p}_6 &= \frac{4 a^2}{c} \omega' \\ \bar{p}_3 - \bar{p}_5 &= \frac{2 ab}{c} \varphi'' \quad , \quad \bar{p}_4 - \bar{p}_6 = \frac{2 ab}{c} \varphi' \\ -b \kappa'' &= \bar{p}_1 + c \omega' \quad , \quad -b \kappa' = \bar{p}_2 + c \omega' \end{aligned} \quad (7.5)$$

κ', κ'' usw. sollen hier die Bedeutung von ausgeglichenen Werten haben, ebenso die \bar{p}_i . Durch Einsetzen von (7.5) in (7.2) und mit der Transformation $\xi = \xi' + \frac{1}{2}$, $\xi - 1 = \xi' - \frac{1}{2}$ wird man auf die Gleichung geführt:

$$p = \frac{\eta^2}{4} (-2\bar{p}_1 - 2\bar{p}_2 + \bar{p}_3 + \bar{p}_4 + \bar{p}_5 + \bar{p}_6) + \frac{\xi'\eta}{2} (-\bar{p}_3 + \bar{p}_4 + \bar{p}_5 - \bar{p}_6) + \frac{\eta}{4} (\bar{p}_3 + \bar{p}_4 - \bar{p}_5 - \bar{p}_6) + \xi' (-\bar{p}_1 + \bar{p}_2) + \frac{1}{2} (\bar{p}_1 + \bar{p}_2) \quad (7.6)$$

Diese Gleichung drückt die Parallaxe im beliebigen Punkt ξ', η aus als Funktion der *ausgeglichenen* Parallaxen in den Punkten 1 bis 6.

Um das Fehlerfortpflanzungsgesetz in seiner speziellen Form anwenden zu können, schreiben wir die Gleichung (7.6) auf beobachtete Parallaxen p_i um nach der Beziehung $p_i + v_i = \bar{p}_i$. Die v_i gewinnt man durch Anschreiben von (7.3) in den \bar{p}_i und ausgleichendes Auflösen.

Die sechs Fehlergleichungen heißen:

$$\begin{aligned} v_1 &= -b\kappa'' && -c\omega' - p_1 \\ v_2 &= -b\kappa' && -c\omega' - p_2 \\ v_3 &= -b\kappa'' && + \frac{ab}{c}\varphi'' - e\omega' - p_3 \\ v_4 &= -b\kappa' && + \frac{ab}{c}\varphi' - e\omega' - p_4 \\ v_5 &= -b\kappa'' && - \frac{ab}{c}\varphi'' - e\omega' - p_5 \\ v_6 &= -b\kappa' && - \frac{ab}{c}\varphi' - e\omega' - p_6 \end{aligned} \quad (7.7)$$

Anstatt sie direkt zu lösen, bemerken wir, daß sie die gleiche Gestalt wie (6.8) haben; also können die weiteren Formeln von dorthier übernommen werden, wenn man nur die Ersetzungen macht

$$V_i \rightarrow v_i, \quad B \rightarrow b, \quad h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h_5 = h_6 \rightarrow c, \quad F_i \rightarrow -p_i,$$

fernerhin annimmt, daß

$$s_1 = s_2 = 1, \quad s_3 = s_4 = s_5 = s_6 = s$$

und beachtet, daß

$$\begin{aligned}
 g_1 &= g_2 = 1 \quad , \quad g_3 = g_4 = g_5 = g_6 = 1/s^2 \quad , \\
 A_1 &= A_2 = A \quad , \\
 B_1 &= 2 p_1 - p_3 - p_5 \quad , \quad B_2 = 2 p_2 - p_4 - p_6 \quad , \\
 C_1 &= C_2 = C = 2 (2 + s^2) \quad , \\
 G_1 &= G_2 = G = A^2/C \quad , \\
 w &= \frac{1}{A} (-B_1 + B_2) \quad , \quad k = -\frac{A}{2C} (-B_1 + B_2) \quad , \\
 v_1 &= \frac{-2 p_1 + 2 p_2 + p_3 - p_4 + p_5 - p_6}{2 (2 + s^2)} \quad , \\
 v_1 &= -v_2 \quad , \quad v_3 = v_5 = -v_4 = -v_6 \quad .
 \end{aligned}$$

