

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 5 (1932)

Heft: I

Artikel: Anwendung der Optik trüber Medien auf die Beleuchtung der Atmosphäre. I., Die Beleuchtung der idealen Atmosphäre im Sonnenvertikal bei Sonnenuntergang und während der bürgerlichen Dämmerung

Autor: Gruner, P.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-110156>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Anwendung der Optik trüber Medien auf die Beleuchtung der Atmosphäre.

I. Die Beleuchtung der idealen Atmosphäre im Sonnenvertikal bei Sonnenuntergang und während der bürgerlichen Dämmerung

von **P. Gruner.**

(18. I. 32.)

Inhaltsangabe. Die im Jahre 1919 vom Verfasser gegebene Theorie der Beleuchtung der Atmosphäre unter blosser Berücksichtigung der primären Zerstreuung des Sonnenlichtes an den Luftmolekeln wird kurz dargelegt. Auf Grund derselben sind Berechnungen der Himmelselligkeit im Sonnenvertikal für die ideale Atmosphäre durchgeführt worden: von Ramanathan für den Sonnenuntergang, von Kleinert, auf zwei verschiedenen Wegen, für die Dauer der bürgerlichen Dämmerung. Diese Rechnungsergebnisse werden zusammengestellt und diskutiert. Es zeigt sich, dass alle 3 Methoden, wenn sie auf die jeweilige Zenitelligkeit bezogen werden, gut vergleichbare Resultate liefern, so dass der allgemeine Charakter der Himmelsbeleuchtung im Sonnenvertikal während der Dämmerung richtig dargestellt wird.

A. Einleitende Bemerkungen.

Das Problem, die Helligkeit des Himmels bei verschiedenem Sonnenstand theoretisch zu berechnen, ist mathematisch und physikalisch interessant, ganz abgesehen von der praktischen Bedeutung, die eine solche Theorie für die Erforschung höherer Atmosphärenschichten haben kann. Selbstverständlich ist nur eine idealisierte Atmosphäre der Rechnung zugänglich; Divergenzen zwischen Beobachtung und Theorie geben dann einen Anhaltspunkt für Störungen (Trübungen) der idealen Atmosphäre. Aber auch dieser idealisierte Fall einer durchaus reinen Atmosphäre ist nicht exakt lösbar, so dass es sich nur darum handeln kann, angenäherte Formeln zu finden.

In sehr umfassender und gründlicher Weise ist die Helligkeitsverteilung am Himmelsgewölbe von CHR. WIENER¹⁾ behandelt worden. Doch sieht WIENER von vorneherein von der auftretenden Farbenzerstreuung ab und gründet seine Berechnungen auf

¹⁾ CHR. WIENER, Abhandl. Leop. Carol. Deutsch. Akad. Naturf. **73**, 1, 1907; **91**, 81, 1909.

ungenau experimentelle Messungen, so dass seine Theorie nur eine bedingte Gültigkeit hat. Sehr eingehend ist das vorliegende Problem von L. V. KING¹⁾ in Angriff genommen worden; insbesondere wird darin nicht nur die primäre, sondern auch die mehrfache Zerstreuung des Sonnenlichtes an den atmosphärischen Gasmolekeln berücksichtigt. Dagegen werden anderweitige, nicht immer scharf hervorgehobene Annäherungen eingeführt, so dass es berechtigt erscheint, die ganze Theorie in etwas anderer Weise zu entwickeln. In solcher allgemeiner Weise hat der VERFASSEN²⁾ im Jahre 1919 die betreffenden Fragen in Angriff genommen, und auf dieser Grundlage hat H. KLEINERT³⁾ eine Reihe wichtiger Folgerungen gezogen und eingehende Berechnungen ausgeführt. Wir werden aus dieser, nicht im Druck erschienenen Arbeit einige Teile im folgenden veröffentlichen. B. FESSENKOFF⁴⁾ hat in eigenartiger Weise eine Reihenentwicklung für die Helligkeit des Himmels hergeleitet und durch Vergleich von photometrischen Messungen des Himmels im Sonnenvertikal in 20° Höhe über dem Horizont (bei Sonnendepressionen von 6,5—18,5°) die Konstanten seiner Formel empirisch bestimmt. Es gelingt ihm auf diese Weise, unter der Voraussetzung der Gültigkeit seiner Annahmen, die Dichte der Luftschichten in Höhen von 40—150 km zu berechnen. In optischer Beziehung liefert aber diese Berechnungsweise nichts Neues. Nur beiläufig erwähnen wir die Arbeiten von KOSCHMIEDER⁵⁾, LÖHLE⁶⁾ u. a., welche das Problem der Sicht behandeln und dabei immer wieder auf die Grundlagen unserer Theorie zurückgreifen. In prinzipiell gleicher Weise, aber mit einer Annäherung, die nur noch eine qualitative Beurteilung der Verhältnisse erlaubt, hat schon EXNER⁷⁾ das Problem der Himmelsfärbung bei Sonnenuntergang behandelt, und DORNO⁸⁾ hat auf Grund seiner einzigartigen und mustergültigen photometrischen Untersuchungen der Himmelshelligkeit eine summarische, theoretische Erklärung versucht.

¹⁾ L. V. KING, Phil. Trans. Roy. Soc. London, **212**, A, 375, 1913.

²⁾ P. GRUNER, Beiträge zur Physik d. freien Atmosphäre **8**, 120, 1919.

³⁾ H. KLEINERT, Beitrag zu der Theorie des Purpurlichtes, 1921. Diese Inauguraldissertation ist im Manuskript in der Stadtbibliothek Bern aufbewahrt; ein ganz kurzer Auszug ist im Jahrb. d. phil. Fakult. II der Universität Bern, Bd. I, Nr. 9, S. 72, 1921 abgedruckt.

⁴⁾ B. FESSENKOFF, Astronom. Nachrichten **220**, 33, 1923.

⁵⁾ H. KOSCHMIEDER, Beiträge z. Physik d. freien Atmosph. **12**, 33 und 171, 1926.

⁶⁾ F. LÖHLE, Zeitschr. f. Physik **57**, 770, 1929.

⁷⁾ F. M. EXNER, s. Pernter-Exner, Meteorolog. Optik, 1. Aufl., S. 792, 1910.

⁸⁾ C. DORNO, Himmelshelligkeit, Himmelspolarisation und Sonnenintensität in Davos. Veröffentl. d. Preuss. Meteorol. Instit., Abhandlg. VI, Nr. 303, 1919.

