Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 3 (1930)
Heft: III-IV

Artikel: Die graphischen Methoden der Bewegungslehre (Kinematik). III. Teil
Autor: Brandenberger, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-109806

Die graphischen Methoden der Bewegungslehre (Kinematik)

von Dr. Ing. **H. Brandenberger**, Zürich.

(21. I. 30.)

III. TEIL.

Die höheren Savary'schen Gleichungen.

Unter den höheren Savary'schen Gleichungen sollen die Beziehungsgleichungen verstanden werden, die zwischen den Krümmungsradien ($r_1, r_1', r_1'', \ldots$) der 1. und höheren Evoluten der Kurve eines eben bewegten starren Systems und den Krümmungsradien ($r_2, r_2', r_2'', \ldots$) der 1. und höheren Evoluten der eingehüllten Kurve und den Durchmessern ($d, d', d'', \ldots$) der 1., 2., 3., ... Rückkehrkreise bestehen.

Um an die Aufstellung dieser Gleichungen herantreten zu können, müssen zuerst andere grundlegende Probleme behandelt werden.

a) *Die Erzeugung einer Kurve als Eingehüllte einer bewegten Kurve.*

Eine Aufgabe der Bewegungslehre können wir dadurch leicht durchschauen, wenn wir den unendlich kleinen Wegelementen endliche Grössen geben und die in den einzelnen Zeitelementen aufeinander folgenden Lagen nebeneinander aufzeichnen. Dies soll in den Fig. 26 bis 29 für die Erzeugung einer Kurve β als Eingehüllte einer bewegten Kurve α dargestellt sein.

Die Berührungsnormale b ist ein Hilfspolsystem, auf dem die Evoluten der Kurven α und β abrollen.

Es ist

0 ($0_1, 0_2, 0_3, \ldots$) der Momentanpol des bewegten Systems S der Kurve α.

$0_1 - 0_2 - 0_3 - \ldots$ die feste Polbahn.

$\underline{A}$ ($\underline{A}_1, \underline{A}_2, \underline{A}_3, \ldots$) der jeweilige Krümmungsmittelpunkt der Kurve α für die Punkte und Stellungen, durch die die Hüllbahn β bestimmt wird.

A^s ($A_1^s, A_2^s, A_3^s, \ldots$) der Punkt des bewegten Systems S, der zu Beginn der Bewegung mit dem Krümmungsmittelpunkt $\underline{A}$ zusammenfällt.

B (B_1, B_2, . . .) der jeweilige Krümmungsmittelpunkt der Hüllbahn β.
Unter $b^{(n)}$ soll die $n$te Beschleunigung verstanden werden, wobei $b^{(0)} = v$, $b^{(1)} = b$, $b^{(2)} = b'$, $b^{(3)} = b''$, . . . usw. ist.

$\lambda^{(n)}$ $n$te Winkelbeschleunigung des Systems S gemäss der Winkelelemente $d\varphi_1$, $d\varphi_2$, $d\varphi_3$, . . .

$\lambda_a{}^{(n)}$ $n$te Winkel Winkelbeschleunigung gemäss der Winkelelemente $d\alpha_1$, $d\alpha_2$, . . .

$\lambda_b{}^{(n)}$ $n$te Winkelbeschleunigung gemäss der Winkelelemente $d\beta_1$, $d\beta_2$, . . .

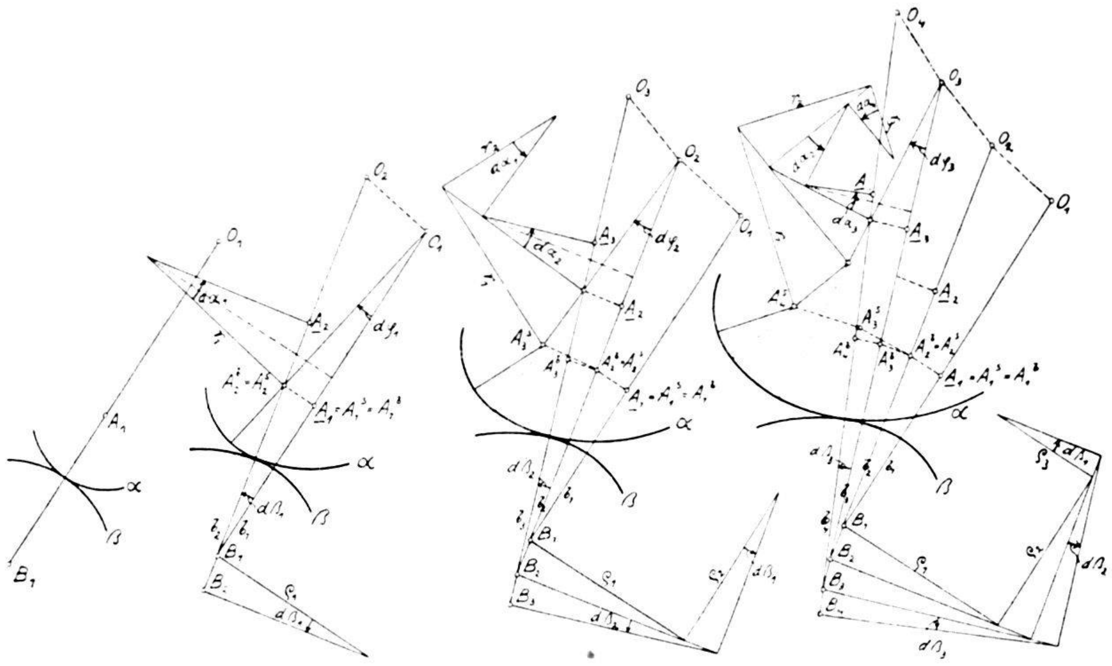

Fig. 26—29.

Es ist

$b_{A^s}^{(n)} = b_{0\,(s)}^{(n)} + b_{A^s\ \text{um}\ 0\,(s)}^{(n)}$ die $n$te Beschleunigung des Punktes A^s, wobei 0 (s) der in 0 gelegene Systempunkt ist. (25)

$b_{\underline{A}}^{(n)\ \text{rel.}\ S}$ = die $n$te Beschleunigung entsprechend der Bewegung des Punktes $\underline{A}$ auf dem System S (längs der Evolute der Kurve α). (26)

$b_{\underline{A}}^{(n)\ \text{cor.}\ S}$ = die $n$te Coriolis-Beschleunigung entsprechend der Bewegung des Punktes $\underline{A}$ auf dem System S. (27)

$b_{A^b}^{(n)}$ = die $n$te Beschleunigung des Punktes A^b als Punkt des Strahles b (b_1, b_2, b_3, . . .). (28)

$b_{\underline{A}}^{(n)\ \text{rel.}\ b}$ = die $n$te Beschleunigung entsprechend der Bewegung des Punktes $\underline{A}$ auf dem Strahle b. (29)

$b_{\underline{A}}^{(n)\,\mathrm{cor.}\,b}$ = die $n$te Coriolis-Beschleunigung entsprechend der Bewegung des Punktes $\underline{A}$ auf dem Strahle b. (30)

Allgemein ist $\lambda_a^{(n)} = \lambda_b^{(n)} - \lambda^{(n)}$, da $d\alpha_1 = d\beta_1 - d\varphi_1$, $d\alpha_2 = d\beta_2 - d\varphi_2, \ldots$ ist.