Dann werden die Koeffizienten in (7.6)

$$\begin{aligned}
 -2\bar{p}_1 - 2\bar{p}_2 + \bar{p}_3 + \bar{p}_4 + \bar{p}_5 + \bar{p}_6 &= -2p_1 - 2p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 \quad , \\
 -\bar{p}_3 + \bar{p}_4 + \bar{p}_5 - \bar{p}_6 &= -p_3 + p_4 + p_5 - p_6 \quad , \\
 \bar{p}_3 + \bar{p}_4 - \bar{p}_5 - \bar{p}_6 &= p_3 + p_4 - p_5 - p_6 \quad , \\
 -\bar{p}_1 + \bar{p}_2 &= -p_1 + p_2 - 2v_1 = \frac{s^2}{2+s^2} (-p_1 + p_2) + \frac{1}{2+s^2} (-p_3 + p_4 - p_5) \quad , \\
 \bar{p}_1 + \bar{p}_2 &= p_1 + p_2
 \end{aligned}$$

und p nimmt die Form an:

$$\begin{aligned}
 p &= \left(\frac{1}{2} - \frac{s^2}{2+s^2} \xi' - \frac{\eta^2}{2} \right) p_1 \\
 &+ \left(\frac{1}{2} + \frac{s^2}{2+s^2} \xi' - \frac{\eta^2}{2} \right) p_2 \\
 &+ \left(-\frac{1}{2+s^2} \xi' - \frac{1}{2} \xi' \eta' + \frac{\eta}{4} + \frac{\eta^2}{4} \right) p_3 \\
 &+ \left(\frac{1}{2+s^2} \xi' + \frac{1}{2} \xi' \eta' + \frac{\eta}{4} + \frac{\eta^2}{4} \right) p_4 \\
 &+ \left(-\frac{1}{2+s^2} \xi' + \frac{1}{2} \xi' \eta' - \frac{\eta}{4} + \frac{\eta^2}{4} \right) p_5 \\
 &+ \left(\frac{1}{2+s^2} \xi' - \frac{1}{2} \xi' \eta' - \frac{\eta}{4} + \frac{\eta^2}{4} \right) p_6
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

Postuliert man die Beobachtungen p_i als unabhängig und behaftet mit dem mittleren Fehler σ_0 entlang der Mittellinie und $r\sigma_0$ für die obern und untern Randpunkte, so darf man das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz anwenden und erhält als Formel für σ in einem beliebigen Punkt ξ', η :

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = \frac{r^2 + 2}{4} \eta^4 + r^2 \xi'^2 \eta^2 + 2 \frac{2r^2 + s^4}{(2 + s^2)^2} \xi'^2 + \frac{r^2 - 4}{4} \eta^2 + \frac{1}{2} \quad (7.9)$$

Durch Spezialisieren in r und s ergeben sich die Gleichungen (2.1) bis (2.4). Gleichung (2.9) folgt mit $\xi' = \pm \frac{1}{2}$, $\eta = 0$.

Dem aufmerksamen Leser dieses Abschnitts wird es aufgefallen sein, daß der mittlere Fehler an der ausgeglichenen Parallaxe berechnet wurde, anstatt, wie es das Problem fordert, an der Restparallaxe nach Anbringen der Orientierungskorrekturen. Er wird sich aber leicht von der Gleichheit dieser beiden mittleren Fehler überzeugen.

2) Das Von-Grubersche Verfahren

Hier und beim nächsten Verfahren wollen wir bezüglich der Schreibweise die folgende Vereinbarung treffen:

(1) Die Parallaxe in den Orientierungspunkten werde mit einem Doppelindex geschrieben (p_{ik}). Der erste Index gibt die Punktnummer an, der zweite Index wird bei jeder Parallaxablesung um Eins erhöht.

(2) Die Orientierungselemente werden, beginnend mit Null, mit einem Index geschrieben, der sich bei jeder Änderung des Elements um Eins erhöht.

Wenn man nun anhand der Gleichungen (7.3) der Vorschrift von Abschnitt 3 folgt, gelangt man Schritt für Schritt auf folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} -b\kappa_1'' &= p_{11} + c\omega_0' \\ -b\kappa_1' &= p_{22} + c\omega_0' \\ \frac{ab}{c} \varphi_1'' &= p_{33} + b\kappa_1'' + e\omega_0' \\ \frac{ab}{c} \varphi_1' &= p_{44} + b\kappa_1' + e\omega_0' \\ e\omega_1' &= -p_{55} - b\kappa_1'' - \frac{ab}{c} \varphi_1'' \\ \omega_2' &= \omega_0' + \bar{v}(\omega_1' - \omega_0') = (1 - \bar{v})\omega_0' + \bar{v}\omega_1' \\ -b\kappa_2'' &= p_{16} + c\omega_2' \\ -b\kappa_2' &= p_{27} + c\omega_2' \\ \frac{ab}{c} \varphi_2'' &= p_{38} + b\kappa_2'' + e\omega_2' \\ \frac{ab}{c} \varphi_2' &= p_{49} + b\kappa_2' + e\omega_2' \end{aligned} \quad (7.10)$$

Obschon die Parallaxen p_{ik} jedesmal zu Null gemacht werden, sind es dennoch Beobachtungen, die im Hinblick auf die spätere Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes in den Formeln mitgeführt werden müssen. Man darf sie sich als sehr kleine Größen, als wahre Fehler, vorstellen.

