Zeitschrift: Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

Band: 78 (1980)

Heft: 10

Artikel: Anwendung von Interpolationsverfahren in der Landestriangulation

Autor: Carosio, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-230183

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

destens eine teilweise, besser aber eine umfassende Verbauung zur Folge haben müssen.
Trotz der grossen Rutschmassen und eindrücklichen Schäden verlief der Bergrutsch von Flühli recht harmlos, wenn man bedenkt, wie rasch solche Felsmassen zu Tal fahren können (Bergrutsch von Goldau). Die Situation wurde auch durch die Topografie gemildert, durch welche verhindert wurde, dass das Geröll direkt hinunter auf die dicht besiedelte Talsohle der Waldemme fahren konnte (Abb.1). Damit könnte man beinahe sagen, der Wunsch auf dem Kreuz in der Nähe der Einmündung des Hellschwandbaches in die Waldemme habe sich erfüllt: ‹Bhüet Gott Land und Lüt!›

Adresse des Verfassers:
Fritz Zollinger, dipl. Kulturing. ETH
Institut für Kulturtechnik, ETH-Hönggerberg,
CH-8093 Zürich

Anwendung von Interpolationsverfahren in der Landestriangulation

A. Carosio

Interpolationsverfahren werden in der Triangulation immer mehr angewandt, um heterogene lokale Punktfelder in ein übergeordnetes System zu integrieren. Das Bundesamt für Landestopographie hat bei der Erneuerung der Triangulation in der Westschweiz die Interpolation nach kleinsten Quadraten verwendet (Programm QUINT). Die vorliegende Arbeit beschreibt das zugrundeliegende mathematische Modell und gibt Hinweise auf die Wahl der Interpolationsparameter.

La compensation des réseaux trigonométriques est de plus en plus souvent complétée par un calcul d'interpolation qui permet d'intégrer plusieurs réseaux hétérogènes dans un système global préexistant. L'Office fédéral de topographie a utilisé l'interpolation par les moindres carrés (programme QUINT) dans le cadre du renouvellement de la triangulation de la Suisse romande. Le présent travail décrit le modèle mathématique sur lequel les calculs ont été basés et donne des indications pour le choix des paramètres de l'interpolation.

1. Allgemeines

In der Triangulation, wie in anderen Gebieten der Geodäsie, wird man oft mit Problemen konfrontiert, die mathematisch mit Interpolationsverfahren gelöst werden können.
Die Aufgabestellung ist die folgende: Gegeben sind zwei Systeme, in welchen die gleichen Punkte enthalten sind. Im ersten System (globales System) sind nur die Koordinaten einiger Punkte (Stützpunkte) bekannt, während im zweiten System (lokales System) die Koordinaten aller Punkte vorliegen. Gesucht sind die Koordinaten aller Punkte im globalen System.
Für die Lösung des Problems wird eine geeignete mathematische Abbildung (Interpolationsfunktion) zwischen den Koordinaten im lokalen System und jenen im globalen System benötigt. Nur selten kann eine solche Abbildung eine einfache geometrische Transformation (Translation, Rotation) sein, da in den meisten Fällen globale und lokale Koordinaten verschiedene Ungenauigkeiten zufälliger und systematischer Natur aufweisen.
Für die Wahl einer geeigneten Interpolationsfunktion müssen die funktionalen und statistischen Eigenschaften der vorhandenen Koordinaten (das mathematische Modell) genügend genau bekannt sein. Je nach Modell ist die eine, die andere oder überhaupt keine Interpolationsfunktion zweckmässig.

2. Anwendungen in der schweizerischen Triangulation

2.1 Geschichte

Die Landestriangulation wurde und wird sukzessiv aufgebaut: die Triangulation niederer Ordnung wird in die bestehende Triangulation höherer Ordnung eingeführt, neue Operate müssen mit den älteren Nachbaroperaten verbunden werden usw. Das heisst: neue Netze werden durch wenige gemeinsame Punkte in das vorhandene angepasst. Das Problem der Anpassung kann als Interpolationsproblem aufgefasst und durch die Wahl geeigneter Abbildungsfunktionen gelöst werden.
Bis vor kurzem wurde vor allem interpoliert, ohne explizit von Interpolation zu sprechen. Man nutzte die interpolatorischen Eigenschaften der eingezwängten Ausgleichung, welche bei homogenen Netzen die Restzwänge regelmässig verteilt wie ein Interpolationsverfahren.
Das Vorgehen ist wirtschaftlich, da die eingezwängte Ausgleichung weniger Unbekannte hat als das freie Netz, und eine getrennte Berechnung der Interpolation entfällt. Die Nachteile treten bei Inhomogenitäten in Erscheinung, da die Zwänge nicht mehr gleichmässig verteilt werden und an den schwachen Stellen bleiben.
In den Abrissen inhomogener eingezwängter Netze weisen schwache Verbindungen grosse Verbesserungen auf, die keineswegs auf fehlerhafte Beobachtungen zurückzuführen sind. In solchen Fällen haben erfahrene Geodäten das Gewicht der Beobachtungen mit grossen Verbesserungen erhöht, um eine in Wirklichkeit nicht vorhandene Homogenität zu simulieren.