Falls ${}^n b^{(n)}$ die auf $P\,A\,B$ normal stehende Komponente einer Beschleunigung $b^{(n)}$ ist, so lautet die Gleichung zur Bestimmung von $\lambda_b^{(n)}$:

${}^n b_A^{(n)}$ laut Gleichungen (25), (26), (27) = ${}^n b_{\underline{A}}^{(n)}$ laut Gleichungen (28), (29), (30).

$$ {}^n b_{0\,(s)}^{(n)} + {}^n b_{A^s\,\mathrm{um}\,0\,(s)}^{(n)} + {}^n b_{\underline{A}}^{(n)\,\mathrm{rel.}\,s} + {}^n b_{\underline{A}}^{(n)\,\mathrm{cor.}\,s} = {}^n b_{A^b}^{(n)} + b_{\underline{A}}^{(n)\,\mathrm{cor.}\,b} \quad (31) $$

$$ \text{da } {}^n b_{\underline{A}}^{(n)\,\mathrm{rel.}\,b} = 0 \text{ und } {}^n b_{\underline{A}}^{(n)\,\mathrm{cor.}\,b} = b_{\underline{A}}^{(n)\,\mathrm{cor.}\,b} $$

(siehe Formeln über die höheren Coriolis-Beschleunigungen). Die Beschleunigung des Punktes $\underline{A}$ lässt sich somit errechnen aus:

$$ b_{\underline{A}}^{(n)} = b_{A^b}^{(n)} + b_{\underline{A}}^{(n)\,\mathrm{rel.}\,b} + b_{\underline{A}}^{(n)\,\mathrm{cor.}\,b}. \quad (32) $$

Die Komponente der Beschleunigung des Punktes 0 senkrecht zur Geraden b ermittelt man aus:

$$ {}^{n\,b} b_0^{(n)} = {}^{n\,b} b_{0\,(b)}^{(n)} + b_0^{(n)\,\mathrm{cor.\,rel.}\,b}. \quad (33) $$

I. Wendet man die vorstehenden Gleichungen auf die Geschwindigkeitsverhältnisse an, so erhält man:

$(n) = 0$

$$ v_{A^s} = 0 + 0\,A \cdot w. \quad (25') $$

$$ v_{\underline{A}}^{\mathrm{rel.}\,s} = r_1 \cdot w_a. \quad (26') $$

$$ v_{\underline{A}}^{\mathrm{cor.}\,s} = 0. \quad (27') $$

$$ v_{A^b} = BA \cdot w_b. \quad (28') $$

$$ v_{\underline{A}}^{\mathrm{rel.}\,b} = r_1 \cdot w_a. \quad (29') $$

$$ v_{\underline{A}}^{\mathrm{cor.}\,b} = 0. \quad (30') $$

$$ 0\,A \cdot w = BA \cdot w_b. \quad (31') $$

$$ v_{\underline{A}} = BA \cdot w_b + r_1 \cdot w_a. \quad (32') $$

$$ \text{Aus (31') ist } w_b = \frac{0\,A}{B\,A} \cdot w; $$

$$ w_a = w_b - w = w\left(\frac{0\,A}{B\,A} - 1\right) = w\,\frac{0\,A - B\,A}{B\,A} = w \cdot \frac{0\,B}{B\,A}. $$

Aus w_b und w_d zweier Normalstrahlen b und d kann man die Polwechselgeschwindigkeit v_0 bestimmen. Die Komponente normal b ist ${}^{nb}v_0 = B0 \cdot w_b \ldots$ (33′).

II. Unter Berücksichtigung der Gleichungen des Kapitels 3 erhält man für die Verhältnisse der ersten Beschleunigung:

$(n) = 1$

$$b_{A^s} = -v_0 \cdot w + 0A \cdot \lambda + 0A \cdot w^2. \qquad (25'')$$

$$b_{\underline{A}}^{\text{rel. } s} = r_1 \lambda_a + r_1 w_a{}^2 - r_2 \cdot w_a{}^2. \qquad (26'')$$

$$b_{\underline{A}}^{\text{cor. s}} = 2w\, r_1 \cdot w_a. \qquad (27'')$$

$$b_{A^b} = BA \cdot \lambda_b + BA \cdot w_b{}^2 - \varrho_1 \cdot w_b{}^2. \qquad (28'')$$

$$b_{\underline{A}}^{\text{rel. } b} = r_1 \lambda_a - r_2 \cdot w_a{}^2. \qquad (29'')$$

$$b_{\underline{A}}^{\text{cor. } b} = 2w_b \cdot r_1 \cdot w_a. \qquad (30'')$$

$$^{n}(-v_0 \cdot w) + 0A \cdot \lambda + r_1 w_a{}^2 + 2w\, r_1\, w_a = BA \cdot \lambda_b - \varrho_1 \cdot w_b$$
$$+ 2w_b\, r_1\, w_a. \qquad (31'')$$

Daraus ist λ_b bestimmbar; $\lambda_a = \lambda_b - \lambda$

$$b_{\underline{A}} = BA \cdot \lambda_b + BA \cdot w_b{}^2 - \varrho_1 \cdot w_b{}^2 + r_1 \lambda_a - r_2\, w_a{}^2$$
$$+ 2w_b \cdot r_1 \cdot w_a. \qquad (32'')$$

Aus λ_b und λ_d zweier Normalstrahlen b und d kann man die Polwechselbeschleunigung b_0 bestimmen. Die Komponente normal b ist:

$$^{nb}b_0 = B0 \cdot \lambda_b - \varrho_1 \cdot w_b{}^2 + 2w_b \cdot v_0{}^{\text{rel. } b}. \qquad (33'')$$

III. Für die Verhältnisse der zweiten Beschleunigung ergeben sich die Gleichungen:

$(n) = 2$

$$b_{A^s}{}' = -v_0 \cdot w^2 - 2\, v_0 \cdot \lambda - b_0 \cdot w + 0A \cdot \lambda' + 0A \cdot 3w\lambda$$
$$+ 0A \cdot w^3. \qquad (25''')$$

$$b_{\underline{A}}{}'^{\text{ rel. } s} = r_1 \cdot \lambda_a{}' + (r_1 - r_2) \cdot 3w_a \lambda_a + (r_2 - 2r_2 + r_3) \cdot w_a{}^3. \qquad (26''')$$

$$b_{A}{}'^{\text{ cor. } s} = 3w \cdot [r_1 \lambda_a + r_1 w_a{}^2 - r_2 w_a{}^2] + 3\lambda\, r_1\, w_a. \qquad (27''')$$

$$b_{A^b}{}' = BA \cdot \lambda_b{}' + (BA - \varrho_1) \cdot 3 \cdot w_b \cdot \lambda_b$$
$$+ (BA - 2\varrho_1 + \varrho_2) \cdot w_b{}^3. \qquad (28''')$$

$$b_{\underline{A}}{}'^{\text{ rel. } b} = r_1 \lambda_a{}' - r_2 \cdot 3 \cdot w_a \lambda_a + (r_1 + r_3) \cdot w_a{}^3. \qquad (29''')$$

$$b_{\underline{A}}{}'^{\text{ cor. } b} = 3w_b \cdot (r_1 \lambda_a + r_1 w_a{}^2 - r_2\, w_a{}^2) + 3\lambda_b \cdot r_1 \cdot w_a. \qquad (30''')$$

$$
\begin{aligned}
{}^{n}(-v_0 \cdot w^2 - 2 v_0 \cdot \lambda - b_0 \cdot w) + 0A \cdot \lambda' + 0A \cdot w^3 + r_1 \cdot 3 w_a \cdot \lambda_a \\
- 2 r_2 w_a{}^3 + 3 w r_1 \lambda_a - 3 w r_2 w_a{}^2 + 3 \lambda r_1 w_a = BA \lambda_b' - \varrho_1 \cdot 3 w_b \cdot \lambda_b \\
+ (BA + \varrho_2) \cdot w_b{}^3 + 3 w_b (r_1 \lambda_a - r_2 w_a{}^2) + 3 \lambda_b \cdot r_1 \cdot w_a \,. \quad (31''')
\end{aligned}
$$

Daraus ist λ_b' bestimmbar; $\lambda_a' = \lambda_b' - \lambda'$

$$b_{\underline{A}}' = b_{A\,b}' + b_{\underline{A}}'^{\,\mathrm{rel.}\,b} + b_{\underline{A}}'^{\,\mathrm{cor.}\,b} \qquad (32''')$$

laut Gleichungen (28''), (29''), (30'').