Man setze nun aus (7.10) die Endwerte $\omega_2', \kappa_2'', \kappa_2', \varphi_2'', \varphi_2'$ in (7.2) ein und gelangt nach einigen Umformungen, wenn man noch beachtet, daß

$$e = \frac{a^2 + c^2}{c}, \quad e - c = \frac{a^2}{c}, \quad 2c - e = \frac{c^2 - a^2}{c} \quad (7.11)$$

$$\bar{v} = \frac{a^2 + c^2}{2a^2}$$

gilt, auf den Ausdruck für die Restparallaxe in einem beliebigen Punkt ξ, η :

$$p = -\eta(\eta - 1)p_{11} + \frac{1}{2}\eta(\eta - 1)p_{33} + \frac{1}{2}\eta(\eta - 1)p_{55} \quad (7.12)$$

$$+ (\xi - 1)(\eta - 1)p_{16} - \xi(\eta - 1)p_{27} - \eta(\xi - 1)p_{38} + \xi\eta p_{49}$$

Darauf wende man das Fehlerfortpflanzungsgesetz an. Wie schon unter 1) nehme man den mittleren Wegstellfehler auf der Basislinie als σ_0 und am Rande als $r\sigma_0$ an und gelangt dann auf

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = \frac{r^2 + 2}{2}\eta^2(\eta - 1)^2 + [(\xi - 1)^2 + \xi^2][(\eta - 1)^2 + r^2\eta^2] \quad (7.13)$$

Für $r = 1$ wird daraus

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = \frac{3}{2}\eta^2(\eta - 1)^2 + [(\xi - 1)^2 + \xi^2][(\eta - 1)^2 + \eta^2] \quad (7.14)$$

$$= (2.5)$$

oder in symmetrischen Koordinaten $\xi' = \xi - \frac{1}{2}, \eta' = \eta - \frac{1}{2}$

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = \frac{3}{2}\eta'^4 + 4\xi'^2\eta'^2 + \xi'^2 + \frac{1}{4}\eta'^2 + \frac{11}{32} \quad (7.15)$$

Für $r = 2$ lautet die Gleichung entsprechend (2.6).

3) Methode 2

Genau wie beim Von-Gruberschen Verfahren wenden wir die Orientierungsvorschrift von Abschnitt 3 auf die Gleichungen (7.3) an. Das ergibt:

$$e\omega_1' = -p_{31} - b\kappa_0'' + \frac{ab}{c}\varphi_0''$$

$$e\omega_2' = -p_{52} - b\kappa_0'' - \frac{ab}{c}\varphi_0''$$

$$\begin{aligned}
\omega_3' &= \frac{1}{2} (\omega_1' + \omega_2') \\
\frac{ab}{c} \varphi_1'' &= -p_{53} - b\kappa_0'' - e\omega_3' \\
c\omega_4' &= -p_{14} - b\kappa_0'' \\
\omega_5' &= \omega_3' + \frac{c^2}{\alpha^2} (\omega_3' - \omega_4') \\
-b\kappa_1'' &= p_{15} + c\omega_5' \\
-b\kappa_1' &= p_{26} + c\omega_5' \\
\frac{ab}{c} \varphi_1' &= p_{47} + b\kappa_1' + e\omega_5'
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Einsetzen der Werte von φ_1'' , ω_5' , κ_1'' , κ_1' , φ_1' aus (7.16) in (7.2) führt nach einigen Umformungen auf

$$\begin{aligned}
p &= \eta \left(-\xi + \frac{\eta}{2} + \frac{1}{2} \right) (p_{31} + p_{52}) + \eta (\xi - 1) p_{53} \\
&+ \eta (\xi - \eta) p_{14} - (\xi - 1) p_{15} - \xi (\eta - 1) p_{26} + \xi \eta p_{47}
\end{aligned} \tag{7.17}$$

und darauf das Fehlerfortpflanzungsgesetz angewandt, ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} &= 2r^2 \eta^2 \left(-\xi + \frac{\eta}{2} + \frac{1}{2} \right)^2 + r^2 \eta^2 (\xi - 1)^2 + \eta^2 (\xi - \eta)^2 \\
&+ (\xi - 1)^2 + \xi^2 (\eta - 1)^2 + r^2 \xi^2 \eta^2
\end{aligned} \tag{7.18}$$

oder auch

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} &= \frac{1}{2} (r^2 + 2) \eta^4 + 2(2r^2 + 1) \xi^2 \eta^2 - 2(r^2 + 1) \xi \eta^3 \\
&- 2\xi^2 \eta - 4r^2 \xi \eta^2 + r^2 \eta^3 + 2\xi^2 + \frac{3}{2} r^2 \eta^2 - 2\xi + 1
\end{aligned} \tag{7.19}$$

