

# Ausgleichung geodätischer Netze mit Verfahren der robusten Statistik

Autor(en): **Carosio, Alessandro**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK =  
Mensuration, photogrammétrie, génie rural**

Band (Jahr): **93 (1995)**

Heft 4: **ETHZ : Departement Geodätische Wissenschaften = EPFZ :  
Département des sciences géodésiques**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-235143>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Ausgleichung geodätischer Netze mit Verfahren der robusten Statistik

A. Carosio

Die modernen Methoden der Ausgleichsrechnung berücksichtigen, dass die Beobachtungen nicht ganz normalverteilt sind. Ein Lösungsansatz bieten die Verfahren der robusten Statistik, die gute Schätzungen liefern, auch wenn nicht alle Beobachtungen richtig sind. Der folgende Bericht beschreibt die neuesten Entwicklungen, die in der schweizerischen Praxis eingesetzt werden.

*Les méthodes de compensation modernes tiennent compte du fait que les observations ne sont pas toutes distribuées normalement. Elles utilisent les méthodes de la statistique robuste, fournissant de bons résultats, même dans le cas où certaines observations sont entachées d'erreur. Le présent article décrit l'état actuel de développement de ces méthodes, telles qu'elles sont utilisées en pratique en Suisse.*

I metodi moderni di compensazione tengono conto del fatto che le osservazioni non hanno una distribuzione normale. Una possibile soluzione è data dai metodi della statistica robusta che forniscono buoni risultati anche se certe osservazioni sono errate. Questo articolo descrive lo stato degli sviluppi più recenti di questi metodi, come applicati nella pratica svizzera.

### 1. Einleitung

Die Feststellung, dass die Beobachtungen fast, jedoch nicht vollständig normalverteilt sind, wird vermehrt in der Ausgleichsrechnung beachtet. Während man sich in der Vergangenheit darauf beschränkt hat, ganz allgemein geeignete Messanordnungen vorzuschreiben, die die Entdeckung der groben Fehler erlauben, ist man heute auf der Suche nach Alternativverfahren. Mehrere Lösungsansätze sind das Ergebnis einer regen Forschungstätigkeit.

An erster Stelle findet man die Analyse der Zuverlässigkeit, die zum Ziel hat, die Eignung des vorgesehenen Messsystems (Messanordnung und Qualitätskontrolle) für den Nachweis von Modellfehlern zu überprüfen. Die Kombination von Richtungs-messungen, Distanzmessungen, Satellitenbeobachtungen und die Ausgleichung immer grösserer Netze mit den verschiedensten Unbekannten (Lotabweichungen, Massstabsfaktoren usw.) machen ein intuitives Urteil zunehmend schwieriger und haben zur Entwicklung der modernen numerischen Verfahren geführt [1], [4].

Die zweite Entwicklungsrichtung, die Fehlersuche a posteriori hat als Ziel die Identifikation allfälliger grober Fehler. Nicht befriedigende Beobachtungen werden mittels statistischer Tests gesucht, daraufhin entfernt und wenn möglich wiederholt. Diese Suche basiert meistens auf

einer Prüfung der standardisierten Verbesserungen und bezweckt, eine Reihe von Messungen zu erhalten, die dem klassischen Modell (Normalverteilung) entsprechen [6].

Die dritte Forschungsrichtung ist das Thema des vorliegenden Beitrages und behandelt die Ausgleichungsverfahren, robuste Ausgleichungen genannt, die weniger sensibel auf grobe Fehler reagieren als die Methode der kleinsten Quadrate. Sie liefern wirklichkeitsnahe Resultate, auch wenn sich unter den Messungen noch einige grobe Fehler befinden, das heisst, wenn die Normalverteilung nicht ganz zutrifft. Den dazu nötigen robusten Schätzfunktionen haben die Statistiker in letzter Zeit ihre Aufmerksamkeit gewidmet.

Als Initiator gilt Tukey mit seiner Statistiker-Forschungsgruppe in Princeton, der das Problem populär zu machen begann. In den letzten Jahrzehnten haben überdies die Studien des Schweizers Peter J. Huber zu wesentlichen Fortschritten geführt. Die Verfahren der robusten Ausgleichung haben in den letzten Jahren stark an Bedeutung in der Geodäsie gewonnen. [8], [9]

### 2. Das stochastische Modell der robusten Ausgleichung

Die Hypothese der Normalverteilung für die Messungen ist nicht mehr eine absolute Voraussetzung.