Neuerdings hat K. R. RAMANATHAN¹⁾ wiederum eine Berechnung der Himmelsbeleuchtung, allerdings nur für den Moment des Sonnenunterganges, ausgeführt. Seine Grundgedanken schliessen sich genau an die von mir entwickelten Formeln an, nur ist die Art und Weise der numerischen Berechnung in gewissen Punkten von der Kleinert'schen verschieden. RAMANATHAN vergleicht dann seine Resultate mit den unsrigen und mit denen von DORNO; wir werden auf diesen Vergleich eingehend zu sprechen kommen.

In eigenartiger, wohl nicht ganz einwandfreier Weise hat auch G. J. POKROWSKI²⁾ einen Ausdruck für die Himmelselligkeit berechnet.

B. Die allgemeinen Gesetze der Himmelsbeleuchtung im Sonnenvertikal.

Wir verweisen hiefür auf unsere in ²⁾, S. 32 zitierte Arbeit, glauben aber, dass es zweckmässig ist, den Gedankengang derselben hier zu wiederholen (s. Figur auf S. 34).

Ein Beobachter B befinde sich in einer Höhe H_0 über der als Kugel mit dem Radius R_0 gedachten Erdoberfläche. Wir beziehen alle weiteren Bezeichnungen auf eine durch den Beobachter konzentrisch gelegte Kugelfläche mit dem Radius $R = R_0 + H_0$, die wir die „Grundfläche“ nennen wollen; im übrigen beschränken wir uns auf Erscheinungen im *Sonnenvertikal*. Die oberste Grenze der optisch wirksamen Atmosphäre habe die Höhe H über der Grundfläche. Die Atmosphäre ist von parallel einfallenden Sonnenstrahlen beleuchtet; die Zenitdistanz der Sonne für den Beobachter B sei $Z = 90^\circ + \delta$; von atmosphärischer Refraktion kann abgesehen werden, da sie nachträglich immer in genügend genauer Weise berücksichtigt werden kann. Der Beobachter blicke unter einer Zenitdistanz $\zeta = 90^\circ - \varepsilon$ nach dem Himmel (ζ positiv, wenn die Blickrichtung nach der Sonnen-
seite geht; ζ negativ, nach der Gegenseite), so dass Blickrichtung und Sonnenstrahlen den Winkel $\varphi = Z - \zeta = \delta + \varepsilon$ bilden. Die „Helligkeit“ J des Himmels in dieser Blickrichtung ist erzeugt durch die Gesamtheit des Sonnenlichtes, das innerhalb eines schmalen, von B ausgehenden Strahlenkegels (Öffnungswinkel $d\omega$; in der Figur nicht gezeichnet) in denselben hineinzerstreut wird.

¹⁾ K. R. RAMANATHAN, Sky-Illumination at Sunrise and Sunset. Memoirs of the Indian Meteorological Department **25**, Part 1, 1927. — Diese Arbeit ist mir bisher entgangen; erst vor einigen Wochen wurde sie mir zugänglich und gab den Anlass zu der hier veröffentlichten Arbeit.

²⁾ G. J. POKROWSKI, Physikal. Zeitschr. **30**, 697, 1929.

von Natur, Form und Orientierung des Körperchens abhängig und ist eine Funktion der Wellenlänge λ des einfallenden Lichtes, seines Polarisationszustandes und des Zerstreuungswinkels φ . Es bedeutet $n \cdot I \cdot \Delta V$ der Bruchteil ΔJ der nach ΔV gelangenden Sonnenstrahlenintensität, der von P aus in den Strahlenkegel des Beobachters B hineinzerstreut wird; allerdings unter der Voraussetzung, die im folgenden stets beibehalten wird, dass nur die primäre Lichtzerstreuung berücksichtigt werde.

Infolge der lichtzerstreuenden Wirkung, eventuell auch infolge direkter Absorption, üben diese Körperchen eine auslöschende Wirkung auf das sich ausbreitende Licht aus. Sehen wir von einer eigentlichen Absorption (durch Energieverlust) ab, so ergibt sich für diese *Extinktion* auf einer Strecke von der Länge x die Intensitätsabnahme aus

$$J_x = J_0 \cdot e^{-\int_0^x \kappa(\xi) d\xi}$$

worin in leicht verständlicher Bezeichnung

$$\kappa = n \cdot k = n \int \int I \cdot dw = n \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi I \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi$$

den sog. *Auslöschungs-* oder *Extinktionskoeffizienten* angibt; κ ist pro Längeneinheit anzugeben, k ist der Auslöschungskoeffizient pro einzelnes Teilchen. Diese Auslöschung findet sowohl auf der Strecke SP , die wir in zwei Teile $s + w$ ($SM + MP$) zerlegen, wie auch auf der Strecke PB , der Blicklänge l , statt.

Ist I die Intensität der ungeschwächten, unpolarisierten Sonnenstrahlung (für die Wellenlänge λ), die in S in die Atmosphäre eintritt, so ist einerseits die Auslöschung auf der Strecke $s + w + l$ zu berücksichtigen, andererseits nimmt die Intensität auf der Strecke l proportional $1/l^2$ ab. Das Volumen $\Delta V = l^2 \cdot d\omega \cdot \Delta l$ sendet also, innerhalb des Strahlenkegels mit Öffnungswinkel $d\omega$, zum Beobachter eine Lichtintensität

$$\Delta J = I \cdot n \cdot I \cdot d\omega \cdot e^{-\int_0^{s+w+l} \kappa(\xi) d\xi} \cdot \Delta l.$$

Die Helligkeit des Himmels in der Richtung dieses Strahlenkegels ergibt sich durch Summation dieses Ausdrucks über alle beleuchteten Volumelemente desselben. Das die Atmosphäre beleuchtende Parallelstrahlenbündel kann die Erdoberfläche direkt tangieren, meist wird es aber nach unten durch Wolken oder

Berge in einer Höhe H_u über der Grundfläche abgegrenzt, so dass die Integration über l nur von $L_u = BQ$ bis $L = BT$ zu nehmen ist.