Die Gleichungen für die Spezialfälle $r = 1$ beziehungsweise $r = 2$ findet man als (2.7) beziehungsweise (2.8).

Eine leichte Abänderung resultiert, wenn man φ'' nicht in Punkt 5, sondern in *Punkt 3* wegstellt. Die entsprechende Gleichung in (7.10) lautet dann

$$\frac{ab}{c} \varphi_1'' = p_{33} + b\kappa_0'' + e\omega_3'$$

während sonst alles gleichbleibt. Man erhält für die Verteilung des mittleren Fehlers

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = \frac{1}{2} r^2 \eta^2 (\eta - 1)^2 + r^2 \eta^2 (\xi - 1)^2 + \eta^2 (\xi - \eta)^2 + (\xi - 1)^2 + \xi^2 (\eta - 1)^2 + r^2 \xi^2 \eta^2 \quad (7.20)$$

Es stellt sich heraus, daß sich, verglichen mit Abbildung 8 und 9 – abgesehen von einer Vertauschung der Werte in den Punkten 3 und 5 –, in den Orientierungspunkten nichts ändert, insbesondere also der Maximalwert nicht. Das Kurvenbild im Bereiche innerhalb der Orientierungspunkte zeigt nur unbedeutende Abweichungen von (7.18) und ist darum nicht wiedergegeben.

8. Zur Praxis des Verfahrens

Der Verfasser erprobte das Verfahren an einigen zum Teil gebirgigen Modellen.

Bei der *gegenseitigen Orientierung* waren nie mehr als zwei Durchgänge notwendig. Die nach dem zweiten Durchgang verbleibenden Restparallaxen beliefen sich im Maximum auf etwa eine halbe Punktmarke. Dies darf als der Hauptvorteil der rechnerischen Lösung angesehen werden: *die kleinen Restparallaxen in allen Randpunkten*. An Stellen ungenügender Bilddefinition, zum Beispiel an den Bildrändern oder in Waldgebieten, wurde die Parallaxe in drei verschiedenen, nahe beieinanderliegenden Punkten weggestellt und im Kopf der Mittelwert der ω' -Ableesungen gebildet.

Dem Verfasser fiel auf, daß die Restparallaxen auf der Mittellinie eher größer waren, als man es von den optisch-mechanischen Verfahren her gewohnt ist. Die Erklärung dafür kann nicht bei den theoretisch zu erwartenden Restparallaxen (Abb. 2 bis 5) gefunden werden, sondern liegt wohl in der mangelnden Ablesegenauigkeit der κ -Skalen bei dem zur Verfügung stehenden B8. Eine kleine Rechnung lehrt, daß einer 6fachen Bildvergrößerung, einer Sehschärfe von $1'$ und einer Bildbasis von 10 cm eine Einstellgenauigkeit von κ von $0,8^\circ$ entspricht. Dieser Wert müßte zumindest halbiert werden, damit die Ungenauigkeit der κ -Ableseung nicht als Restparallaxe sichtbar wird. Die tatsächliche Ablesegenauigkeit am B8 aber beträgt ungefähr 1° .

Bei der *Maßstabsabgleichung und Blatt Drehung* lohnt sich das analytische Verfahren nur, wenn auf eine größere Zahl von Paßpunkten abgeglichen werden muß, etwa von vier an aufwärts. Die Formeln liefern sofort das endgültige Resultat.

Eine ähnliche Bemerkung gilt für die *Modell Drehungen*. Das rechnerische Verfahren ist hier besonders im Falle von unregelmäßig verteilten Paßpunkten vorzuziehen. In allen vom Verfasser untersuchten Modellen

ergab die erste, große Modelldrehung sogleich die endgültigen Φ - und Ω -Werte. Verglichen mit dem herkömmlichen Probieren war der Zeitgewinn bedeutend.