Die Messfehler werden als stochastische Grössen mit Verteilung:

$$F = (1 - \epsilon)\Phi + \epsilon H$$

betrachtet,  $\Phi$  ist die Normalverteilung,  $H$  die unbekannt verteilte Verteilung der groben Fehler und  $\epsilon$  die geringe Wahrscheinlichkeit, mit der grobe Fehler auftreten. Die Beobachtungen gelten als fast normalverteilt, und die angenommenen Standardabweichungen stimmen für die Mehrheit der Messwerte. Es gibt jedoch Beobachtungen, die dem Grundmodell nicht entsprechen (grobe Fehler). Ihre Verteilung ist unbekannt.

### 3. Funktionale Modelle

Schätzfunktionen sind die mathematischen Beziehungen zwischen den beobachteten Grössen  $L_i$  und den gesuchten ausgeglichenen Werten (unbekannte Parameter, ausgeglichene Beobachtungen usw.).

So zum Beispiel für eine ausgeglichene Beobachtung:

$$\bar{L}_i = g_i(L_1, L_2, \dots, L_n)$$

Die Schätzfunktion  $g_i$  wird robust sein, wenn  $\bar{L}_i$  eine gute Schätzung von  $E(L_i)$  auch bei nicht ganz normalverteilten Beobachtungen ergibt. Solche robuste Schätzfunktionen können in verschiedenen Arten aufgebaut werden. [11] Besonders wichtig sind die folgenden Gruppen:

- M-Schätzer (Maximum-Likelihood-Typ)
- L-Schätzer (Linearkombinationen von Ordnungsstatistiken)

Diese erwähnten Methoden führen, nach Annahme von einigen sehr allgemeinen Bedingungen, zu asymptotisch normalverteilten Schätzungen, so dass in der Praxis, wenn der Freiheitsgrad genügend gross und das Netz gut ist, die ausgeglichenen Beobachtungen als normalverteilt betrachtet werden können. Damit sind alle üblichen Beurteilungsverfahren verwendbar.

Eine wichtige Eigenschaft der robusten Schätzfunktionen ist der Bruchpunkt, der als quantitatives Mass für die Robustheit eines Schätzers verwendet wird. Dieser gibt den grösstmöglichen Anteil an (beliebig grossen) Ausreissern an, der in einer Stichprobe enthalten sein darf, bevor der Schätzer «zusammenbricht», d.h. völlig falsche Resultate ergibt. Für das arithmetische Mittel ist der Bruchpunkt 0 [7], [14]. Ein Erwartungswertschätzer mit hervorragenden Bruchpunkteigenschaften ist der Median. Man kann ihn verwenden, wenn  $n$  direkte Beobachtungen der gesuchten Grösse vorliegen. Für  $n \rightarrow \infty$  strebt der Anteil der Messungen, die beliebig falsch sein dürfen, gegen  $n/2$ . Der Median hat also einen Bruchpunkt von 0.5.

## 4. Die robuste vermittelnde Ausgleichung nach Huber

### 4.1 Grundlagen

Eine erste interessante Anwendung in der Geodäsie war die robuste vermittelnde Ausgleichung, die mit einem von P.J. Huber [10] vorgeschlagenen M-Schätzer aufgebaut wurde [3].

M-Schätzer sind für die geodätischen Applikationen besonders geeignet, vor allem wegen der Ähnlichkeit mit der Methode der kleinsten Quadrate und weil damit auch Probleme mit vielen unbekanntem Parametern gelöst werden können. Es handelt sich hierbei darum, unbekannte Parameter und Verbesserungen ( $v$ ) so zu bestimmen, dass

$$\sum \rho(v) = \text{Min}$$

ist.

