

# Die graphischen Methoden der Bewegungslehre (Kinematik). I. Teil

Autor(en): **Brandenberger, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **3 (1930)**

Heft I

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-109798>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Die graphischen Methoden der Bewegungslehre (Kinematik)<sup>1)</sup>

von Dr. Ing. H. Brandenberger, Zürich.

(21. I. 30.)

Inhalt: Die Bewegungslehre (Kinematik) führt, sofern sie den Weg eines Punktes oder die Hüllbahn einer Kurve untersucht zur Geometrie, soweit sie die bei einer Bewegung auftretenden Geschwindigkeiten und Beschleunigungen feststellt, zur Mechanik. Zunächst werden die Bahnen und Bewegungen mit Hilfe der Geschwindigkeiten und ersten Beschleunigungen untersucht. Dann werden systematisch die vektoriellen Beziehungsgleichungen zwischen den Evoluten der Punkt-, Hüll- und Wälzpolbahnen einerseits, und den höheren Punkt-, Polwechsel- und Winkelbeschleunigungen andererseits abgeleitet. An verschiedenen Problemen der Bewegungslehre wird gezeigt, wie die vektoriellen Beziehungsgleichungen sowohl eine rechnerische als auch eine graphische Lösung der Aufgaben ermöglichen. Alle in der Abhandlung vorkommenden Grössen sind Vektoren, so dass sich eine besondere Schreibweise dafür erübrigt.

### I. TEIL.

#### Die Geschwindigkeitsverhältnisse.

Kennt man von einer Kurve die Konstruktion eines Punktes, so kann man durch Heranziehen der Geschwindigkeiten der Konstruktionsgeraden die Tangente an die Kurve konstruieren. Fig. 1 zeigt die Anwendung dieses Satzes auf die Konstruktion der Kurve  $z = \frac{y}{x} \cdot a$ , falls  $y = f(x)$  als Kurve gegeben ist. Das Aufsuchen eines Punktes  $A'$  der Kurve  $z$  aus einem Punkte  $A$  der Kurve  $y$  ist in Fig. 1. dargestellt.

Erteilt man dem Punkte  $A$  der Kurve  $y = f(x)$  eine Geschwindigkeit  $v_A$ , dann dreht sich der Strahl  $OA$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \operatorname{tg} \delta$ , wobei die Komponente  $v_A^{\perp OA} = OA \cdot \operatorname{tg} \delta$  ist. Der Punkt  $B$  bewegt sich auf der Geraden  $x = a$  mit einer Geschwindigkeit  $v_B$ , wobei die Komponente  $v_B^{\perp OB} = OB \cdot \operatorname{tg} \delta$ . Da  $AA'$  und  $BA'$  bei der Bewegung des Punktes  $A$  nur Parallelverschiebungen ausführen, sind die, in die  $x$  bzw.  $y$  Richtung fallenden Komponenten  $v_A^x$  bzw.  $v_B^y$  der Punkte  $A$  bzw.  $B$ , mit den in diese Richtung fallenden Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes  $A'$  gleich, so dass  $v_A^x = v_{A'}^x$  und  $v_B^y =$

<sup>1)</sup> Teilweise Erweiterung nach meiner Vorlesung über Getriebelehre an der Eidg. Techn. Hochschule, Zürich.

$v_A' \cdot v_C'$  ist die Tangente an die Kurve  $z$  im Punkte  $C = C'$  für  $x = a$ .

Dem obigen Satz lässt sich ein dualer gegenüber stellen: Kennt man von einer Kurve die Konstruktion einer Tangente, so kann man mit Hilfe der Geschwindigkeitsverhältnisse der Kon-