2.2 Gegenwärtige Entwicklungen

Im letzten Jahrzehnt haben explizite Interpolationsverfahren in der Geodäsie an Bedeutung gewonnen und viele empirische ersetzt. Auch in unserer Landestriangulation wurden einige Anwendungen im Zusammenhang mit der Erneuerung der Triangulation in der Westschweiz realisiert, die im folgenden beschrieben werden.
Die theoretischen Arbeiten wurden hauptsächlich von D. Schneider im Bundesamt für Landestopographie zwischen 1978 und 1979 ausgeführt. Er bearbeitete auch die ersten Anwendungen in der Westschweiz im Operat 3. Ordnung Broye. Seit Mitte 1979 ist U. Hüni mit der Fortsetzung solcher Berechnungsarbeiten beauftragt. Er bearbeitete unter anderem die Interpolation nach kleinsten Quadraten 3. Ordnung Orbe und 4. Ordnung Broye.

3. Die Erneuerung der Triangulation höherer Ordnung

Seit der Einführung der elektronischen Distanzmessung werden bei Ergänzungsarbeiten in der Triangulation 4. Ordnung Gebiete entdeckt, in welchen die Triangulationspunkte höherer Ordnung nicht die erwünschte Genauigkeit erreichen.
Die Ursache dieser lokalen Ungenauigkeiten liegt hauptsächlich in der Berechnungsmethode, die anfangs Jahrhundert verwendet worden war: die sukzessive Ausgleichung von Einzelpunkten, welche nur zu guten Resultaten führt, wenn die Reihenfolge der Berechnungen gut gewählt wird und wenn die Netzverbindungen so homogen verteilt sind, dass die in einem Schritt entstandenen Fehler in den darauf folgenden gleichmässig verteilt werden.
In der Westschweiz zum Beispiel, wo das Gelände hügelig und bewaldet ist,

konnten viele Verbindungen nicht gemessen werden. Die Ungenauigkeiten, die bei den ersten Einzelpunktberechnungen entstanden waren, konnten danach wegen den fehlenden Visuren nicht homogen verteilt werden und blieben bis vor kurzem unbemerkt in den topographisch ungünstigen Gebieten versteckt. Der grösste, in der Gegend von Moudon festgestellte Fehler betrug 50 cm auf eine Distanz von ca. 3 km.

Das Bundesamt für Landestopographie beschloss deshalb 1976, die Landestriangulation der gesamten Region zu erneuern und begann im selben Jahr, sich mit der Organisation der Arbeit zu befassen.

Man untersuchte daraufhin unter anderem alle Möglichkeiten, die zu einer rascheren Ausführung der Arbeit hätte führen können. Da die am Anfang des Jahrhunderts gemessenen Richtungen nicht ungenauer sind, als was man heute erhalten könnte, wurden die vorhandenen alten Beobachtungen übernommen. Nur auf neuen Punkten wurden Richtungssätze neu beobachtet. Selbstverständlich wurde das ganze Netz mit Distanzmessungen ergänzt und damit wesentlich verbessert.

Im rechentechnischen Bereich erfordert die gebietsweise Erneuerung der Triangulation höherer Ordnung die Lösung zweier wichtiger Probleme, nämlich:

- des Übergangs in den Netzen 1.–3. Ordnung zwischen neu triangulierten Gebieten und Gebieten, in welchen die Erneuerung nicht vorgesehen ist;
- der Einpassung der Netze niederer Ordnung (Triangulation 4. Ordnung, Polygonnetze, Katasterpunkte) in das neue Netz im Bereich der neuen Triangulation sowie in den Übergangszonen.

Beide Probleme können, wenn auch mit sehr unterschiedlichen mathematischen Modellen, auf eine Interpolationsaufgabe zurückgeführt werden.

4. Der Übergang zwischen neuer und alter Triangulation höherer Ordnung

4.1 Problemstellung

Das neue Netz wurde frei ausgeglichen und unter Berücksichtigung verschiedener Randbedingungen optimal orientiert und gelagert.