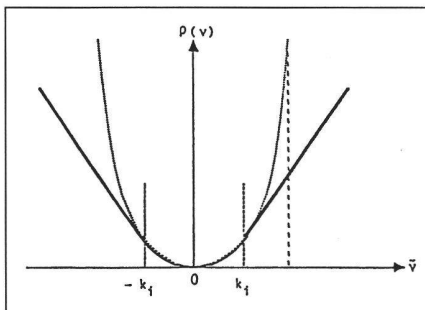
Die Kunst liegt in der geschickten Wahl der Funktion  $\rho(v)$ . Für  $\rho(v) = v^2$  erhält man die Schätzung nach der Methode der kleinsten Quadrate. P. J. Huber schlägt vor, die folgende stetige und konvexe Funktion zu verwenden:

$$\begin{aligned} \rho(v) &= \frac{1}{2} v^2 && \text{für } |v| < k \\ &= k \cdot |v| - \frac{1}{2} k^2 && \text{für } |v| \geq k \end{aligned}$$

wobei  $k$  ein Vielfaches der Standardabweichung der Messung ist. In geodätischen Netzen mit nicht besonders grosser Überbestimmung kann z.B.

$k = 3 \cdot \sigma_i$  oder  $3.5 \cdot \sigma_i$  gewählt werden.

Die vorgeschlagene Schätzung ist für  $k \rightarrow \infty$  identisch mit derjenigen der Methode der kleinsten Quadrate. (Abb. 1).



**Abb. 1:** Die Zielfunktion für den M-Schätzer nach Huber. Im Intervall  $(-k, k)$  eine Parabel, ausserhalb Geraden.

### 4.2 Berechnungsverfahren

Es gibt mehrere numerische Methoden, um zu den geschätzten Unbekannten zu kommen. Alle sind iterative Verfahren.

### a) Die direkte Lösung des Minimumsproblems

In ähnlicher Art wie bei der Methode der kleinsten Quadrate bildet man zuerst die Zielfunktion

$$\sum \rho(v_i), \text{ die minimal sein soll.}$$

Die partiellen Ableitungen nach allen Unbekannten müssen für die Lösung null werden. Daraus entsteht ein Gleichungssystem.

Für die Schätzfunktion nach Huber muss man beachten, dass

$$\frac{\partial \sum \rho(v_i)}{\partial x} = \sum \frac{\partial \rho(v_i)}{\partial x}$$

ist, das heisst, man kann die Ableitung für jede einzelne Beobachtung bestimmen und daraus entstehen die Normalgleichungsanteile, die man zum Schluss addiert.

Die meisten Beobachtungen erhalten durch die Ausgleichung Verbesserungen innerhalb des Intervalls  $(-k, k)$ . Ihre Normalgleichungsanteile sind gleich wie bei der Methode der kleinsten Quadrate. Die

wenigen Beobachtungen, die hingegen ausserhalb des Intervalls  $(-k, k)$  liegen, müssen andere Anteile erhalten, die nur Konstanten beinhalten [3].

Da die Grösse der Verbesserungen erst nach der Lösung des Normalgleichungssystems bekannt wird, muss man iterativ nach folgendem Verfahren vorgehen:

- 1. Iteration  
Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate
- i-te Iteration  
Zuteilung der Verbesserungen der dazugehörigen Intervalle  $(-\infty, -k)$ ,  $(-k, k)$ ,  $(k, +\infty)$   
Bildung der neuen Normalgleichungen  
Lösung des Systems usw.  
Wiederholen, bis alle Verbesserungen dem richtigen Intervall zugeteilt sind.

Jede Iteration enthält die Lösung eines Gleichungssystems. Die Rechenzeit kann gross werden.

Die folgenden Lösungsansätze erlauben aber das Verfahren wesentlich zu beschleunigen.

### b) Die Ausgleichung mit reduzierten Gewichten

Man kann das Minimum der Zielfunktion der robusten Ausgleichung auch anders bestimmen. Man erhält die gleichen Resultate, wenn die Normalgleichungen mit der

Formel der Methode der kleinsten Quadrate, aber mit modifizierten Gewichten gebildet werden. Die Beobachtungen, die eine Verbesserung ausserhalb des Intervalls  $(-k, k)$  hätten, erhalten ein kleineres Gewicht (d.h. eine grössere Standardabweichung).

Die modifizierte Standardabweichung ist so zu wählen, dass nach der Ausgleichung die Verbesserungen dieser Beobachtungen die Bedingung

$$|v_i| = k$$

genau erfüllen. Es ist zu bemerken, dass eine grössere Standardabweichung eine Vergrösserung des Grenzwertes  $k$  bewirkt.