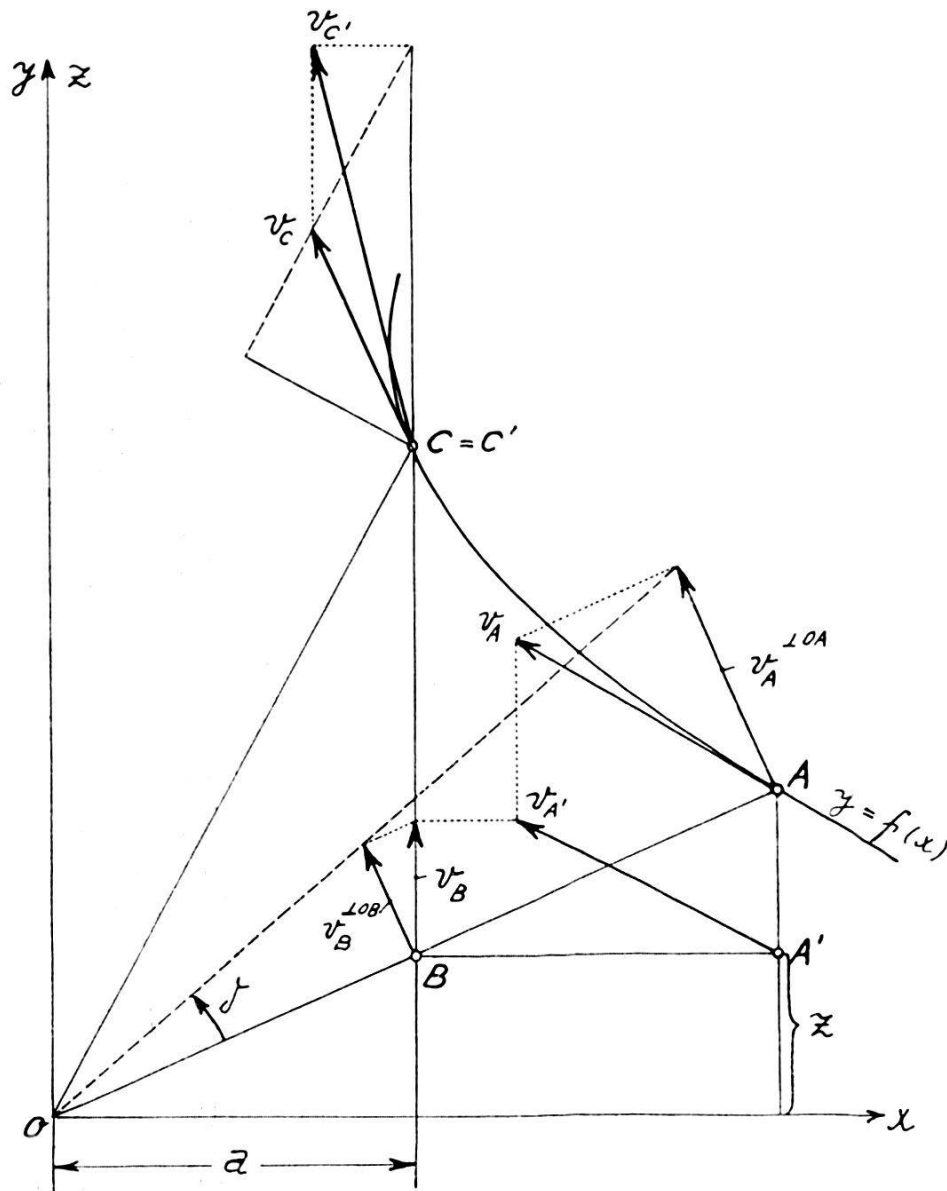


Fig. 1.

struktionsgeraden auch den Berührungspunkt an die Kurve konstruieren. Der Berührungspunkt ergibt sich als Schnittpunkt zweier unendlich benachbarter Lagen der Tangente als derjenige Punkt der Geraden, dessen Geschwindigkeit senkrecht zur Geraden Null ist (Gleitpunkt).

Durch die Anwendung der Geschwindigkeitsverhältnisse auf ein Gebilde kann man also stets eine weitere unendlich benachbarte Lage bestimmen. Da die Bobillier'sche Konstruktion

gestattet, die dreipunktigen Lagen der Punkte eines bewegten starren Systems durch eine einfache Lagenbeziehung anzugeben, ist es möglich, durch die Anwendung der Geschwindigkeitsverhältnisse auf die Konstruktionsgeraden der Bobillier'schen Konstruktion die vierpunktigen Lagen der Punkte eines bewegten starren Systems zu erfassen.