Die Punkte am Rande des triangulierten Gebietes erhielten somit neue Koordinaten, die im allgemeinen 20 bis 30 cm von den früheren Koordinaten differierten. Um einen so sprunghaften Übergang von den neuen zu den alten Koordinaten zu vermeiden, wurde ein ca. 10 km breiter Streifen als Übergangszone eingeführt, in welchem die westlichen Triangulationspunkte die neuen Koordinaten erhalten, während die östlichen die alten Koordinaten behalten. Die Zwischenpunkte werden so verschoben, dass der Übergang möglichst gleichmässig erfolgt.

Es handelt sich hier somit um ein Interpolationsproblem. Von allen Punkten sind neu bestimmte Koordinaten vorhanden (lokale Koordinaten), und von den Randpunkten der Übergangszone auch die gewünschten Koordinaten im definitiven System (globale Koordinaten, wobei im Osten die alten unveränderten und im Westen die neu bestimmten Werte gewählt wurden). Diese Punkte sind die Stützpunkte der Interpolation. Gesucht sind die Koordinaten der Zwischenpunkte im definitiven System (Abb. 1).

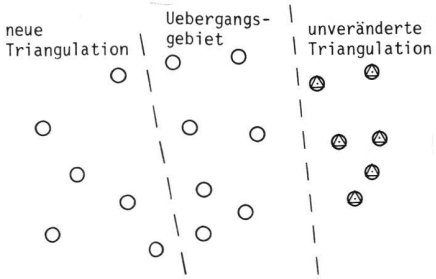


Abb. 1

4.2 Das mathematische Modell

Aus der Problemstellung ist ersichtlich, dass das lokale System aus einer neuen, sehr guten Triangulation entstanden ist und als fehlerfrei betrachtet werden kann (mittl. Fehler der Punkte ca. 1 cm). Die Sollwerte der Stützpunkte sind hingegen mit festen und bekannten Fehlern behaftet, die im allgemeinen weniger als 30 cm betragen. Der Interpolationsprozess kann deshalb nicht statistisch interpretiert werden. Nur die funktionalen Eigenschaften der Interpolationsfunktion spielen in diesem Fall eine Rolle, insbesondere sollten

- die Stützwerte die Sollkoordinaten behalten (keine Filterung),
- die Zwischenpunkte möglichst homogen und ohne Überkorrekturen interpoliert und
- die Berechnungen möglichst schnell und preisgünstig durchgeführt werden können.

Das Institut für Geodäsie und Photogrammetrie der ETH Zürich stellte freundlicherweise das Programm QUINT von Prof. Kraus für die Interpolation nach kleinsten Quadraten zur Verfügung [4], [5], [6], [7], und das Bundesamt für Landestopographie berechnete damit die gewünschten Punktkoordinaten [8], [9], [10].

Für die Durchführung der Interpolation nach kleinsten Quadraten werden einige statistische Annahmen vorausgesetzt; insbesondere sollen die Parameter der Kovarianzfunktion zwischen den Punktkoordinaten angegeben werden. Diese Funktion wird als Gauss'sche Glockenkurve angenommen mit der Gleichung

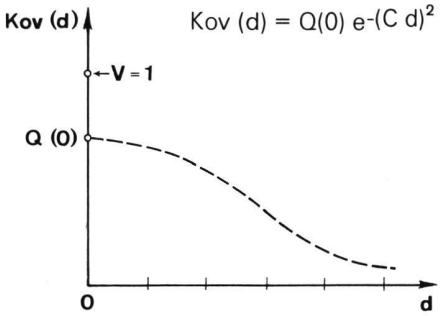


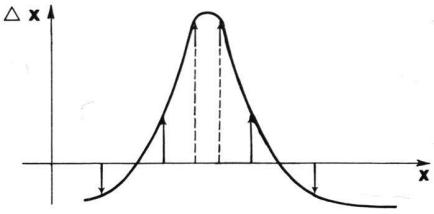
Abb. 2

Zu wählen sind die Parameter Q(0) und C. Die Varianz wird im Programm als konstant (V = 1) angenommen (Abb. 2).

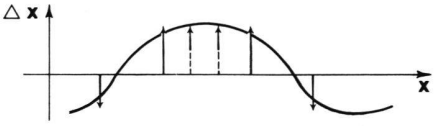
Da das mathematische Modell der vorliegenden Anwendung rein funktional ist, wurden die erforderlichen Parameter durch Versuche gewählt, nur um die gewünschten funktionalen Eigenschaften der Interpolation zu erhalten, ohne ihre statistische Bedeutung zu berücksichtigen. Die Interpolation findet für die x- und y-Koordinaten getrennt statt. Aus Symmetriegründen wurden immer die gleichen Parameter für beide Koordinaten eingeführt.