Aus λ_b' und λ_d' zweier Normalstrahlen b und d kann man die zweite Polwechselbeschleunigung b_0' bestimmen. Die Komponente normal b ist

$$
\begin{aligned}
{}^{nb}b_0' = B0 \cdot \lambda_b' - \varrho_1 \cdot 3 \cdot w_b \cdot \lambda_b + (B0 + \varrho_2) \cdot w_b{}^3 \\
+ 3\, w_b \cdot b_0{}^{\mathrm{rel.}\,b} + 3\, \lambda_b \cdot v_0{}^{\mathrm{rel.}\,b} \,. \qquad (33''')
\end{aligned}
$$

Mithin wurden die vektoriellen Gleichungen abgeleitet, die bei der Anwendung der Beschleunigungsverhältnisse auf die Bobillier'sche Konstruktion zur Verwendung gelangen. Vorstehende Gleichungen bilden auch die Grundlage zur Ableitung der höheren Savary'schen Gleichungen.

b) *Die Beziehungen der höheren Rückkehrkreise zur festen und beweglichen Polbahn.*

In jedem Augenblick der ebenen Bewegung eines starren Systems liegen die 1., 2., 3., ... Krümmungsmittelpunkte aller

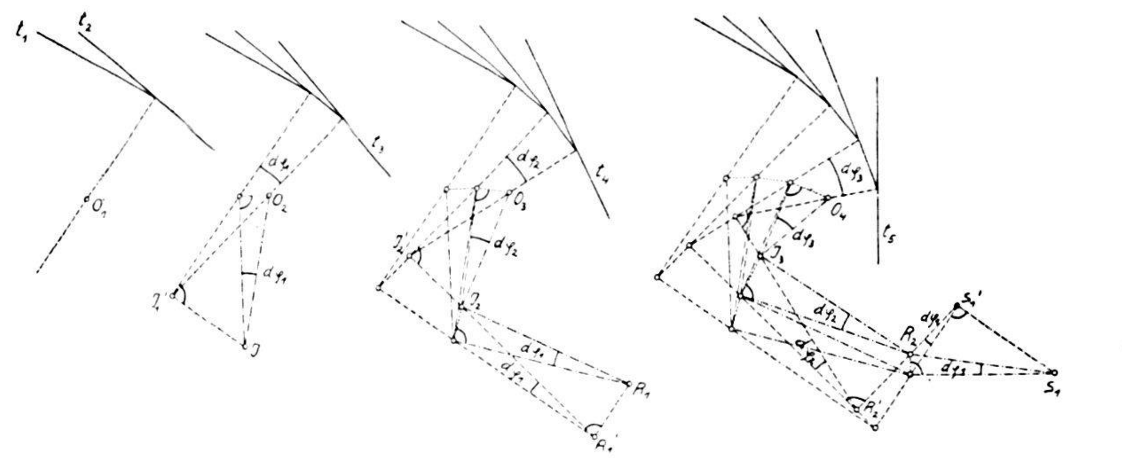

Fig. 30—33.

Hüllbahnelemente, die augenblicklich von den Geraden des bewegten Systems erzeugt werden, auf je einem Kreise, dem 1., 2., 3., ... Rückkehrkreis. In den Fig. 30 bis 33 bedeuten $t_1, t_2, \ldots$ usw. die aufeinanderfolgenden Lagen einer mit dem System S verbundenen Geraden $t, d\varphi_1, d\varphi_2, \ldots$ die Verdrehungswinkel des

Systems in den einzelnen Zeitelementen. Der Krümmungsmittelpunkt J_1' der Hüllbahn der Geraden t liegt auf dem Kreise mit dem Durchmesser $0_1 J_1$ (1. Rückkehrkreis), da von ihm aus das Polbahnelement $0_1 0_2$ unter dem Winkel $d\varphi_1$ (ebenso wie von dem 1. Rückkehrpol aus) gesehen wird. Ebenso liegt R_1' auf dem Kreise mit dem Durchmesser $J_1 R_1$ usw. Die Normalen in den $n$ten Krümmungsmittelpunkten an die entsprechenden $n$ten Evoluten gehen alle durch einen Punkt, den $n$ten Rückkehrpol. Der nullte Rückkehrpol fällt mit dem Momentanpol der Bewegung zusammen.

Jeder Pol führt mit der Winkelgeschwindigkeit des Systems eine Drehung um den nächst höheren Pol aus. Dementsprechend sind die aufeinanderfolgenden Lagen des $n$ten Poles die feste Polbahn für die Bewegung des $n-1$ten Poles. Durch m Lagen des $n$ten Poles sind $m+1$ Lagen des $n-1$ten Poles bestimmt. Der 1., 2., 3.,— . . Rückkehrpol bestimmt 2, 3, 4, . . . benachbarte Lagen des Momentanpoles.

Durch die Bewegung des Momentanpoles (Polwechselbewegung $[v_0, b_0, b_0', \ldots]$) und die Winkelgrössen des bewegten Systems $(w, \lambda, \lambda', \ldots)$ ist die Bewegung des Systems festgelegt (siehe Gleichungen (10)—(13)). Es ist daher folgende Aufgabe lösbar:

Aus dem 2., 3., 4., . . . Rückkehrpol sollen die 1., 2., 3., . . . Krümmungsmittelpunkte der festen und beweglichen Polbahn bestimmt werden.

Der Weg der Lösung ist folgender:

Man sucht die $n$te Polwechselbeschleunigung $b_0^{(n)}$ des Momentanpoles 0 und die $n$te Polwechselbeschleunigung $b_J^{(n)}$ des ersten Rückkehrpoles J aus den höheren Rückkehrpolen und den beliebig angenommenen Winkelgrössen $w, \lambda, \lambda', \ldots$ Aus $b_0^{(n)}$ und $b_J^{(n)}$ bestimmt man die $n$te Winkelbeschleunigung $\lambda_a^{(n)}$ der Polbahnnormalen $a\,[=0J]$. Die $n$te Polwechselbeschleunigung $b_0^{(n)}$ in Verbindung mit der $n$ten Winkelbeschleunigung $\lambda_a^{(n)}$ bestimmt den $(n+1)$ten Krümmungsmittelpunkt der festen Polbahn.