### c) Ausgleichung mit angepassten Beobachtungen

Die robuste Ausgleichung ergibt auch die gleichen Unbekannten, wenn, anstatt die Normalgleichungen zu verändern, die Beobachtungen derart modifiziert werden, dass sie nach der Ausgleichung die Bedingung

$$|v_i| = k$$

genau erfüllen, wenn sonst ihre Verbesserungen ausserhalb des Intervalls  $(-k, k)$  fallen würden.

Diese letzte Variante ist besonders interessant, da bei nicht zu schlechten Näherungskordinaten nur einmal die Matrixinversion berechnet werden muss.

## 5. Modernere funktionale Modelle

### 5.1 Das Verfahren der schweizerischen Landesvermessung

Das bisher geschilderte Verfahren von P. Huber begrenzt den Einfluss der Verbesserungen.

Die Zielfunktion (auch Verlustfunktion genannt) der Methode der kleinsten Quadrate

$$\sum p v^2 = \text{min}$$

wird ersetzt durch

$$\sum p \rho(v) = \text{min}$$

In beiden Fällen erhält man die Lösung einer vermittelnden Ausgleichung mit den folgenden Bedingungen

$$\sum_{i=1}^n p_i a_{ij} \psi(v_i) = 0 \quad j = 1, \dots, u$$

$\psi(v)$  nennt man die Einflussfunktion der Verbesserungen. Sie ist die Ableitung der Zielfunktion.

$$\psi(v) = \rho'(v)$$

Der Schätzer nach Huber hat die folgende Ziel- und Einflussfunktion (Abb. 2). Wenn eine Verbesserung die Grösse  $k = c \cdot \sigma_v$  erreicht hat, bleibt ihr Einfluss konstant.

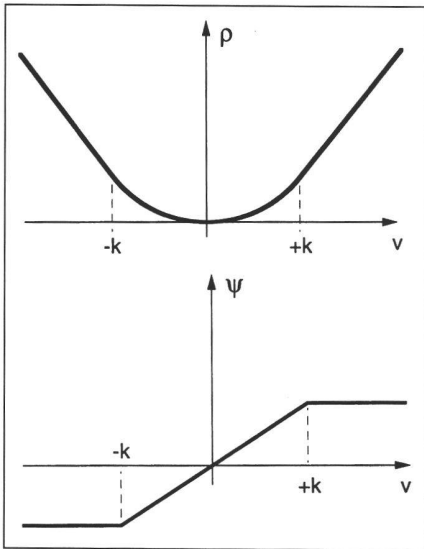


Abb. 2: Zielfunktion (oben) und Einflussfunktion (unten) für den Schätzer nach P. Huber.

In geodätischen Netzen ist die Überbestimmung nicht sehr gross und man weiss, dass bei schwacher Überbestimmung bereits kleine Verbesserungen gefährlich sein können. Es wäre daher vorteilhaft, wenn die Grenze der Einflussfunktion von der Standardabweichung der Verbesserung abhängig wäre, damit auch bei geringer Überbestimmung der Einfluss eines Ausreissers klein gehalten wird.

Zu diesem Zweck schlägt F. Wicki [15] vor, die Zielfunktion von Huber weiter zu verwenden, die Grenze  $k$  aber zu modifizieren, damit der Einfluss der standardisierten Verbesserung (anstatt der Verbesserung) begrenzt wird. Die folgende Grenze  $k$  wird verwendet:

$$k = c \cdot |\sigma_v|$$

mit  $\sigma_v$  Standardabweichung der Verbesserung und  $c = \text{konstant}$  (z.B. 2.5 oder 3.0) (Abb. 3).

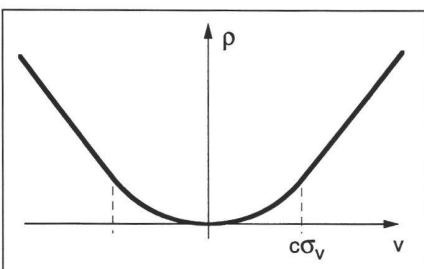


Abb. 3: Modifizierte Zielfunktion. Das mittlere Intervall ist von  $\sigma_v$  abhängig.