Wir wollen eine diesbezügliche Aufgabe stellen und zur Lösung bringen. Zwei Kurven eines bewegten ebenen Systems

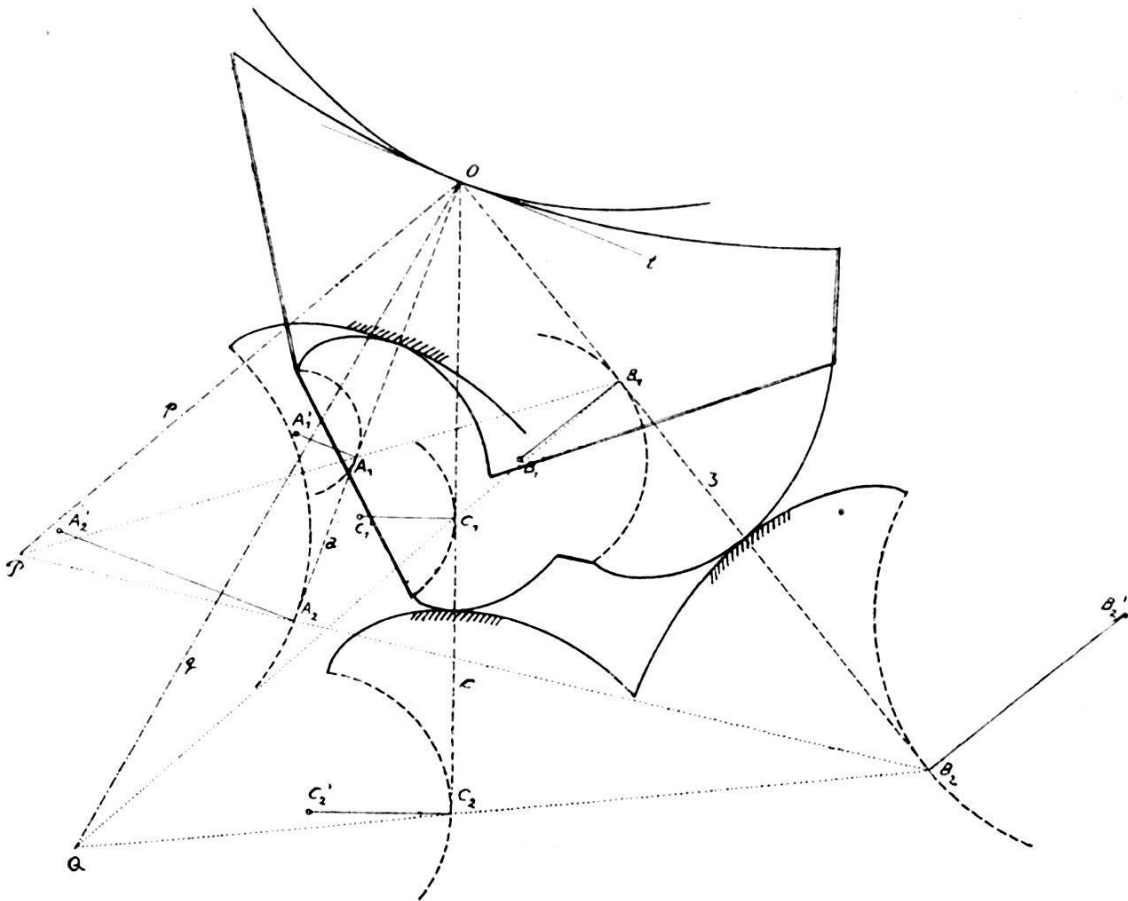


Fig. 2.

mit den Krümmungsmittelpunkten  $A_1$  bzw.  $B_1$  (Fig. 2) und den Krümmungsmittelpunkten  $A_1'$  bzw.  $B_1'$  ihrer Evoluten gleiten auf festen Kurven  $(A_2, A_2')$  bzw.  $(B_2, B_2')$ . Für eine Kurve  $(C_1, C_1')$  des bewegten Systems ist die Hüllbahn  $(C_2, C_2')$  aufzusuchen.<sup>2)</sup>

Die mit den Krümmungsmittelpunkten  $A_1, B_1, C_1$  zusammenfallenden Systempunkte beschreiben Bahnen, deren Krümmungsmittelpunkte in die Krümmungsmittelpunkte  $A_2, B_2, C_2$  der Hüllbahnen fallen. Bezeichnen wir die Kollineationsachse, die sich als Verbindungsgerade des Schnittpunktes  $P$  der Geraden  $A_1—B_1$