Sind $w_l, \lambda_b, \lambda_b', \ldots$ die Winkelgrössen des Normalstrahles der beweglichen Polbahn relativ zum bewegten System, so ergeben sich die Krümmungsmittelpunkte der beweglichen Polbahn durch Gleichsetzen der Tangentialbeschleunigung längs der festen und der beweglichen Polbahn, unter Berücksichtigung der Beziehungen:

$$w_b = w_a - w, \quad \lambda_b = \lambda_a - \lambda \quad \text{usw.}$$

I. Gegeben seien: Der Momentanpol 0, der 1. und 2. Rückkehrpol J bezw. R (siehe Fig. 34).

Die Geschwindigkeiten der Punkte J und 0 sind:

$$v_J = RJ \cdot w = J1$$
$$v_0 = J0 \cdot w = 0\,3$$

Die zu a senkrecht stehenden Komponenten dieser Geschwindigkeiten sind:

$${}^{na}v_0 = J2$$
$${}^{na}v_0 = v_0 = 0\,3\,.$$

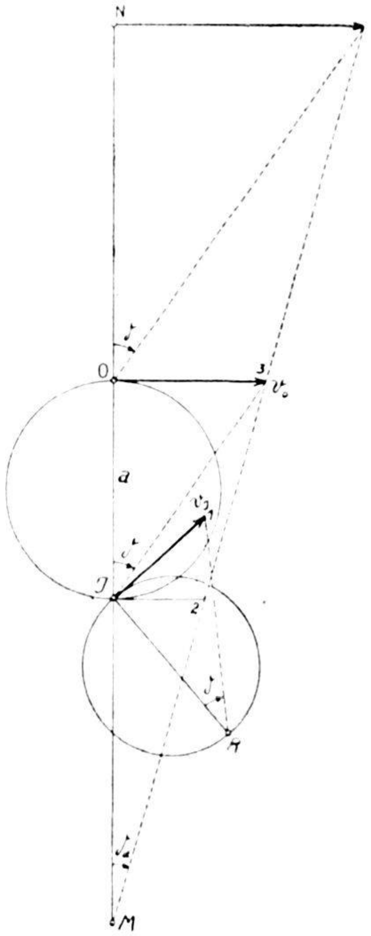

Fig. 34.

Da die Polbahnnormale die Verbindungsgerade der Punkte 0 und J ist, so erhält man ihre Winkelgeschwindigkeit aus der Beziehungsgleichung

$${}^{na}v_0 = {}^{na}v_J + J0 \cdot w_a\,.$$

Daraus errechnet sich

$$w_a = \frac{{}^{na}v_0 - {}^{na}v_J}{J0} = \frac{0\,3 - J2}{J0}\,.$$

Ist M der Krümmungsmittelpunkt der festen Polbahn, so ist

$$v_0 = M0 \cdot w_a; \quad M0 = \frac{v_0}{w_a} \cdot$$

Den Krümmungsmittelpunkt der beweglichen Polbahn kann man entweder erhalten aus

$$w_b = w_a - w\ ; \ v_0 = N0 \cdot w_b, \ N0 = \frac{v_0}{w_b}$$

oder einfacher, wie in Fig. 34.

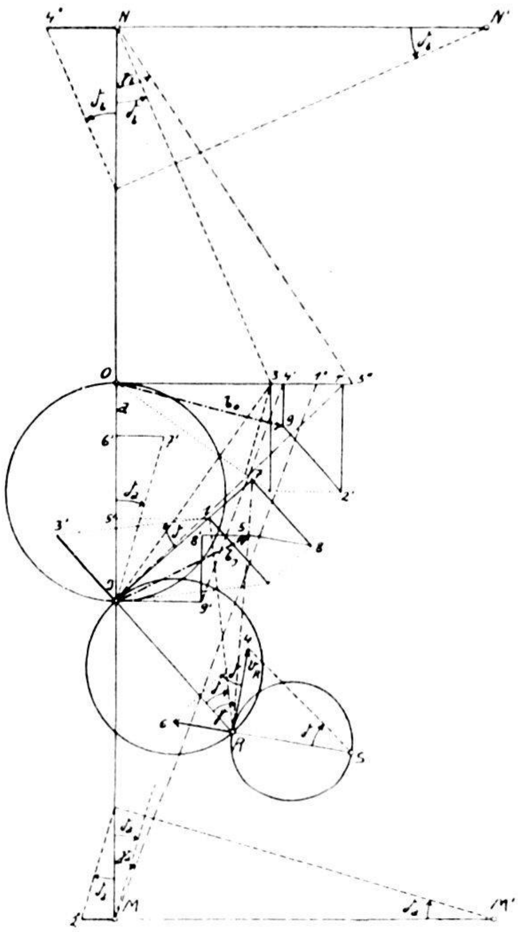

Fig. 35.

II. Die Aufgabe sei erweitert durch die Angabe des 3. Rückkehrpoles S (siehe Fig. 35).

Die Wechselgeschwindigkeit des Rückkehrpoles R ist: $v_R = SR \cdot w = R4$. Die Wechselbeschleunigung b_J ergibt sich nach den bereits genannten Beziehungen aus:

$$\begin{aligned} b_J &= b_{R\,\text{syst.}\,J} + b_{J\,\text{um}\,R} = J5 \\ b_{R\,\text{syst.}\,J} &= -v_R \cdot w = R6 = 85 \\ b_{J\,\text{um}\,R} &= RJ \cdot \lambda + RJ \cdot w^2 = J7 + 78\,. \end{aligned}$$

Ebenso erhält man die Wechselbeschleunigung des Momentanpoles:

$$b_0 = b_{J\,\text{syst.}\,0} + b_{0\,\text{um}\,J} = 0\,9$$
$$b_{J\,\text{syst.}\,0} = -v_J \cdot w = J3' = 2'\,9$$
$$b_{0\,\text{um}\,J} = J0 \cdot \lambda + J0 \cdot w^2 = 0\,1' + 1'2'\,.$$

Ist a die Polbahnnormale, die mit dem Momentanpol fest verbunden ist, und stets durch den 1. Rückkehrpol hindurchgeht, so ergibt sich die zu a senkrecht stehende Komponente der Beschleunigung b_0 zu ${}^{na}b_0 = 0\,4'$. Die zu a senkrecht stehende Beschleunigungskomponente des mit J zusammenfallenden Punktes der Geraden a erhält man aus:

$$^{na}b_{J\,\text{syst.}\,a} = {}^{na}b_J - 2 \cdot v_J{}^{\text{rel.}\,a} \cdot w_a = J9'\,.$$

Es ist

$$2 \cdot v_J{}^{\text{rel.}\,a} = J5' + 5'\,6'$$

und

$$2\,v_J{}^{\text{rel.}\,a} \cdot w_a = 6'7' = 8'5\,.$$

Die Bestimmungsgleichung für die Winkelbeschleunigung λ_a lautet somit:

$$^{na}b_0 = {}^{na}b_{J\,\text{syst. a}} + J0 \cdot \lambda_a\,.$$

Daraus errechnet sich die Winkelbeschleunigung λ_a zu

$$\lambda_a = \frac{^{na}b_0 - {}^{na}b_{J\,\text{syst.}\,a}}{J0} = \frac{0\,4' - J9'}{J0}\,.$$

Andererseits ist laut den Gleichungen (1) usf. des Kapitels 3a die Tangentialbeschleunigung für die Bewegung des Momentanpoles, falls M' der Krümmungsmittelpunkt der Evolute der festen Polbahn ist:

$$^{na}b_0 = M0 \cdot \lambda_a - M'M \cdot w_a{}^2 = 0\,1'' + 1''4' = 0\,4'\,; - M'M \cdot w_a{}^2 = 1''4' = M2''\,.$$

$M - M'$ ist daraus graphisch leicht zu bestimmen.