Für die *gesamte Intensität $J \cdot d\omega$ der Himmelsbeleuchtung* innerhalb des Sehstrahlenkegels $d\omega$ folgt dann:

$$J = I \int_{l=L_u}^{l=L} n \cdot \Gamma \cdot e^{-\int_0^{s+w+l} \kappa(\xi) d\xi} \cdot dl,$$

wobei zwischen $\kappa = nk$ und Γ die S. 35 eingeführten Beziehungen gelten, und wobei *die mehrfache Lichtzerstreuung nicht berücksichtigt ist.*

Zur Auswertung dieses Integrals sind noch folgende *geometrische Beziehungen* einzuführen, die aus der Figur ersichtlich sind:

Es sei $NM = p$ = kürzester Abstand des nach P gerichteten Sonnenstrahls von der Grundfläche.

Wir bezeichnen ferner:

$$BC = \sigma = R \cdot \sin \delta = -R \cdot \cos Z$$

$$CN = \varrho = R(1 - \sin Z)$$

$$PD = \tau = + \sqrt{2Rh + h^2 + R^2 \cos^2 \zeta} = + \sqrt{(R+h)^2 - R^2 \sin^2 \zeta}.$$

Dann wird:

$$p = l \cdot \sin \varphi - \varrho$$

$$w = \sigma - l \cdot \cos \varphi$$

$$s = + \sqrt{(R+H)^2 - (R+p)^2}$$

$$l = \tau - R \cdot \cos \zeta.$$

C. Die Beleuchtung der idealen Atmosphäre.

Für die reine, ungestörte Atmosphäre, in der die Lichtzerstreuung nur an den Molekeln der atmosphärischen Gase (bzw. an ihren Dichteschwankungen) erfolgt, dürfen wir annehmen, dass alle Molekeln als winzige isotrope¹⁾ Körperchen gleicher Art wirken. Dann ist Γ nur noch eine Funktion von λ , von φ und vom Polarisationszustand, k ist nur eine von λ abhängige Konstante, und zwischen Γ und k besteht eine einfache Beziehung.

¹⁾ Die Anisotropie der Molekel kann nach den Formeln von Cabannes, La diffusion moléculaire de la lumière, Paris 1929, stets in Betracht gezogen werden.

Wird das RAYLEIGH'sche Gesetz für isotrope Körperchen, deren Dimension gegenüber λ klein ist, angewendet, so gilt für das gesamte zerstreute Licht:

$$I = \frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \varphi) k.$$

Dabei ist

$$\kappa = n \cdot k = \frac{8\pi^3 (\nu^2 - 1)^2}{3\lambda^4 n},$$

wenn ν der Brechungsexponent der atmosphärischen Luft ist (vgl. die Tabelle I am Schluss, S. 51).

Um den Ausdruck der Intensität J berechnen zu können, müssen bestimmte Anhaltspunkte über die *Verteilung der Molekühlzahl n in der Atmosphäre*, eventuell auch über k , bzw. κ , gefunden werden.

Die ruhende, reine Atmosphäre darf man sich aus homogenen konzentrischen Kugelschichten angeordnet denken. Es ist dann n nur noch eine Funktion von h . Bekanntlich bestehen verschiedene Auffassungen über das Verhalten der höheren Atmosphärenschichten. Sowohl KLEINERT in seiner ersten Berechnung (s. ²), S. 32), wie auch RAMANATHAN (s. ¹), S. 33) haben hier dieselben Zahlenangaben verwendet, wie sie von HUMPHREYS gegeben worden sind.

Wir geben hier nochmals diese Tabelle, wie sie von KLEINERT benützt wurde; sie weist ganz geringe Differenzen gegenüber den Zahlen RAMANATHAN's auf.

Höhe in km	0	2	5	10	15	20	30	40
T . . .	273°	273°	255°	225°	218°	218°	218°	218°
$n \cdot 10^{-19}$	2,78	2,18	1,58	0,88	0,413	0,188	0,039	0,0083
Höhe in km	50	60	70	80	90	100		
T . . .	218°	218°	218°	218°	218°	218°	218°	
$n \cdot 10^{-19}$	0,0018	0,00043	0,00010	0,000055	0,000037	0,000031		

Die weitere Berechnung erfolgt nun bei jedem der erwähnten Forscher in anderer Weise und unter Verwendung anderer Zahlen für die Auslöschungskoeffizienten κ .

1. Die erste Berechnung von H. Kleinert (Kleinert I).

Da die Integration des Ausdruckes für J (s. S. 36) nicht direkt ausführbar ist, wurde versucht, die Atmosphäre durch vier übereinanderliegende, homogene, im Querschnitt trapezförmige Schichten zu ersetzen. Die unterste g -Schicht, bis zur Höhe $H_g = 4$ km, sollte die durch Staub und Rauch getrübtete Atmosphärenpartie umfassen und wurde als *graue* Schicht bezeichnet. Die folgende r -Schicht, bis zur Höhe $H_r = 12$ km über der Erdoberfläche, sollte die darüberliegende Partie der Troposphäre umfassen; da sie wohl hauptsächlich zur Rötung der Dämmerungsfarben in der reinen Atmosphäre beiträgt, wurde sie die *rote* Schicht genannt. Eine darüberliegende b -Schicht, die *blaue* Schicht genannt, wurde bis zu einer Höhe $H_b = 24$ km angesetzt, und als letzte, noch optisch wirksame Schicht, wurde die *weisse* w -Schicht bis zu einer Höhe $H_w = 84$ km angenommen. Auf rein graphischem Weg wurde dann der mittlere Wert der Molekelzahlen, der jeder dieser homogenen Schichten zukommen soll (unter Weglassung der untersten, grauen Schicht, die ja nicht zur „reinen“ Atmosphäre gerechnet werden darf), berechnet. Es ergab sich:

$$n_r = 1,17 \cdot 10^{19}; \quad n_b = 0,289 \cdot 10^{19}; \quad n_w = 0,0114 \cdot 10^{19}.$$

Es wäre nun möglich gewesen, die mittleren Werte der Auslöschungskoeffizienten α vermittelt dieser Zahlen aus der Rayleigh'schen Formel zu berechnen. Wir zogen es vor, hierfür empirische Formeln beizuziehen, nämlich die *Transmissionskoeffizienten* $C(x)$, wie sie für Mt. Whitney (4420 m Höhe) und Mt. Wilson (1780 m) und für Potsdam (100 m) bestimmt wurden und von L. V. KING¹⁾ zusammengestellt sind.