Dieses Verfahren, das neben der Grösse der Verbesserung auch die geodätische Messanordnung berücksichtigt, hat sich in der Praxis bewährt und wird in der schweizerischen Landesvermessung eingesetzt. [14]

## 5.2 Andere moderne Verfahren

In der Literatur werden die robusten Schätzer vor allem bei Regressionsproblemen angewandt. Daraus ist auch die Terminologie entstanden. Moderne Verfahren werden daher oft für diese Anwendung beschrieben.

Die folgenden Beispiele zeigen die Entwicklung von robusten M-Schätzern [7].

### a) Die Huber-Schätzer

Die robuste Ausgleichung nach Huber begrenzt den Einfluss der Verbesserungen (Abb. 4). Stark abweichende Beobachtungen (Y) werden bis zum gestrichelten Streifen verschoben.

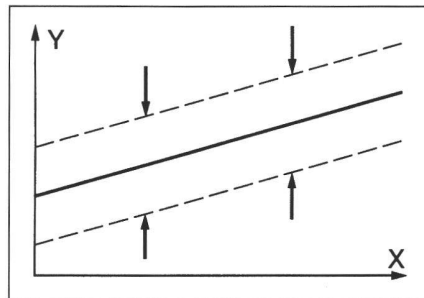


Abb. 4: Eine Regressionsgerade nach Huber mit dem maximalen Einflussbereich der Verbesserungen.

Die Lösung des Gleichungssystems

$$\sum \psi_c \left( \frac{v_i}{\sigma_i} \right) X_i = 0$$

ist die Schätzung der Regressionsparameter, die in  $v_i$  durch die Verbesserungsgleichung enthalten sind.

$X_i$  ist der Vektor der Koeffizienten der  $i$ -ten Verbesserungsgleichung (in der Ebene: 1,  $x_i$ ).

Beobachtungen mit grossen  $x_i$ -Werten (Hebelarmpunkte) beeinflussen die Ausgleichungsergebnisse stark.

### b) Die Schätzer nach Mallows

Um das zu vermeiden, hat Mallows [7] vorgeschlagen, die Beobachtungen mit einem zusätzlichen Gewicht zu versehen, in welchem die «Distanz» vom Schwerpunkt der Beobachtungen berücksichtigt wird. Die Koeffizienten der Regressionsgeraden werden mit dem folgenden Gleichungssystem berechnet:

$$\sum \psi_c \left( \frac{v_i}{\sigma_i} \right) w_i X_i = 0$$

das Zusatzgewicht  $w_i = \min(1, b/d_i)$  ist Funktion von  $d_i$  (robuste Mahalanobis-Distanz zwischen  $X_i$  und Mittelpunkt der Stichprobe).

Damit werden alle Beobachtungen, die aussergewöhnlich entfernt vom Mittelpunkt der anderen Messungen sind, in ihrer Wirkung begrenzt (Abb. 5).

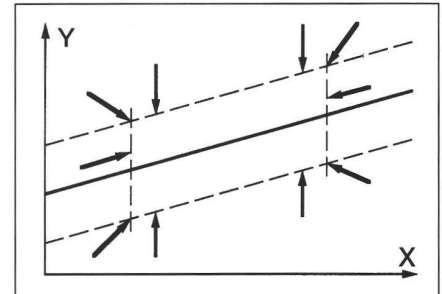


Abb. 5: Eine Regressionsberechnung nach Mallows begrenzt den Einfluss der entfernten Punkte.

### c) Der Schätzer nach Schweppe

Eine Alternative, um die Wirkung der Hebelarmpunkte (leverage points) zu reduzieren, wird von Schweppe vorgeschlagen [7]. Der Einfluss der Verbesserungen wird in Funktion der Grösse der Verbesserung und der Position der Beobachtung auf der X-Achse (A-Matrix) gesteuert (Abb. 6).

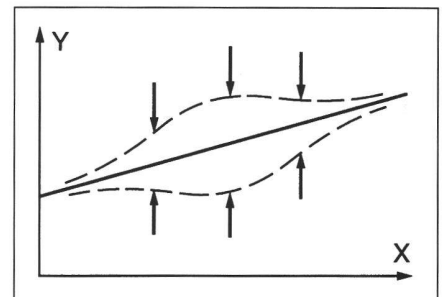


Abb. 6: In einer Regressionsberechnung nach Schweppe wird der Einfluss der Verbesserung und der Entfernung berücksichtigt.