Der Krümmungsmittelpunkt N' der Evolute der beweglichen Polbahn ermittelt sich aus:

$$\lambda_b = \lambda_a - \lambda\,;\; {}^{na}b_0 = N0 \cdot \lambda_b - N'N \cdot w_b{}^2 = 0\,3'' + 3''4' = 0\,4'$$
$$- N'N \cdot w_b{}^2 = 3''4' = N4''\,.$$

c) *Die höheren Savary'schen Gleichungen.*

Um die Beziehungsgleichungen zwischen den Krümmungen einer bewegten Kurve, der ihrer Eingehüllten und den Durchmessern der Rückkehrkreise aufzustellen, hat man sowohl auf

Grund der Gleichungen des Kapitels 4a als auf Grund der Beziehungen des vorigen Kapitels 4b die zur Berührungsnormalen b der beiden Kurven α und β senkrecht stehenden Komponenten der Bewegungsgrössen des Momentanpoles aufzustellen und diese einander gleich zu setzen.

Entsprechend den Fig. 26 bis 29 ergeben sich die zu b senkrecht stehenden Komponenten der Beschleunigung des Momentanpoles 0 aus den Gleichungen (33), (33′), (33″), . . ., usw.

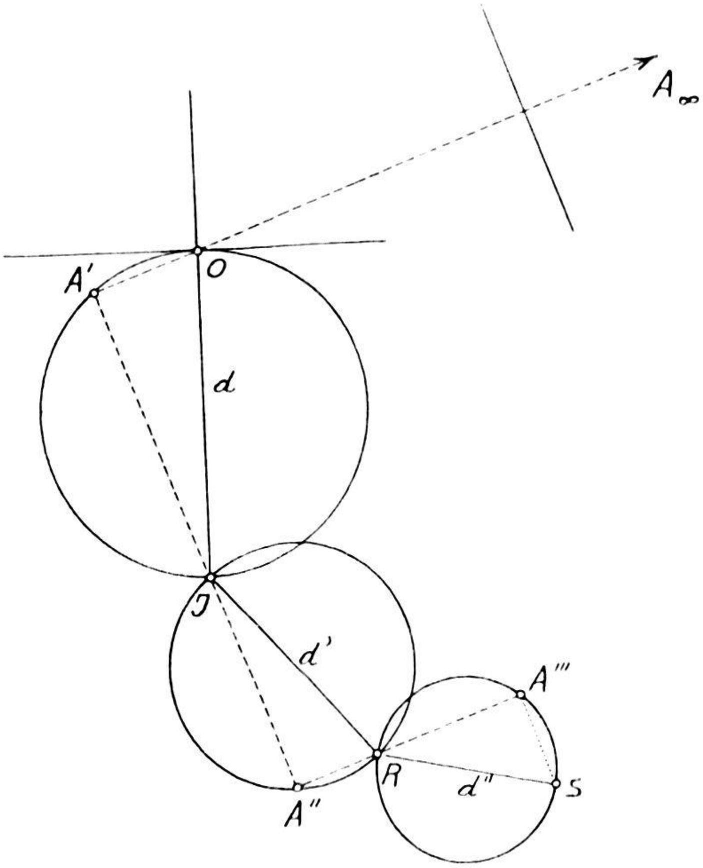

Fig. 36.

Sind in der Fig. 36 $d, d', d'', \ldots$ die Durchmesser des 1., 2., 3., . . . Rückkehrkreises, so ergibt sich auf Grund der im vorigen Kapitel gegebenen Erklärung die Bewegung $(v_0, b_0, b_0', \ldots)$ des Momentanpoles 0 aus:

$$v_0 = d \cdot w \tag{34}$$

$$b_0 = b_{J(0)} + b_{0 \text{ um } J(0)}$$

$$b_{J(0)} = -v_J \cdot w = -d' \cdot w^2 ,$$

da

$$v_J = d' \cdot w$$

$$b_{0 \text{ um } J(0)} = d \cdot \lambda + d \cdot w^2 .$$

$$b_0 = -d' \cdot w^2 + d\,(\lambda + w^2) \tag{35}$$

$$b_0' = b_J'{}_{(0)} + b_0'{}_{\mathrm{um}\,J\,(0)}$$

$$b_J'{}_{(0)} = -v_J \cdot w^2 - 2 \cdot v_J \cdot \lambda - b_J \cdot w = -v_J(w^2 + 2\lambda) - b_J \cdot w$$

$$v_J = d' \cdot w$$

$$b_J = -d'' \cdot w^2 + d'\,(\lambda + w^2) \quad \text{[analog Gleichung (35)]}$$

$$b_J'{}_{(0)} = -d'\,(w^3 + 2\lambda w) + d'' \cdot w^3 - d'\,(\lambda w + w^3)$$
$$= -d'\,(2w^3 + 3\lambda w) + d'' \cdot w^3$$

$$b_0'{}_{\mathrm{um}\,J\,(0)} = d\lambda' + d \cdot 3w\lambda + d \cdot w^3 = d\,(\lambda' + 3w\lambda + w^3)\,.$$

$$b_0' = d\,(\lambda' + 3w\lambda + w^3) - d'\,(2w^3 + 3\lambda w) + d'' \cdot w^3\,. \tag{36}$$

Bezeichnen wir z. B. unter ${}^{b}d$ die Projektion des Vektors d auf die Richtung b und unter ${}^{n\,b}d$ die Projektion des Vektors d senkrecht zur Richtung b, so ergeben sich weiters folgende Gleichungen:

$${}^{b}v_0 = {}^{n\,b}d \cdot w\,. \tag{34'}$$

$${}^{n\,b}v_0 = {}^{b}d \cdot w\,. \tag{34''}$$

$${}^{b}b_0 = -{}^{b}d' \cdot w^2 + {}^{nb}d \cdot \lambda + {}^{t}d \cdot w^2. \tag{35'}$$

$${}^{n\,b}b_0 = -{}^{n\,b}d' \cdot w^2 + {}^{b}d \cdot \lambda + {}^{n\,b}d \cdot w^2. \tag{35''}$$

$${}^{b}b_0' = {}^{n\,b}d\,(\lambda' + w^3) + {}^{b}d \cdot 3\,w\,\lambda - {}^{n\,b}d' \cdot 2\,w^3 - {}^{b}d' \cdot 3\,\lambda\,w$$
$$+ {}^{n\,b}d'' \cdot w^3. \tag{36'}$$

$${}^{n\,b}b_0' = {}^{b}d\,(\lambda' + w^3) + {}^{n\,b}d \cdot 3\,w\,\lambda - {}^{b}d' \cdot 2\,w^3 - {}^{n\,b}d' \cdot 3\,\lambda\,w$$
$$+ {}^{b}d'' \cdot w^3. \tag{36''}$$

Durch Gleichsetzen der zur Richtung b senkrecht stehenden Komponenten der Bewegungsgrössen des Momentanpoles 0 erhält man für $(n) = 0$

$${}^{n\,b}v_0 = B0 \cdot w_b = {}^{b}d \cdot w\,.$$

Unter Zuhilfenahme der Gleichungen des Kapitels 4a ist

$$w_b = \frac{0\,A}{B\,A} \cdot w\,.$$

Dieser Wert in die vorige Gleichung eingesetzt, ergibt

$$\frac{B\,0 \cdot 0\,A}{B\,A} \cdot w = {}^{b}d \cdot w$$

da $B0 = -0B$ und $BA = 0A - 0B$ ist,

$$\frac{1}{{}^{b}d} = \frac{0\,A - 0\,B}{0\,A\,.-0\,B} = -\frac{1}{0\,B} + \frac{1}{0\,A}$$

und somit

$$\frac{1}{{}^b d} = \frac{1}{0A} - \frac{1}{0B} \tag{37}$$

die vektorielle Form der Savary'schen Gleichung.