<sup>2)</sup> Diese Aufgabe wird im III. Teil auch noch mit Hilfe der höheren Savary'schen Gleichungen gelöst.

und  $A_2—B_2$  mit dem Momentanpol 0 ergibt, mit  $p$ , die Kollineationsachse, die sich als Verbindungsgerade des Schnittpunktes  $Q$  der Geraden  $C_1—B_1$  und  $B_2—C_2$  mit dem Momentanpol 0 ergibt, (wobei der Punkt  $C_2$  noch unbekannt ist) mit  $q$ , ferner die Normalstrahlen  $A_1—A_2$ ,  $B_1—B_2$ ,  $C_1—C_2$  der Reihe nach mit  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , so ergibt sich aus der Folgerung des Bobillier'schen Satzes, dass Winkel  $pq$  gleich ist Winkel  $ac$ . Daraus lässt sich unmittelbar der Krümmungsmittelpunkt  $C_2$  der zu suchenden Hüllbahn aufsuchen.

Erteilt man dem beweglichen System eine Geschwindigkeit (Fig. 3), so muss die eben besprochene Lagenbeziehung der Krüm-

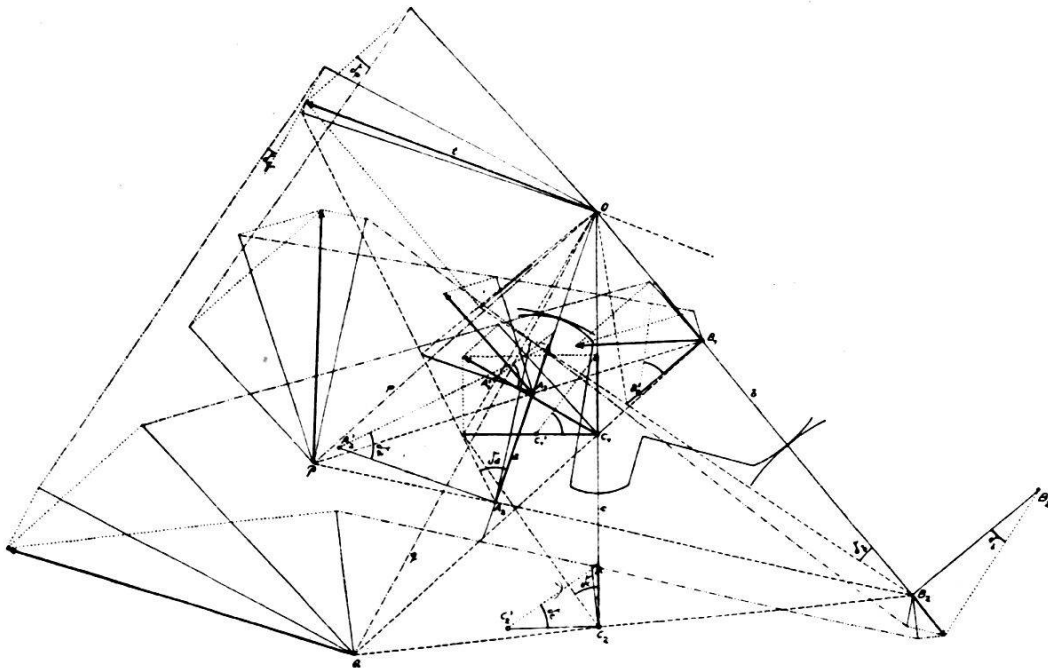


Fig. 3.

mungsmittelpunkte der bewegten Kurven und der ihrer Hüllbahnen erhalten bleiben. Denkt man sich die Geraden  $a$ ,  $b$ ,  $c$  mit den Berührungspunkten der aufeinander gleitenden Kurven fest verbunden, dann rollen diese Geraden auf den Evoluten der festen Hüllbahnen bei  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  ab (Fig. 2). Der Momentanpol 0 ergibt sich stets als Schnittpunkt der Geraden  $a$  und  $b$ , so dass durch die Bewegung dieser Geraden die feste Polbahn erzeugt wird.