Unter der Annahme, dass der Beobachter B in 4 km Höhe über der Erdoberfläche sich befinde, so dass die graue Schicht unter ihm liegt, konnten die Zahlenwerte von Mt. Whitney direkt verwendet werden. Würde man die Sonne direkt im Zenit beobachten, so ergäbe der Vergleich unserer Theorie mit der King'schen Formel:

$$J = I \cdot e^{-\alpha_r (H_r - H_g) - \alpha_b (H_b - H_w) - \alpha_w (H_w - H_b)} = I \cdot e^{-C(x)}.$$

Setzen wir $\alpha_r = n_r \cdot k$, $\alpha_b = n_b \cdot k$, $\alpha_w = n_w \cdot k$, so ergibt die Gleichsetzung der Exponenten:

$$k = \frac{C(x)}{13,5} \cdot 10^{-19} \text{ (in km}^{-1}\text{)}.$$

¹⁾ L. V. KING, Phil. Trans. Roy. Soc. London, **212**, A. 375, 1913.

Unter Beiziehung der Werte von $C(x)$ für Potsdam wurde dann auch ein Wert für κ_g berechnet, der aber für das weitere keine Rolle spielt.

Die Tabelle I der verschiedenen Werte von k , bzw. κ , folgt später (s. S. 51).

Noch waren passende Annahmen über die Dimensionen der einzelnen Trapeze der 4 Schichten zu treffen, so dass sie sich den sie wirklich begrenzenden Kreisbogen möglichst anschmiegen. Wir verweisen für diese Zahlen auf ²⁾, S. 32.

Vermittelt dieser Annahmen lässt sich dann der Ausdruck der Intensität durch eine Summation über die 4 Schichten darstellen:

$$J = I \cdot \frac{3}{16 \pi} (1 + \cos^2 \varphi) \sum \left\{ \kappa \cdot e^{-A} \int_{L_u}^L e^{+B \cdot l} \cdot dl \right\}$$

worin L_u und L die Blicklängen nach der untern und obern Grenze der betreffenden Schicht und A und B Konstante sind, die sich für jede Schicht in Abhängigkeit von Z und ζ berechnen lassen.

Das Integral ist ohne weiteres berechenbar, so dass die Werte von J berechnet werden konnten.

In genügender Annäherung wurde die Entfernung der Grundfläche zum Erdzentrum $R = 6400$ km gesetzt, die graue Schicht wurde vernachlässigt. Die Rechnungen wurden für „Rot“ und „Grün“ durchgeführt, mit stark abgerundeten Werten für die κ (in km^{-1}):

Grün (λ etwa $0,55 \mu$): $\kappa_r = 0,0075$; $\kappa_b = 0,002$; $\kappa_w = 0,000075$

Rot (λ etwa $0,64 \mu$): $\kappa_r = 0,005$; $\kappa_b = 0,001$; $\kappa_w = 0,00005$.

Da das Ziel der Kleinert'schen Berechnungen die Theorie der *Dämmerungsfarben* war, sind die Intensitäten *nur für Zenitdistanzen der Sonne von 90° , 92° , 93° , 94° und 96° berechnet*. Wir geben sie in Tabelle II, S. 52, nur sind die Zahlen noch mit dem Faktor $\frac{3}{16 \pi} = 0,06$ multipliziert, so dass sie sich auf die Sonnenstrahlenintensität $I = 1$ beziehen.

2. Die zweite Berechnung von H. Kleinert (Kleinert II).

Die eben geschilderte Behandlungsweise beruhte auf den ganz bestimmten Annahmen über die Verteilung der Molekelzahlen n in der Atmosphäre, wie sie in der Tabelle S. 37 gegeben ist. Es ist aber bekannt, dass diese Zahlen zur Zeit nicht mehr als sehr

glaubwürdig anzusehen sind. Es musste deshalb ein anderer Weg gesucht werden.

In seiner Dissertation (s. ³⁾, S. 32) berichtet KLEINERT folgendermassen über diesen neuen Versuch (S. 17 des Manuskriptes):

Eine zweckmässigere Methode ergibt sich durch Verwendung der BEMPORAD'schen¹⁾ Extinktionstheorie und der empirischen Werte der Transmissionskoeffizienten. Nach derselben ist die Intensität des direkt unter einer Zenitdistanz ζ anvisierten Sonnenlichtes

$$J = I \cdot A^{F(\zeta)},$$

wobei A der Transmissionskoeffizient, der eine Funktion der Wellenlänge λ ist, und $F(\zeta)$ die theoretisch berechnete Luftschichtdicke ist. Nach unserer Theorie lautet der entsprechende Ausdruck:

$$J = I \cdot e^{-\Sigma(\kappa \cdot l)}.$$

Hier ist $\Sigma(\kappa \cdot l)$ über die verschiedenen Blicklängen innerhalb der einzelnen Schichten der Atmosphäre zu nehmen. Der Vergleich beider Ausdrücke ergibt:

$$\Sigma(\kappa \cdot l) = -F(\zeta) \cdot \log \text{nat } A = F(\zeta) \cdot T(\lambda),$$

wo $T(\lambda) = -\log \text{nat } A$ eine Funktion der Wellenlänge ist, die aus den empirisch bestimmten Transmissionskoeffizienten zu ermitteln, und $F(\zeta)$ den Bemporad'schen Tabellen zu entnehmen ist. Indem man diese Gleichung bei gegebenem λ für eine ganze Reihe verschiedener ζ aufstellt, wobei die l aus $l = \tau - R \cos \zeta$ zu berechnen sind, kann man nach der Methode der kleinsten Quadrate die zugehörigen κ als Unbekannte berechnen. Es wird aber genügen, so viele Gleichungen aufzustellen, als Werte von κ vorkommen, wenn man sie nur für recht weit auseinanderliegende ζ aufstellt.

Die Rechnung soll für einen an der obren Grenze der „grauen“ Schicht befindlichen Beobachter durchgeführt werden. Gegenüber den früheren Annahmen werden, aus rein praktischen Gründen, einige Änderungen eingeführt, die sowohl prinzipiell, wie numerisch keine merklichen Differenzen gegenüber den früheren Rechnungen zur Folge haben. Die wirklichen Differenzen rühren von der veränderten Berechnungsweise der κ ab.

Wir nehmen also an, dass die graue Schicht sich nur bis auf 2 km Höhe über das Meeresniveau erstreckt, entsprechend

¹⁾ A. BEMPORAD, Mitteilungen der Grossherzogl. Sternwarte zu Heidelberg 1904.

ungefähr der Staub- und Dunstschicht im Winter. Ferner wird die Höhe der roten Schicht auf 12 km, die der blauen auf 24 km und die der weissen auf 84 km über Meeresniveau und $R = 6378$ km angesetzt.