Für die Krümmungsmittelpunkte der unendlich fernen Punkte, bezw. aller Hüllbahnelemente, die augenblicklich von den Geraden des bewegten Systems erzeugt werden, ist $0A = \infty$, sodass sich ergibt

$$\frac{1}{{}^b d} = -\frac{1}{0B} \qquad \text{oder} \qquad 0B = -{}^b d$$

die Vektorgleichung des ersten Rückkehrkreises.

Setzen wir in der Gleichung (37) für den Ortsvektor des Punktes A $0A = a$, für $0B = 0A - BA = a - r$, wobei r der Krümmungsradius der Bahn des Punktes A ist, so ergibt sich für ${}^b d$ jetzt ${}^a d$ gesetzt,

$$\frac{1}{{}^a d} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a - r}$$

oder

$$a - \frac{a^2}{r} = {}^a d \ldots \tag{38}$$

Für $r = \infty$ erhält man

$$a = {}^a d \ldots \tag{39}$$

die Vektorgleichung des Wendekreises. Der Krümmungsradius r errechnet sich aus

$$r = \frac{a}{a - {}^a d} \cdot a\,,$$

was unmittelbar der bekannten Grübler'schen Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes entspricht[3]).

Für $(n) = 1$ erhält man:

$${}^{n\,b}b_0 = B0 \cdot \lambda_b - \varrho_1 \cdot w_b{}^2 + 2 w_b \cdot {}^b v_0 = - {}^{n\,b}d' \cdot w^2 + {}^b d \cdot \lambda + {}^{n\,b}d \cdot w^2 .$$

Der in dieser Gleichung noch unbekannte Wert λ_b lässt sich mit Hilfe der Gleichung (31″) ermitteln.

Da

$${}^{n\,b}(-v_0 \cdot w) = - {}^b v_0 \cdot w = - {}^{n\,b}d \cdot w^2$$

und

$$w_a = w \cdot \frac{0B}{BA}\,; \qquad w_b = w \frac{0A}{BA}$$

[3]) Zeitschr. f. Math. u. Physik, 29. Bd. (1884), S. 310.

) erhält man

$$\lambda_b = \left(\frac{-{}^{nb}d}{BA} + r_1 \frac{0B^2}{BA^3} + 2r_1 \frac{0B}{BA^2} + \varrho_1 \frac{0A^2}{BA^3} - 2r_1 \frac{0B \cdot 0A}{BA^3}\right)$$

$$\cdot w^2 + \frac{0A}{BA} \cdot \lambda .$$

'erner ist

$${}^{b}r_0 = {}^{nb}d \cdot w .$$

Diese Werte, in die obige Gleichung für ${}^{nb}b_0$ eingesetzt, rgeben nach Wegfall der Glieder mit λ und Kürzung durch w^2 ach einigen Umformungen die zweite Savary'sche Gleichung:

$$r_1 \frac{0B^3}{BA^3} - \varrho_1 \frac{0A^3}{BA^3} = -{}^{nb}d \cdot \frac{0A + 2 \cdot 0B}{BA} - {}^{nb}d' . \tag{40}$$

3emerkenswert ist, dass die Krümmungsradien der Evoluten der Kurven α und β nur von der Projektion des Durchmessers des weiten Rückkehrkreises auf die Richtung senkrecht zur Berührungsnormalen abhängig sind, ähnlich wie die Krümmungsradien ler Kurven nur von der Projektion des Durchmessers des ersten Rückkehrkreises auf die Richtung der Berührungsnormalen abhängig waren.

Setzen wir wie bei der 1. Savary'schen Gleichung für

$$0A = a\,,\ BA = r = \frac{a^2}{a - {}^{a}d}\,,\ 0B = 0A - BA = -\frac{a \cdot {}^{a}d}{a - {}^{a}d}$$

'erner für ${}^{nb}d = {}^{na}d$ und ${}^{nb}d' = {}^{na}d'$ entsprechend der Richtung les Ortsvektors a, so erhält Gleichung (40) die Form:

$$r_1 \frac{{}^{a}d^3}{a^3} + \varrho_1 \frac{(a - {}^{a}d)^3}{a^3} = {}^{na}d \cdot \frac{a - 3 \cdot {}^{a}d}{a} + {}^{na}d' . \tag{41}$$

'ür die Punktbahnen ist $r_1 = 0$ und

$$\varrho_1 = \frac{a^3}{(a - {}^{a}d)^3} \cdot \left[{}^{na}d - 3 \frac{{}^{na}d \cdot {}^{a}d}{a} + {}^{na}d'\right] . \tag{42}$$

Für die unendlich fernen Punkte bezw. für die Hüllbahnelemente, lie augenblicklich von den Geraden des bewegten Systems erzeugt werden, ist $a = \infty$, sodass sich ergibt

$$\varrho_1 = {}^{na}d + {}^{na}d' . \tag{43}$$

Unter Berücksichtigung, dass $0B = -{}^{a}d$ ist (siehe Folgerung aus der 1. Savary'schen Gleichung), stellt dies die Bedingungsgleichung für die Punkte des zweiten Rückkehrkreises vor (siehe Fig. 36).

Für diejenigen Punkte, die in vier unendlich benachbarten Lagen auf einen Kreis bleiben, wird $\varrho_1 = 0$. Wir erhalten somit für die Kreispunktkurve die Gleichung

$$a^2 [a \cdot {}^{na}d - 3\,{}^{na}d \cdot {}^{a}d + a \cdot {}^{na}d'] = 0 . \tag{44}$$

Dies ist eine Kurve dritter Ordnung mit dem Momentanpol als Doppelpunkt. Der Wert a errechnet sich aus

$$a = \frac{3 \cdot {}^{na}d \cdot {}^{a}d}{{}^{na}d + {}^{na}d'} . \tag{45}$$

Dieser Wert wird Null für ${}^{na}d = 0$ und ${}^{a}d = 0$, d. h. die Polbahn-

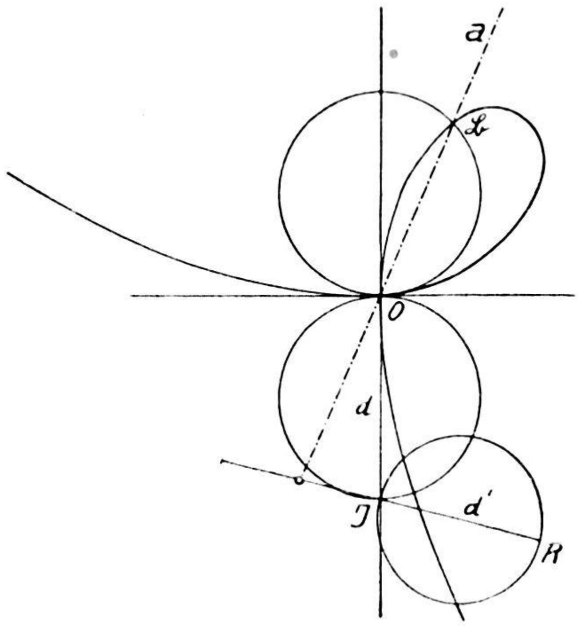

Fig. 37.

tangente und die Polbahnnormale sind Tangenten an die Kreispunktkurve[4]).