Die Evoluten des bewegten Systems rollen bei  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  auf den Geraden  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ab, wodurch die Punkte  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  als Krümmungsmittelpunkte der jeweiligen Berührungspunkte beider Kurven (Punkte der Bobillier'schen Konstruktion) eine Bewegung ausführen, welche sich zusammensetzt aus der Bewegung der mit  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  zusammenfallenden Punkten der Geraden  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und

einer Bewegung der Evoluten auf diesen Geraden. Die mit  $A_1, B_1, C_1$  zusammenfallenden Punkte des bewegten Systems haben senkrecht zu den Geraden  $a, b, c$  die gleichen Geschwindigkeitskomponenten wie die Punkte  $A_1, B_1, C_1$  als Punkte der Bobillier'schen Konstruktion bezw. der Geraden  $a, b, c$ . Durch Gleichsetzen dieser zu  $a$  und  $b$  senkrecht stehenden Komponenten der Geschwindigkeiten der Punkte  $A_1$  bzw.  $B_1$ , kann man nach Annahme der Winkelgeschwindigkeit  $w = \text{tg } \vartheta$  des bewegten Systems, die Winkelgeschwindigkeiten  $w_a = \text{tg } \delta_a$  und  $w_b = \text{tg } \delta_b$  der Strahlen  $a$  und  $b$  bestimmen.

Es ist (siehe Fig. 3)  $0A_1 \cdot \text{tg } \delta = A_2A_1 \cdot \text{tg } \delta_a$  und  $0B_1 \cdot \text{tg } \delta = B_2B_1 \cdot \text{tg } \delta_b$ . Die Geschwindigkeit  $v_0$  des Punktes  $0$  ergibt sich aus  $v_0^{\perp a} = A_20 \cdot \text{tg } \delta_a$  und  $v_0^{\perp b} = B_20 \cdot \text{tg } \delta_b$ . Die Winkelgeschwin-

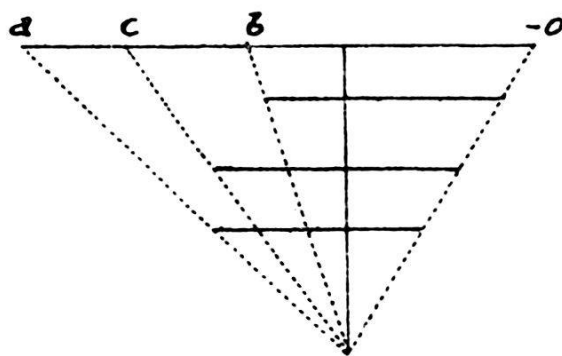


Fig. 4.

digkeit, mit welcher sich die Geraden  $a, b, c$  auf den Evoluten bei  $A_1, B_1, C_1$  abrollen, ergibt sich als Differenz der Winkelgeschwindigkeiten der Strahlen  $a, b, c$  und des Systems. Da diese Winkelgeschwindigkeiten verschiedene Vorzeichen haben, so sind ihre absoluten Werte zu addieren. (Siehe Fig. 4.)

Die Geschwindigkeit, mit welcher die Gerade  $a$  auf der Evolute bei  $A_1$  abrollt, ergibt sich aus

$$v_{A_1}^a = A_1' A_1 \cdot (\text{tg } \delta_a - \text{tg } \delta).$$

Ebenso ist

$$v_{B_1}^b = B_1' B_1 \cdot (\text{tg } \delta_b - \text{tg } \delta)$$

und

$$v_{C_1}^c = C_1' C_1 \cdot (\text{tg } \delta_c - \text{tg } \delta).$$

Die Punkte  $A_2, B_2, C_2$  als Punkte der Bobillier'schen Konstruktion bewegen sich infolge der Abrollung der Geraden  $a, b, c$  auf den Evoluten der Hüllbahnen. Man erhält ihre Geschwindigkeiten aus:

$$v_{A_2} = A_2' A_2 \cdot \text{tg } \delta_a, \quad v_{B_2} = B_2' B_2 \cdot \text{tg } \delta_b, \quad v_{C_2} = C_2' C_2 \cdot \text{tg } \delta_c.$$