Zur Berechnung der κ verwende man etwa die drei Werte: $\zeta = 0^\circ$, 75° und 85° ; es ergibt sich daraus:

$$\kappa_r = 0,094683 \cdot T(\lambda); \kappa_b = 0,0039223 \cdot T(\lambda); \kappa_w = 0,00010172 T(\lambda)$$

und es bestätigt sich, dass diese Werte auch den entsprechenden Gleichungen mit $\zeta = 60^\circ$ und $\zeta = 80^\circ$ genügen.

Die Werte für $T(\lambda)$ sind identisch mit den KING'schen Werten für $C(x)$; nur sind jetzt nicht diejenigen für Mt. Whitney (4420 m) sondern passender die für Mt. Wilson (1780 m) zu verwenden. Wir entnehmen diese Zahlen in angenäherter Weise:

für Grün ($\lambda = 0,52$): $T = 0,150$,

für Rot ($\lambda = 0,65$): $T = 0,090$.

Dies gibt, abgerundet, die gewünschten κ in km^{-1} :

Grün: $\kappa_r = 0,0142$; $\kappa_b = 0,00059$; $\kappa_w = 0,000015$

Rot: $\kappa_r = 0,00852$; $\kappa_b = 0,00035$; $\kappa_w = 0,000009$

Diese Werte sind für die rote Schicht wesentlich grösser, für die blaue und weisse Schicht wesentlich kleiner als in der ersten Berechnung.

Die Dimensionen der trapezförmigen Schichten sind um wenig verändert. Die Berechnung der *Himmelshelligkeit* wurde auch hier nur im Sonnenvertikal für die *Zenitdistanzen der Sonne*, $Z = 91^\circ, 92^\circ, 93^\circ, 94^\circ, 95^\circ$ und 96° durchgeführt (bedauerlicherweise fehlt die Rechnung für $Z = 90^\circ$, für den Sonnenuntergang selber; sie spielt eben für die Dämmerungsfarben keine grosse Rolle).

Auch diese Resultate, mit dem Faktor $\frac{3}{16\pi} = 0,06$ multipliziert, sind, für $I = 1$, in Tabelle III, S. 53, gegeben.

Die merklichen Unterschiede der Resultate dieser 2 Berechnungsmethoden werden später diskutiert.

3. Die Berechnung von K. R. Ramanathan.

RAMANATHAN geht von derselben Formel für J aus wie unsere Rechnungen; ebenso verwendet er im wesentlichen dieselben Zahlen für n in Funktion von h . Dagegen schlägt er einen

andern Weg ein zur Ermittlung von Γ und k . Für Γ verwendet er die Rayleigh'sche Formel

$$n \Gamma = \frac{\pi^2 (\nu^2 - 1)^2}{2 n \lambda^4} (1 + \cos^2 \varphi) ,$$

aber eigentümlicherweise berechnet er nun k nicht aus dem zugehörigen Ausdruck

$$n k = \frac{8 \pi^3 (\nu^2 - 1)^2}{3 \lambda^4 n} ,$$

sondern er rechnet die von King angegebenen Werte der Transmissionskoeffizienten sowohl für Mt. Whitney, wie auch für Mt. Wilson, auf Normaldruck und auf $n = 1$ um. Die Zahlwerte sind (je für dieselbe Wellenlänge) nahezu gleich, so dass ihr Mittelwert als Wert von k (in Abhängigkeit von λ) angenommen werden darf (s. Tabelle I, S. 51, am Schlusse).

Um die Ausrechnung des Integrals von J mit diesen Zahlwerten *graphisch* auszuführen, werden noch einige Vereinfachungen und Annäherungen eingeführt.

Zunächst wird *nur der spezielle Fall des Momentes des Sonnenunterganges* (bzw. Sonnenaufganges), $Z = 90^\circ$, in Betracht gezogen.

Ferner führt RAMANATHAN für die Strecke $MP = w$ (s. Figur) eine nur innerhalb gewisser Grenzen zulässige Annäherung ein, indem er

$$w = \sqrt{(R + h)^2 - (R + p)^2} = \sqrt{2 R (h - p) + h^2 - p^2}$$

ersetzt durch

$$w = \sqrt{2 R (h - p)} .$$

Im Integral führt er als Integrationsvariable statt l die Grösse h ein. Indem er dazu die Summation über unendlich dünne Kugelschalen von der Dicke dh ausführt, ist l und w nach h zu differenzieren, bei konstantem ζ und p .

Aus

$$l = \tau - R \cos \zeta , \quad \tau = \sqrt{(R + h)^2 - R^2 \sin^2 \zeta}$$

folgt:

$$\frac{dl}{dh} = \frac{R + h}{\tau} .$$

Aus dem angenäherten Ausdruck für w folgt:

$$\frac{dw}{dh} = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{2 (h - p)}} .$$

Vermittelst dieser Beziehungen kann RAMANATHAN durch *graphische* Integration zunächst die Exponenten

$$\int_0^{s+w+l} \kappa(\xi) d\xi = k \int_0^{s+w+l} n(\xi) d\xi$$

berechnen und sodann, ebenfalls auf graphischem Weg die Intensität J .

Wir geben die Resultate seiner Berechnungen für den Sonnenvertikal, für $I = 1$, in Tabelle IV, S. 54 (er gibt auch noch die Werte im Meridian, der senkrecht zum Sonnenvertikal steht; wir gehen hier auf dieselben nicht weiter ein).

In einer interessanten Diskussion vergleicht RAMANATHAN seine Resultate mit den unsrigen, d. h. mit den von H. KLEINERT nach seiner *ersten* Methode berechneten (die zweite Berechnungsmethode H. KLEINERT's konnte Hrn. RAMANATHAN selbstverständlich nicht bekannt sein); ferner vergleicht er sie mit den schönen photometrischen Messungen DORNO's in Davos, die jedenfalls das beste und umfangreichste Material für die Verteilung der Helligkeit am Himmel liefern.

Zu dieser Diskussion RAMANATHAN's sind folgende Bemerkungen zu machen.