Dort wo die Kreispunktkurve den Wendekreis schneidet, ist derjenige Punkt, der während vier unendlich benachbarter Lagen auf einer Geraden bleibt (Ball'sche Punkt). Die Gleichung des Wendekreises lautet $a = {}^{a}d$. Dieser Wert in die Gleichung (45) eingesetzt, ergibt

$${}^{a}d = \frac{3\,{}^{na}d \cdot {}^{a}d}{{}^{na}d + {}^{na}d'} .$$

Daraus folgt

$$2\,{}^{na}d = {}^{na}d' . \tag{46}$$

[4]) Siehe R. Müller, Über die Krümmung der Bahnevoluten bei starren ebenen Systemen. Zeitschr. f. Mathem. u. Physik, 36. Bd. (1891), S. 196.

Aus dieser Bedingungsgleichung lässt sich auf einfache Weise aus den Vektoren der Durchmesser des ersten und zweiten Rückkehrkreises die Richtung des Ortsvektors des Ball'schen Punktes bestimmen. Man trägt (Fig. 37) den Vektor des Durchmessers des zweiten Rückkehrkreises im ersten Rückkehrpol auf und verbindet den Momentanpol mit dem Halbierungspunkt dieses Vektors.

Für $(n) = 2$ erhält man:

$$
\begin{aligned}
{}^{n\,b}b_0' = B0 \cdot \lambda_b' - 3\varrho_1 w_b \cdot \lambda_b + (B0 + \varrho_2) \cdot w_b{}^3 + 3 b_0{}^{\mathrm{rel.}\,b} \cdot w_b \\
+ 3 v_0{}^{\mathrm{rel.}\,b} \cdot \lambda_b = {}^b d\,(w^3 + \lambda') + 3\,{}^{n\,b}d \cdot w\lambda - 2\,{}^b d' \cdot w^3 - 3\,{}^{n\,b}d' \cdot w \cdot \lambda \\
+ {}^b d'' \cdot w^3 .
\end{aligned}
$$

Unter Heranziehung der Gleichung (31''') ergibt sich, bei Berücksichtigung, dass

$$
v_0 = d \cdot w \quad \text{und} \quad b_0 = - d' \cdot w^2 + d\,(\lambda + w^2)\,,
$$

der Wert λ_b' zu

$$
\begin{aligned}
BA \cdot \lambda_b' = - 2\,{}^b d \cdot w^3 - 3\,{}^{n\,b}d \cdot w\lambda + {}^b d' \cdot w^3 + 0A \cdot \lambda' + 0A \cdot w^3 \\
+ 3\,r_1\,w_a\,\lambda_a - 2\,r_2 \cdot w_a{}^3 + 3\,r_1 w \lambda_a - 3 r_2 w w_a{}^2 + 3\,r_1 w_a \lambda + 3\varrho_1 w_b \lambda_b \\
- (BA + \varrho_2) \cdot w_b{}^3 - 3\,r_1\,w_b \cdot \lambda_a + 3\,r_2\,w_b \cdot w_a{}^2 - 3\,r_1 w_a \lambda_b\,.
\end{aligned}
$$

Da $b_0{}^{\mathrm{rel.}\,b} = {}^b b_0 - {}^b b_{0\,(b)} = - {}^b d' \cdot w^2 + {}^{n\,b}d \cdot \lambda + {}^b d \cdot w^2 - B0 \cdot w_b{}^2$,

so ist weiter

$$
\begin{aligned}
{}^n b_0' = - \frac{2 \cdot B0}{BA} \cdot {}^b d \cdot w^3 - \frac{3 \cdot B0}{BA}\,{}^{n\,b}d \cdot w\lambda + \frac{B0}{BA} \cdot d' \cdot w^3 \\
+ \frac{B0 \cdot 0A}{BA} \cdot \lambda' + \frac{0A \cdot B0}{BA} \cdot w^3 + 3\,\frac{B0}{BA} \cdot r_1 w_a \cdot \lambda_a \\
- 2\,\frac{B0}{BA} \cdot r_2 \cdot w_a{}^3 + \frac{3\,B0}{BA} \cdot w \cdot r_1 \cdot \lambda_a - \frac{3\,B0}{BA} \cdot r_2 \cdot w \cdot w_a{}^2 \\
+ \frac{3\,B0}{BA} \cdot r_1 \cdot w_a \cdot \lambda + 3\,\frac{B0}{BA} \cdot \varrho_1 \cdot w_b \cdot \lambda_b - B0 \cdot w_b{}^3 \\
- \frac{B0}{BA} \cdot \varrho_2 \cdot w_b{}^3 - \frac{3\,B0}{BA} \cdot r_1 \cdot w_b \cdot \lambda_a + \frac{3\,B0}{BA} \cdot r_2 \cdot w_b \cdot w_a{}^2 \\
- \frac{3\,B0}{BA} \cdot r_1 \cdot w_a \cdot \lambda_b - 3\varrho_1 \cdot w_b \cdot \lambda_b + B0 \cdot w_b{}^3 + \varrho_2 \cdot w_b{}^3 \\
- 3 \cdot {}^b d' \cdot w_b \cdot w^2 + 3\,{}^{n\,b}d \cdot w_b \cdot \lambda + 3\,{}^b d \cdot w_b \cdot w^2 - 3\,B0 \cdot w_b{}^3 \\
+ 3\,{}^{n\,b}d \cdot w \cdot \lambda_b = {}^b d \cdot w^3 + {}^b d \cdot \lambda' + 3\,{}^{n\,b}d \cdot w \cdot \lambda - 2\,{}^b d' \cdot w^3 \\
- 3 \cdot {}^{n\,b}d' \cdot w\lambda + {}^b d'' \cdot w^3 .
\end{aligned}
$$

Unter Berücksichtigung, dass nach der 1. Savary'schen Gleichung

$$\frac{B0 \cdot 0A}{BA} = {}^b d$$

ist, heben sich die Glieder mit λ' auf. Setzt man weiter für

$$w_a = \frac{0B}{BA} \cdot w\,, \quad w_b = \frac{0A}{BA} \cdot w\,,$$

so ergibt sich aus der bereits für λ_b gefundenen Gleichung

$$\lambda_b = \left[-r_1 \frac{0B^2}{BA^3} + \varrho_1 \frac{0A^2}{BA^3} - \frac{{}^{nb}d}{BA}\right] \cdot w^2 + \frac{0A}{BA} \cdot \lambda$$

$$= K \cdot w^2 + \frac{0A}{BA} \cdot \lambda$$

$$\lambda_a = \lambda_b - \lambda = K \cdot w^2 + \frac{0A}{BA} \cdot \lambda - \lambda\,.$$

Diese Werte in die Doppelgleichung für ${}^{nb}b_0{}'$ eingesetzt, erhält man für die Glieder mit λ, auf eine Seite geschafft, den Wert Null, wenn man die 2. Savary'sche Gleichung in der Form der Gleichung (40) berücksichtigt.