Zum Schluß seien noch einige Worte den *Computer* betreffend angefügt. Die Speicherkapazität der *Hewlett-Packard 9100 A* ist mit 16 Zahlenregistern, die teilweise vom Programm besetzt werden, etwas knapp. Die Programme mußten daher in zwei Teile aufgespalten werden. Rechen-technisch ist das kein großer Nachteil. Schlimmer ist, daß aus Platzmangel die gleichen Eingabewerte bei allen drei Programmen zweimal eingetastet werden müssen. Die Rechengenauigkeit ist mit 10 geltenden Dezimalziffern kein Problem.

Eine für den Zweck ideale Maschine wäre das Modell 9100 B der gleichen Firma, das einen doppelt so großen Speicher, also 32 Zahlenregister, besitzt und bei dem sich das zweimalige Eintasten erübrigen dürfte.

Um auf die am Anfang gestellte Frage zurückzukommen: Der Verfasser glaubt, daß die rechnerischen Verfahren zur Orientierung von Luftaufnahmen beim Einsatz von Tischcomputern durchaus konkurrenzfähig sind. Sie dürften besonders beim Anfänger wegen ihres mechanischen Ablaufs an Beliebtheit gewinnen. Ob der geübte Auswerter die herkömmlichen zugunsten der rechnerischen Verfahren aufgeben wird, wagt der Verfasser nicht zu prophezeien, sondern möchte die Auswertepaxis darüber entscheiden lassen.

9. Anwendung bei der Aerotriangulation

Bei der Aerotriangulation nach *unabhängigen Bildpaaren* dienen als Bausteine am Auswertegerät gegenseitig orientierte Einzelmodelle, aus denen rechnerisch Streifen oder Blöcke aufgebaut werden, die dann, unter Zulassung von Verformungen, in ein Paßpunktfeld nach einer geeigneten Methode eingepaßt werden. Weil aus schlechten Bausteinen kein festes Gebäude errichtet werden kann, besteht die Forderung nach möglichst guter gegenseitiger Orientierung jedes Bildpaares, damit die Modelldeformationen klein bleiben. Hier liegt offensichtlich ein Fall vor, wo die *gegenseitige Orientierung nach kleinsten Quadraten* neben praktischen auch bedeutende theoretische Vorteile bieten dürfte. Es läßt sich vermuten, daß bei den optisch-mechanischen Verfahren die Modelldeformationen in gewissen Punkten größere Werte annehmen, als wenn nach kleinsten Quadraten orientiert wird, oder doch, daß die Verformung aller Modelle einem gewissen, im Verfahren begründeten, unsymmetrischen Muster folgt und als systematischer Fehler in die Blockausgleichung eingeht.

Zur genauen Klärung der Frage müßten ähnliche Überlegungen bezüglich der mittleren Fehler an den X-, Y- und vor allem Z-Koordinaten angestellt werden, wie es in diesem Artikel für die Höhenparallaxen geschehen ist. Diese Fehler müßten dann in ihren zufälligen und systematischen Auswirkungen auf den Blockverband hin untersucht werden. Für die zufälligen Fehler ist das bereits von Ackermann in [6], [7] und [8] weitgehend geleistet worden. Nach Wissen des Verfassers stehen hingegen

derartige Untersuchungen über die systematischen Einflüsse erst am Anfang (siehe [9] und [10]).

Literaturhinweise

- [1] *Bachmann W. K.*: Théorie des erreurs de l'orientation relative. Thèse Ecole d'Ingénieurs de Lausanne, 1943.
- [2] *Hallert B.*: Über die Herstellung photogrammetrischer Pläne. Diss. Stockholm, 1944.
- [3] *Kasper H.*: Ein numerisches Verfahren des Folgebildanschlusses für gebirgiges Gelände. Schw. Z. f. V. u. K. T., Nr. 4, 1950.
- [4] *Jerie H. G.*: Beitrag zu numerischen Verfahren für gebirgiges Gelände. Photogrammetria, Vol. 10–11, 1953/54.
- [5] *Finstervalder-Hofmann*: Photogrammetrie. De Gruyter, Berlin 1968, 3. Aufl.
- [6] *Ackermann F.*: On the theoretical accuracy of planimetric block triangulation. Photogrammetria 21, 145–170, 1966.
- [7] *Ackermann F.*: Theoretische Beispiele zur Lagegenauigkeit ausgeglichener Blöcke. BuL 35, 114–122, 1967.
- [8] *Ackermann F.*: Gesetzmäßigkeiten der absoluten Lagegenauigkeit von Blöcken. BuL 36, 3–15, 1968.
- [9] *Ackermann F.*: Aerotriangulation mit unabhängigen Modellen. BuL 38, 198–206, 1970.
- [10] *Ebner H., Wagner W.*: Aerotriangulation mit unabhängigen Modellen am Planimat von Zeiss. BuL 38, 249–257, 1970.