Um den Vergleich seiner Zahlen mit den unsrigen und denen DORNO's durchzuführen, rechnet er alle 3 Zahlenreihen in andere Einheiten um, ohne diese Umrechnung so zu begründen, dass sie vollständig verständlich wäre; so war es uns unmöglich zu finden, wie er zum Umrechnungsfaktor für die Kleinert'schen Zahlen gekommen ist.

Aus diesen in der angegebenen Weise gefundenen und in seiner Tabelle 10 (S. 10 seiner Arbeit) zusammengestellten Zahlen zieht er nun folgende Schlüsse, die uns nicht ganz einwandfrei scheinen, und auf die wir deshalb schon hier, vor der allgemeinen Diskussion des nächsten Abschnittes, eintreten.

Dass die Zahlen Kleinert's in den umgerechneten Einheiten durchwegs grösser sind als diejenigen Ramanathan's, ist an und für sich belanglos. Was aber den Vergleich mit den Zahlen Dorno's anbelangt, so muss vor voreiligen Schlüssen gewarnt werden. Sofern wir nur die Zahlen für den Sonnenvertikal betrachten (und nur diese sind auch bei Kleinert berechnet), so stehen nur 7 Vergleichszahlen von Dorno zur Verfügung; 4 davon liegen entschieden näher bei den Werten von Ramanathan, 2 davon dagegen deutlich näher bei denen Kleinert's, die 7. lässt sich beiden Theorien anschmiegen; die weiteren 3 Angaben im Meridian senk-

recht zum Sonnenvertikal zeigen bei Dorno und Ramanathan einen ähnlichen Verlauf, aber weichen doch merklich von einander ab. Es ist also zum mindesten verfrüht, aus *dieser* Zahlenvergleichung einen sichern Schluss auf die Berechtigung der einen oder anderen Berechnungsmethode zu ziehen. Dies um so mehr, als Ramanathan mit Recht bemerkt, dass die Jahreszeitenmittelwerte Dorno's verschieden ausfallen, namentlich aber, dass eben die *mehrfache* Zerstreuung des Lichtes eine merkliche Modifikation der berechneten Werte geben muss. Zudem ist ohne weiteres klar, dass auch die Dorno'schen Messungen, trotz der äusserst günstigen Bedingungen, unter denen sie ausgeführt wurden, doch kaum als unbedingt massgebend für die Helligkeit des Himmels in einer *ideal reinen* Atmosphäre angesprochen werden können.

Durchaus unverständlich ist aber die Bemerkung Ramanathan's wonach unsere Berechnungen „die Zerstreuungsfunktionen von Mt. Whitney benützt hätten, unter der Voraussetzung, dass die Auslöschung nur durch die Lichtzerstreuung bedingt sei, während Ramanathan die Zerstreuungsfunktionen nach Rayleigh's Gesetz berechnet habe“. Demgegenüber ist festzustellen, dass sowohl in unserer wie in Ramanathan's Theorie nur die Lichtzerstreuung an den Gasmolekeln berücksichtigt wird; ferner, dass sowohl Ramanathan wie auch wir die Auslöschungskoeffizienten aus den bei King angegebenen Transmissionskoeffizienten berechnen (also nicht aus dem Rayleigh'schen Gesetz!), nur allerdings nach verschiedenen Gesichtspunkten.

Sind aber diese Auslöschungskoeffizienten k einmal bestimmt, so verlangt die Rayleigh'sche Theorie, dass die Zerstreuungsfunktionen Γ aus der Beziehung

$$\Gamma = \frac{3}{16 \pi} (1 + \cos^2 \varphi) \cdot k$$

berechnet werden, wie das von Kleinert gemacht wurde. Ramanathan aber beachtet diese Beziehung nicht, sondern berechnet die Γ , unabhängig von dem von ihm gewählten Wert von k , direkt aus der Rayleigh'schen Beziehung $\pi^2(\nu^2 - 1)^2/2 n \lambda^4$.

Aus Tabelle I (S. 51) ist ersichtlich, dass die Werte von k von Ramanathan merklich von denen der Rayleigh'schen Theorie abweichen, während sie sich von denen Kleinert's nicht stark unterscheiden.

Was die weiteren Ausführungen der Rechnungen anbetrifft, so unterscheiden sich die 2 Methoden dadurch, dass Ramanathan

die wirkliche Schichtung der Atmosphäre (auf Grund seiner Annahmen) benützt, aber sich mit der rohen Annäherung graphischer Integration begnügt, während Kleinert vereinfachende Annäherungen über diese Schichtungen einführt, dann aber die Integrationen richtig durchrechnet. Demgemäss sind die Rechnungen Ramanathans nur für den Spezialfall $Z = 90^\circ$ ausführbar, während die Kleinert'sche Methode allgemein brauchbar ist. Im Blick auf die Probleme des Purpurlichtes hat freilich Kleinert seine Rechnungen nur für $Z = 90 - 96^\circ$ ausgeführt.

D. Diskussion der Theorien und ihrer Resultate.

Die Diskussion findet an Hand der am Schluss dieser Arbeit (S. 51—58) gegebenen Tabellen statt. Ausser den bereits erwähnten Tabellen I—IV, die einerseits die verschiedenen Werte der Auslöschungs-, Zerstreuungs- und Transmissionskoeffizienten, andererseits die berechneten Resultate von Kleinert (I und II) und von Ramanathan (auf dieselben Einheiten umgerechnet) enthalten, sind noch folgende Zusammenstellungen gegeben worden:

Tabelle V gibt den Vergleich der verschiedenen Theorien untereinander für $Z = 90^\circ$ (den Moment des Sonnenunterganges); auf die absoluten Zahlwerte kommt es dabei in erster Linie nicht an, deshalb sind alle Zahlen auf die jeweilige *Zenithelligkeit* = 1 bezogen. Zum Vergleich sind die Beobachtungsergebnisse von DORNO, die sich allerdings nicht auf eine bestimmte Farbe, sondern auf die Gesamthelligkeit des Himmels an der anvisierten Stelle beziehen (s. DORNO⁸), S. 32, Tabelle 3a und 24a), beigelegt. Ebenfalls zum rohen Vergleich ist die von Dorno benützte Formel, die als ganz grobe Annäherung angesehen werden kann, verwendet:

$$J \sim S(1 + \cos^2 \varphi),$$

worin S die nach Bemporad berechnete „Schichtdicke“ der „homogenen“ Atmosphäre in der Blickrichtung bedeutet; hierin ist die Wirkung der Extinktion vollständig vernachlässigt.