4.3 Die Wahl der Parameter der Kovarianzfunktion

Der Parameter Q(0) ist die Korrelation zwischen zwei sehr nahen Punkten (Dist→0). Für Q(0) = 1 behalten die Stützpunkte nach der Interpolation ihre Koordinaten (keine Filterung). Diese im beschriebenen Spezialfall erwünschte Eigenschaft wird von einer sehr störenden Erscheinung begleitet: Punkte im Interpolationsbereich können wesentlich grössere Korrekturen als die benachbarten Stützwerte erhalten.

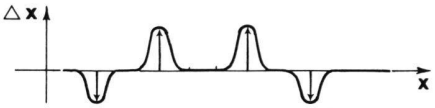


Eine kleine Reduktion von Q(0), z. B. Q(0) = 0.98 oder 0.95, führt zu wesentlich günstigeren Werten im Interpolationsbereich.



Die so verursachten unerwünschten Änderungen der Stützpunktkoordinaten bleiben in der Regel klein (2 bis 3 cm), [9].

Der Parameter C steuert die Breite der Glockenkurve und damit die Reichweite des Einflusses der einzelnen Stützwerte. Wenn C zu gross ist, wird die Glockenkurve zu schmal, und es wird im Zwischenbereich nicht mehr interpoliert.



Im Programm QUINT ist ein Interpolationsradius R so definiert, dass

$$Kov(R) = Q(0)e^{-(C\,R)^2} = 10^{-6}$$

Der Interpolationsradius wurde für die erwähnte Anwendung ca. zwei- bis dreimal grösser gewählt als die Distanz zwischen den Stützpunkten. Aus ihm wurde C hergeleitet, z. B. für 1 km entfernte Stützpunkte C = 0.001, für 3 km C = 0.0004 usw. [10].
Nach der Wahl der Parameter wurde immer ein Satz regelmässig verteilter Punkte (Testgitter) interpoliert, um die Eigenschaften der gewählten Interpolation anschaulich darzustellen und zu prüfen.
Die Interpolation nach kleinsten Quadraten setzt voraus, dass die zwei Koordinatensysteme nicht systematisch verschoben sind. Falls die lokalen Koordinaten wesentlich von den globalen abweichen (vielleicht 0.5 bis 1 m), sollten die zwei Systeme mit einer Helmerttransformation vorgängig angepasst werden.

4.4 Ergebnisse
Neugemessene Triangulationsnetze können mit Hilfe von Interpolationsverfahren auf befriedigende Weise in weniger genaue Fixpunkte eingepasst werden. Die im Fixpunktnetz vorhandenen Zwänge werden durch die Interpolation unabhängig von den durchgeführten Messungen regelmässig verteilt. Gegenüber dem früher üblichen Ausgleichen eingezwängter Netze ist der Fortschritt unbestreitbar.
Die Interpolation nach kleinsten Quadraten kann für diese Anwendung gute Dienste leisten, wenn man die Parameter der Kovarianzfunktion sehr sorgfältig wählt und die Resultate aufmerksam überprüft.

5. Anpassung der alten Triangulation 4. Ordnung in das neue Netz höherer Ordnung

Das Problem kann gestellt werden wie in Punkt 3. Der Unterschied liegt in der Genauigkeit der Koordinaten im lokalen System, die im vorliegenden Fall nicht mehr als fehlerfrei angenommen werden können.
Um eine Interpolation durchführen zu können, müssen funktionale oder mindestens statistische Zusammenhänge zwischen den Feldpunkten vorhanden und schätzbar sein. Die alten Koordinaten der Triangulation 4. Ordnung enthalten unregelmässig verteilte Zwänge, die aus fehlenden Messverbindungen und vereinfachten Rechenmethoden stammen. Die Entwicklung eines genügend genauen mathematischen Modells für die statistischen und funktionalen Zusammenhänge zwischen den Koordinatenfehlern ist praktisch unmöglich oder wenigstens aufwendiger als eine Neuausgleichung der alten Beobachtungen.
Für die praktische Lösung wurden die folgenden zwei Fälle unterschieden:

5.1 Triangulation 4. Ordnung im Gebiet der neuen zwangsfreien Triangulation höherer Ordnung
Die Interpolation nach einem einfachen mathematischen Modell wurde als unzweckmässig betrachtet. Im Einvernehmen mit den kantonalen Behörden, die die Verantwortung für die Triangulation 4. Ordnung tragen, wurde beschlossen, die Netze neu auszugleichen. In den meisten Fällen wird das Netz sogar neu entworfen und gemessen. Da das Netz höherer Ordnung praktisch zwangsfrei ist, können die Punkte 1. bis 3. Ordnung als Fixpunkte in die Ausgleichung der Netze 4. Ordnung eingeführt werden.