Schweppe berechnet die Gerade mit dem Gleichungssystem:

$$\sum \psi_c w_i \left( \frac{v_i}{\sigma_i} \right) \cdot X_i = 0$$

Die Einflussfunktion  $\psi_{cW}$  ist von den zusätzlichen Gewichten  $w_i$  abhängig, die den Einfluss der Verbesserungen bei grosser Entfernung reduzieren.

Während bei der Methode von Huber eine falsche Beobachtung mit einer stark abweichenden X-Koordinate zu einer falschen Regressionsgeraden führt, sind die Methoden von Mallows und Schweppe auch in diesem Fall robust.

Das Modell der schweizerischen Landesvermessung [15] ist ein Spezialfall der robusten Regression nach Schweppe.

## d) Die balancierte Ausgleichung nach Kampmann

G. Kampmann [12] schlägt vor, zuerst die Konfiguration zu balancieren, indem man neue Gewichte bestimmt, die alle Beobachtungen zur gleichen Teilredundanz führen. Dann wird ein robustes Ausgleichungsverfahren (z.B. L1-Norm) eingesetzt. Man erkennt hier ebenfalls eine grosse Ähnlichkeit mit dem Verfahren nach Schweppe.

## 6. Robuste Ausgleichungsverfahren und Zuverlässigkeit

Robuste Ausgleichungsmodelle nehmen von Anfang an in Kauf, dass die Beobachtungen nicht genau normalverteilt sind und dass grobe Fehler oder sonst stark abweichende Messwerte vorhanden sein können. Das Ausgleichungsmodell erfordert im Prinzip keine besondere Analyse a posteriori der Beobachtungen.

Die Definition der Zuverlässigkeit, die man für die gewöhnliche Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate verwendet [1], stützt sich auf die Wahrscheinlichkeit, mit welcher allfällige grobe Fehler gefunden werden. Da bei robusten Verfahren keine groben Fehler gesucht werden, kann keine Wahrscheinlichkeit für das Finden berechnet werden. Die herkömmliche Definition der Zuverlässigkeit ist daher nicht mehr anwendbar und der Begriff der inneren Zuverlässigkeit hat keine Bedeutung.

Trotzdem besteht eine Beziehung zwischen allfälligen groben Fehlern und geschätzten Parametern (Koordinaten usw.). Es ist interessant zu wissen, wie gross die Verfälschung der Koordinaten sein kann, wenn eine Messung grob falsch ist. [5]

Der Einfluss eines unendlich grossen Messfehlers  $\Delta_i$  ( $\Delta_i \rightarrow \infty$ ) auf die Koordinaten und anderen Parameter kann nach der folgenden Methode berechnet werden.

Ein unendlich grosser Fehler hat einen Einfluss wie eine Beobachtung, für welche

$$|v_i| = k_i$$

ist.

Man ist so in der Lage, für jede Beobachtung den kleinsten groben Fehler  $\nabla_i$  (reduzierter grober Fehler) zu bestimmen, der sich wie ein unendlich grosser Fehler in einer Ausgleichung ohne zufälligen Fehler auswirkt.

Man kann also für jede Beobachtung den Einfluss eines unendlich grossen Fehlers auf die Erwartungswerte der in der Aus-

gleichung berechneten oder später hergeleiteten Grössen berechnen.

Diesen Einfluss verwendet man in ähnlicher Art wie bei der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate, um Indikatoren der äusseren Zuverlässigkeit ( $\nabla X$ ,  $\nabla Y$ ) für die Koordinaten zu definieren.

Ergebnisse  $\nabla X$ ,  $\nabla Y$  bei der robusten Berechnung wären mit den entsprechenden Indikatoren der Methode der kleinsten Quadrate nur vergleichbar, wenn für die übliche Ausgleichung das Risiko  $\beta = 50\%$  gewählt wird und man damit die Verteilung der zufälligen Messfehler ausschaltet.

Um auch bei den üblichen Risikogrenzen ( $\beta = 5\%$ ,  $1\%$  usw.) vergleichbare  $\nabla X$ ,  $\nabla Y$  zu erhalten, muss man auch im robusten Modell den Einfluss der zufälligen Fehler berücksichtigen. Dies kann man mit einer empirisch festgelegten Vergrösserung des Einflusses eines unendlich grossen Fehlers auf die Ausgleichung erzielen. Der vergrösserte grobe Fehler, mit welchem man die Wirkung eines unendlichen Fehlers berechnet, ist:

$$\nabla_i^* = \frac{\delta^* \cdot \sigma_{v_i}}{z_i}$$

Er ist vom Verschiebungsfaktor

$$\delta^* = c + \tau_w$$

abhängig.