Tabelle VI a und b gibt die entsprechende Zusammenstellung für tiefere Sonnendepressionen, $Z = 90 - 96^\circ$, um den Vergleich der beiden Kleinert'schen Methoden zu ermöglichen. Die Beobachtungen für „Rot“ und für „Grün“ sind jeweils zusammengestellt; dabei ist zu beachten, dass, genau genommen, die verwendeten Wellenlängen für Rot und Grün in beiden Methoden nicht genau gleich sind.

Tabelle VII gibt den Vergleich der Zenithelligkeiten selber bei den verschiedenen Sonnendepressionen, für Rot und für Grün. Zum Vergleich sind wiederum die Dorno'schen Werte (s. DORNO⁸), S. 32, S. 228) beigelegt.

In diesen Tabellen V—VI mussten einige Zahlen auf graphischem Wege interpoliert werden; dieselben sind kleiner gedruckt als die direkt aus der Theorie berechneten. In den Dorno'schen Angaben sind die in () gefassten Zahlen unsicher; in Tabelle VI beziehen sich die Helligkeitsangaben von Dorno auf $\zeta = +3^\circ$, so dass die Zenithelligkeit zu 1,02 gesetzt ist. Für die Beurteilung des Verlaufes der Helligkeiten ist dies belanglos.

Im weiteren ist es sehr wichtig zu beachten, dass auch die Tabellen II—IV noch nicht direkt die visuelle Helligkeit des Himmels, verglichen mit der visuellen Helligkeit der Sonne, ergeben. Denn: erstens ist die Einheit I der Sonnenstrahlung selber eine Funktion der Wellenlänge, also für Rot und für Grün verschieden; zweitens gibt J die objektive Intensität der betreffenden Farbe, die noch auf die subjektive Helligkeitsempfindung umzurechnen ist.

Überblicken wir nun unsere Tabellen und sehen ab von den nicht weiter erklärbaren Unterschieden der Absolutwerte der 3 Theorien (Kleinert I, Kleinert II und Ramanathan), so lässt sich allgemein feststellen:

Alle 3 Theorien geben in grossen Zügen qualitativ einen ähnlichen Verlauf für die Himmelshelligkeit im Sonnenvertikal, und zwar sowohl bei Sonnenuntergang als auch bei tieferen Sonnendepressionen, während der sog. bürgerlichen Dämmerung. Dieser Verlauf stimmt auch, seinem allgemeinen Charakter nach, mit den DORNO'schen Beobachtungen des relativ reinen Davoser Himmels.

Diese allgemeinen Charakterzüge des Helligkeitsverlaufes sind folgende:

1. Der *Zenit* weist stets, in allen Farben, die dunkelste Partie des Himmels auf¹⁾; das Vorhandensein des „*dunklen Zenitwerts*“ folgt also direkt aus der Theorie.

2. Fast ausnahmslos sind bei gleichem Sonnenstand (gleichem Z) die Himmelshelligkeiten für positive ζ grösser als diejenigen für gleich grosse negative ζ .

Die „*Sonnenseite*“ des Himmels hat im Rot und im Grün eine merklich hellere Beleuchtung als die „*Gegenseite*“. Wiederum ist nur bei Kleinert II unerklärlicherweise bei $Z = 91^\circ$ die In-

¹⁾ Nur bei Kleinert II ist im Rot bei $Z = 96^\circ$ die Helligkeit für $\zeta = -30^\circ$ noch um 5—6% geringer als im Zenit.

tensität auf der Gegenseite grösser; bei der viel stärkeren Extinktion, die die Sonnenstrahlen erfahren, wenn sie bis zur Gegenseite gelangen, ist dies nicht gut verständlich. Dass bei der approximativen Formel $J = S(1 + \cos^2 \varphi)$, die auf die Extinktion gar keine Rücksicht nimmt, die Intensitäten für positive und negative ζ gleich werden, ist selbstverständlich.

3. Auf der Gegenseite tritt aber noch etwas anderes ein: Geht der Blick vom Zenit zum Horizont der Gegenseite hinunter ($\zeta = 0^\circ$ bis $\zeta = -85^\circ$), so findet nicht ein ständiges Wachsen der Himmelselligkeit statt, sondern diese erreicht bei Annäherung an den Horizont ein Maximum, nach welchem sie nun ziemlich rasch abfallen kann. Dieser Abfall beginnt in umso grösserer Höhe über dem Horizont, je tiefer die Sonne unter ihn gesunken ist; auch erfolgt er im Grün merklich stärker und im allgemeinen auch etwas früher als im Rot. Nach Ramanathan zeigt sich dieser Abfall schon bei Sonnenuntergang ($Z = 90^\circ$) im Blau und sogar ganz schwach im Grün, während Kleinert I keinen solchen findet¹⁾.

Dieses Verhalten an der Gegenseite bedeutet ein starkes Verblassen des Himmels am Horizont und erklärt die bekannte Tatsache, dass der Erdschatten (d. h. eben die nicht mehr genügend stark beleuchtete Partie des Himmels) *viel rascher emporsteigt, als es dem Sinken der Sonne entsprechen würde*. Dabei ist immer zu bedenken, dass es sich hier um eine ideal-reine, völlig dunstfreie, trockene Atmosphäre handelt.

4. Vergleicht man die Helligkeiten relativ zur Zenithelligkeit (Tab. V und VI) im Rot und im Grün, sowohl bei Sonnenuntergang, wie auch bei Sonnendepressionen bis zu 5° (also $Z = 90-95^\circ$), so zeigt sich, dass mit zunehmendem ζ (positiv und negativ), also *in der Richtung vom Zenit bis zum Horizont, die Rot-Intensität stärker zunimmt als die Grün-Intensität* (nach Ramanathan ist dementsprechend, bei Sonnenuntergang, die Zunahme der Blau-Intensität mit wachsendem ζ noch geringer). Dagegen scheint bei $Z = 96^\circ$ eine Verschiebung dieses Verhältnisses aufzutreten: die Grün-Intensität hat relativ zur Rot-Intensität wieder ein wenig zugenommen.

Somit sind gegen den Horizont zu die langwelligen Lichtstrahlen gegenüber den kurzwelligen stärker vertreten als im Zenit; dies erklärt auf einfache Weise das bekannte Auftreten der sog. „*farbigen Horizontalstreifen*“ und der „*Gegendämmerung*“. Um deren Verlauf genauer zu beschreiben, müsste überall das

¹⁾ Wiederum zeigt Kleinert II gewisse Anomalien, auf die wir weiter nicht eingehen.