Nach Kürzung der übrig bleibenden Glieder durch w^3 erhält man die 3. Savary'sche Gleichung

$$\frac{3 \cdot 0B^2}{BA^2} \cdot {}^b d + \frac{3}{BA} \cdot \left[r_1 \frac{0B^2}{BA^2} - \varrho_1 \frac{0A}{BA^2} + {}^{nb}d\right]^2$$
$$+ {}^b d' \cdot \frac{0A + 30B}{BA} + \frac{0B^4}{BA^4} \cdot r_2 - \frac{0A^4}{BA^4} \cdot \varrho_2 = - {}^b d'' \ldots \quad (47)$$

Wieder hängen die neuen Radien r_2 und ϱ_2 nur von der in ihre Richtung fallende Komponente des höchsten Rückkehrkreisdurchmessers ab.

Für die Punktbahnen ist $r_1 = 0$ und $r_2 = 0$, somit

$$\frac{3 \cdot 0B^2}{BA^2} \cdot {}^b d + \frac{3}{BA}\left[{}^{nb}d - \varrho_1 \frac{0A^2}{BA^2}\right] + {}^b d' \cdot \frac{0A + 30B}{BA}$$
$$- \frac{0A^4}{BA^4} \cdot \varrho_2 = - {}^b d''\,. \quad (48)$$

Für die unendlich fernen Punkte bezw. für die Hüllbahnelemente, die augenblicklich von den Geraden des bewegten Systems erzeugt werden, ist

$$0A = \infty\,, \quad BA = \infty\,, \quad \frac{0A}{BA} = 1, \quad \frac{0B}{BA} = 0\,.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung (48) ein, so erhält man

$$\varrho_2 = {}^b d' + {}^b d'' ,$$

das ist die Bedingungsgleichung für die Punkte des 3. Rückkehrkreises (siehe Fig. 36).

d) *Anwendung der höheren Savary'schen Gleichungen.*

Die in den Fig. 2 und 3 behandelte Aufgabe soll nun mit Hilfe der Savary'schen Gleichung gelöst werden. In Fig. 38 sind

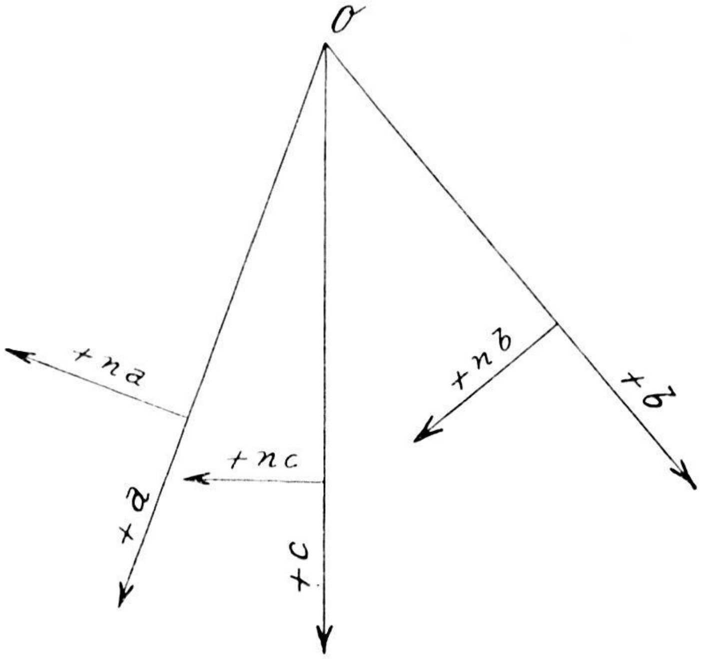

Fig. 38.

die als positiv angenommenen Richtungen von a, b, c und von na, nb, nc eingezeichnet. Laut Annahme (Fig. 2) ist

$$0A_1 = 56{,}5^{+a} \qquad 0A_2 = 90^{+a}$$
$$0B_1 = 48{,}5^{+b} \qquad 0B_2 = 144^{+b}$$
$$0C_1 = 65^{+c}$$
$$r_{1a} = A_1'A_1 = 12{,}5^{-na} \qquad \varrho_{1a} = A_2'A_2 = 48^{-na}$$
$$r_{1b} = B_1'B_1 = 24{,}5^{-nb} \qquad \varrho_{1b} = B_2'B_2 = 47{,}5^{+nb}$$
$$r_1^c = C_1'C_1 = 18^{-nc} .$$

Die Werte $0C_2$ und $\varrho_{1c} = C_2'C_2$ sind zu suchen.

Mit Hilfe der 1. Savary'schen Gleichung ergibt sich (Gleichung (37)):

$$\frac{1}{{}^a d} = \frac{1}{0A_1} - \frac{1}{0A_2} = \frac{1}{56 \cdot 5^{+a}} - \frac{1}{90^{+a}} \quad \text{und} \quad {}^a d = 152^{+a} .$$

Ebenso erhält man ${}^b d = 73^{+b}$.

Aus den Projektionen ${}^{a}d$ und ${}^{b}d$ kann man den Durchmesser d des 1. Rückkehrkreisdurchmessers graphisch leicht ermitteln. Denselben auf die Richtung c projiziert, ergibt

$${}^{c}d = 141^{+c} .$$

Dieser Wert in die Gleichung (37) eingesetzt ergibt den gesuchten Wert

$$0C_2 = 121^{+c} .$$

Zur Anwendung der zweiten Savary'schen Gleichung (Gleichung (40)) sind z. B. für den Normalstrahl a noch die Entfernung A_2A_1 und die Projektion ${}^{na}d$ des Rückkehrkreisdurchmessers d auf die Richtung na erforderlich. Laut Annahme bezw. laut der graphischen Ausmittlung des Rückkehrkreisdurchmessers ist

$$\begin{aligned} A_2A_1 &= 33{,}5^{-a} \qquad & {}^{na}d &= 6^{+na} \\ B_2B_1 &= 95{,}5^{-b} & {}^{nb}d &= 134^{+nb} \\ C_2C_1 &= 56^{-c} & {}^{nc}d &= 57{,}5^{+nc} . \end{aligned}$$

Die Gleichung (40) erhält für den Normalstrahl a die Form:

$$r_{1a}\frac{0A_2^{\,3}}{A_2A_1^{\,3}} - \varrho_{1a}\frac{0A_1^{\,3}}{A_2A_1^{\,3}} = -{}^{na}d\,\frac{0A_1 + 2\,0A_2}{A_2A_1} - {}^{na}d' .$$

Nach Einsetzen der numerischen Werte errechnet sich

$${}^{na}d' = 31{,}3^{+na} .$$

Ebenso erhält man für ${}^{nb}d' = 382{,}48^{+nb}$. .

Mit Hilfe einer graphischen Ausmittlung lässt sich aus den beiden Projektionen ${}^{na}d'$ und ${}^{nb}d'$ der Durchmesser des 2. Rückkehrkreises ermitteln. Denselben auf die Richtung nc projiziert ergibt ${}^{nc}d' = 174{,}5^{+nc}$. Setzt man diesen Wert in die Gleichung (40) ein, so errechnet sich der gesuchte Wert ϱ_{1a} zu $\varrho_{1a} = 26{,}2^{-nc}$.

Auch die Anwendung der 3. Savary'schen Gleichung (Gleichung (47)) bietet bei einer Erweiterung der Aufgabe auf die nächst höheren Krümmungsradien keine Schwierigkeiten.

Zürich, im November 1929.