$\tau_w$  wird so bestimmt, dass die Verschiebung  $\delta$  des Erwartungswertes der standardisierten Verbesserung  $w_i$  bei der Methode der kleinsten Quadrate gleich dem Verschiebungsfaktor bei der entsprechenden robusten Ausgleichung wird [14].

## 7. Schlussbemerkungen

Es gibt eine unbeschränkte Anzahl robuster Schätzverfahren, die für Anwendungen in der Geodäsie zur Auswahl stehen. Die Ausgleichung geodätischer Netze erfordert Verfahren mit folgenden Eigenschaften:

Für normalverteilte Beobachtungen muss die Schätzung eine kleine Varianz haben, Messanordnungen mit Hunderten von Koordinaten müssen auswertbar sein, einzelne grobe Fehler müssen die Schätzung nicht verfälschen, dies auch, wenn die Überbestimmung lokal schwach sein sollte.

Das Verfahren, das für die schweizerische Landesvermessung entwickelt wurde, stützt sich auf einen M-Schätzer, der die erwähnten Eigenschaften besitzt. Seit seinem Einbau in der Triangulationssoftware LTOP 1992 wird es in der Praxis mit Erfolg eingesetzt.

Der Hauptvorteil der Robusten Ausgleichungsverfahrens ist ihre Wirtschaftlichkeit: Sie erlaubt, die Beobachtungen voll (oder mindestens weitgehend) automa-

tisch zu bereinigen und führt sehr schnell zum gewünschten Resultat. Die robuste Statistik leistet daher einen wesentlichen Beitrag an die Reduktion der Kosten bei der Auswertung geodätischer Messungen.

## Literatur:

- [1] W. Baarda: A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks. Delft 1968.
- [2] W.K. Bachmann: Estimation stochastique de la précision des mesures. Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, Fachblatt 4-73.
- [3] A. Carosio: Robuste Ausgleichung. Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, 11-79.
- [4] A. Carosio: Verfahren der multivariaten Statistik zur Beurteilung der Resultate und der Zuverlässigkeit geodätischer Messsysteme. Mitteilung Nr. 35, IGP-ETH, Zürich 1983.
- [5] A. Carosio: Die Zuverlässigkeit in der schweizerischen Landesvermessung. In: Ingenieurvermessung 92. Beiträge zum XI. Internationalen Kurs für Ingenieurvermessung. Hrsg. von H.J. Matthias/A. Grün. Dümmler Verlag 1992.
- [6] P. Gerber: Das Durchschlagsnetz zur Gotthard-Basislinie. Schweizerische Bauzeitung Nr. 13, 1974.
- [7] F.R. Hampel, E.M. Ronchetti, P.J. Rousseeuw, W.A. Stahel: Robust Statistics, The Approach Based on Influence Function. Wiley and Sons, New York 1986.
- [8] P.J. Huber: Robust Estimation of a Location Parameter. Zürich 1963.
- [9] P.J. Huber: Robust Estimation. Zürich 1968.
- [10] P.J. Huber: Robust Regression. Zürich 1972.
- [11] P.J. Huber: Robust Statistics. Wiley and Sons, New York 1981.
- [12] G. Kampmann: Robuste Deformationsanalyse mittels balancierter Ausgleichung. AVN 1/1994.
- [13] A. Marazzi: An introduction to robust regression. Vortrag an der Universität Zürich, 1981.
- [14] F. Wicki (a): Robuste Ausgleichung geodätischer Netze. IGP-Bericht Nr. 189, Zürich, Februar 1992.
- [15] F. Wicki (b): M-Schätzer. IGP-Bericht Nr. 190, Zürich, März 1992.

Adresse des Autors:

Prof. Dr. Alessandro Carosio  
 Institut für Geodäsie und  
 Photogrammetrie  
 Geo-Informationssysteme und  
 Fehlertheorie  
 ETH Höggerberg  
 CH-8093 Zürich