5.2 Triangulationen 4. Ordnung in den Übergangszonen
In den Gebieten, wo die Triangulation höherer Ordnung nach dem Verfahren von Punkt 3 verformt worden war, sind grosse Investitionen für eine Verbesserung der Triangulation 4. Ordnung wenig sinnvoll. Es wurde deshalb beschlossen, die Koordinaten der alten Triangulation durch Interpolation anzupassen. Die Tatsache, dass die vorhandenen Zwänge nach der Umformung noch vorhanden sein werden, wird bewusst in Kauf genommen.
Vorläufig ist das benützte Verfahren die Interpolation nach kleinsten Quadraten. Die Parameter werden auch in diesem Fall nach den Kriterien von Punkt 3 gewählt.

6. Zukunftsperspektiven

Die ersten Versuche mit der Interpolation nach kleinsten Quadraten in der Landesvermessung können als abgeschlossen betrachtet werden. Das Bundesamt für Landestopographie wird sich aber noch im Laufe dieses Jahres mit einigen Entwicklungen in diesem Bereich befassen, da zu erwarten ist, dass eine mathematisch einfachere Interpolationsfunktion zu ebenso guten Resultaten in den vorgesehenen Applikationen führt.
Die Verwendung einer einfacheren Funktion, wie z. B. das Korrelationsverfahren in [1] oder die Transformation mit Hilfe des arithmetischen Mittels in [2], würde die Wahl des mathematischen Modells sehr erleichtern und eine problemlose Einführung in den Produktionsablauf erlauben.

7. Schlussfolgerung

Das Bundesamt für Landestopographie konnte verschiedene Interpolationsprobleme in Zusammenhang mit Erneuerungsarbeiten in der Landestriangulation dank dem Programm QUINT für die Interpolation nach kleinsten Quadraten erfolgreich lösen.
Interpoliert wurde nur in Randgebieten, wo die restlichen Zwänge verteilt werden mussten, und eine schlechte Genauigkeit in Kauf genommen worden ist. Da Erneuerungsarbeiten erst stattfinden, wenn grosse (im allgemeinen unregelmässige) Unstimmigkeiten festgestellt werden, ist hingegen nicht zu erwarten, dass sich irgendein Interpolationsverfahren zur Einpassung alter Netze niederer Ordnung in das voll erneuerte Gebiet eignet.
Das raffinierte mathematische Modell der Interpolation nach kleinsten Quadraten wirkt bei den erwähnten Anwendungen als Nachteil, da die Wahl der Modellparameter grosse Aufmerksamkeit erfordert und nicht ohne weiteres standardisiert werden kann. Es ist möglich, dass in nächster Zukunft einfachere, rein funktionale Interpolationsverfahren für die gleichen Applikationen eingesetzt werden.

Literatur

– Allgemeine Veröffentlichungen
[1] G. W. Hein, K. Lenze: Zur Genauigkeit und Wirtschaftlichkeit verschiedener Interpolations- und Prädiktionsmethoden. ZfV 11/1979
[2] H. Wolf: Ausgleichungsrechnung, 1975
[3] H. Engelhardt: Die Überführung der Soldner-Koordinaten in das Gauss-Krüger-Koordinatensystem
[4] K. Kraus: Interpolation nach kleinsten Quadraten in der Photogrammetrie. ZfV 9/1970
[5] K. Kraus: Interpolation nach kleinsten Quadraten in der Photogrammetrie. Bildmessung und Luftbildwesen 1/1972
[6] K. Kraus: QUINT Programmbeschreibung
[7] D. Schneider: QUINT Programmbeschreibung (Version L + T). Bulletin des RZ-Landestopographie Nr. 2, 1979
– Technische Berichte des Bundesamtes für Landestopographie
[8] Erneuerung der Landestriangulation in der Westschweiz Netz 1. und 2. Ordnung. (D. Schneider 1979)
[9] Triangulation 3. Ordnung Vaud, Operat Broye, Technischer Bericht. (D. Schneider 1979)
[10] Interpolation des points de 4ème ordre dans la zone de transition. Cantons de Vaud et Fribourg. (U. Hüni 1980)

Adresse des Verfassers:
Alessandro Carosio, Bundesamt für Landestopographie,
Dienststelle Datenverarbeitung
CH-3084 Wabern