Verhältnis Rot/Grün berechnet werden; wir versparen dies auf eine spätere Behandlung der Dämmerungsfarben.

5. Tabelle VII gibt das Verhalten der *Zenithelligkeit* selber, im Rot und im Grün, bei sinkender Sonne, nach den beiden Methoden von Kleinert, verglichen mit den Beobachtungen Dorno's. Wie zu erwarten war, *nimmt die Zenithelligkeit in Rot und in Grün mit sinkender Sonne stark ab*, bei Kleinert I am geringsten, bei Dorno am stärksten.

Der Verlauf des Verhältnisses Grün/Rot im Zenit zeigt am Anfang nach Kleinert I und bei Dorno, von $Z = 90^\circ$ bis $Z = 92^\circ$ (bzw. 91°), einen schwachen Abfall; dann von $Z = 92^\circ$ (bzw. 91°) bis $Z = 95^\circ$ (bzw. 94°) nach Kleinert I und II einen deutlichen Anstieg, der bei $Z = 96^\circ$ wieder abflaut; nach Dorno dagegen bleibt dieses Verhältnis von $Z = 92^\circ$ bis $Z = 93^\circ$ konstant und flaut schon bei $Z = 94^\circ$ merklich ab.

6. Es lässt sich in allgemeiner Weise erkennen, wie weit die theoretischen Rechnungen untereinander ungefähr übereinstimmen, und wo sie merklich auseinandergehen. Dagegen darf auf die Vergleichung mit DORNO's an und für sich vorzüglichen Messungen nicht allzu grosses Gewicht gelegt werden, als ob daraus ein Urteil auf die Richtigkeit der Theorie gefällt werden könnte. Denn, wie schon früher bemerkt, kann der Davoser Himmel nicht ohne weiteres als Himmel von idealer Reinheit angesehen werden; ferner umfasst die Theorie prinzipiell nur die einmalige Lichtzerstreuung an den Gasmolekeln, was bei grossen ζ merkliche Abweichungen von der Wirklichkeit geben muss; und endlich fehlen bei Dorno gerade bei diesen grossen ζ zuverlässige Messungen.

Allgemein zeigt sich, dass *in einem ausgedehnten Gebiet um den Zenit herum* alle Theorien für Rot und für Grün *denselben quantitativen Verlauf der Helligkeit* ergeben; wird derselbe auf die jeweilige Zenithelligkeit als Einheit bezogen, so bleibt dieser Verlauf auch im wesentlichen *unabhängig von der Sonnentiefe*. In der Tat stimmen alle Helligkeitswerte bei Sonnenuntergang (Tab. V) im Gebiet von $\zeta = 0^\circ$ bis etwa $\zeta = \pm 60^\circ$ bis auf ca. 5—6% untereinander überein und schmiegen sich dem rohen, theoretischen Ausdruck $S(1 + \cos^2 \varphi)$ recht gut an (im Blau sind die Helligkeitswerte, wie es der vermehrten Extinktion nach zu erwarten ist, durchwegs kleiner). Bei den tieferen Sonnendepressionen (Tab. VI) von $Z = 91$ — 96° stimmen alle Helligkeitswerte in Rot und Grün im Gebiet von $\zeta = 0^\circ$ bis etwa $\zeta = \pm 45^\circ$ bis auf ca. 10% untereinander überein (wenn man wieder von einigen merkwürdigen Anomalien bei Kleinert II absieht), so dass auch hier

noch, für pos ζ , die Formel $S(1 + \cos^2 \varphi)$ in Annäherung verwendbar ist.

Jenseits dieses Gebietes treten nun etwas stärkere Differenzen auf. Bei Sonnenuntergang (Tab. V) sind die Werte von Kleinert I durchwegs grösser als diejenigen Ramanathan's, sie zeigen aber nur bei den grössten Zenitdistanzen ($\zeta = \pm 85^\circ$) prozentual starke Abweichungen. Die Zahlen von Kleinert I im Rot schliessen sich der Formel $S(1 + \cos^2 \varphi)$ bei positiven ζ sehr gut an, mit Ausnahme des Wertes für $\zeta = 85^\circ$. Schwieriger ist der Vergleich nach Tabelle VI der beiden Kleinert'schen Zahlenreihen bei grösseren ζ . Die oben angegebenen Gesetzmässigkeiten lassen sich wirklich nur noch qualitativ nachweisen, und in solcher *roher Betrachtung* kann wiederum gesagt werden, dass der Verlauf der Himmelshelligkeit bezogen auf die jeweilige Zenithelligkeit als Einheit im grossen und ganzen für Rot und für Grün für $Z = 90^\circ$ bis 96° sich nicht sehr stark ändert. Jedenfalls gilt dies von der I. Kleinert'schen Theorie, die wegen ihres regelmässigeren Verlaufes vor der II. Theorie den Vorzug zu haben scheint.

Die Frage, ob nun die richtigen Werte der Himmelshelligkeit im Zenit wirklich theoretisch gefunden seien, lässt sich natürlich nicht endgültig beantworten; sie hängt mit der nachfolgenden Schlussbetrachtung zusammen.

E. Gültigkeitsbereich der theoretischen Berechnungen.

Vergleicht man die entsprechenden Zahlen der Tabellen II—IV für J/I , so fällt der grosse Unterschied der 3 betrachteten Theorien auf, der sich durch künstliche Umrechnungen auf andere Einheiten nicht verwischen lässt. Doch ist derselbe eigentlich leicht begreiflich. Die Intensitäten der reinen Atmosphäre sind auf Grund der allgemeinen Formel, S. 36, aus

$$J = \frac{3}{16 \pi} (1 + \cos^2 \varphi) \int_{L_u}^L \kappa \cdot e^{-\int_0^{s+w+l} \kappa(\xi) d\xi} \cdot dl,$$

mit $\kappa = nk$ berechnet. Lässt man in ganz grober Annäherung die Extinktion ausser Betracht, so wird das Integral zu

$$k \int_{L_u}^L n \cdot dl;$$

es ist dann ein Mass für die sog. „Schichtdicke“ S , die der Blicklänge $L - L_u$ entspricht. Am besten verwendet man für S die

Bemporad'schen Werte und bekommt dann die grobe Annäherung, die Dorno¹⁾ angegeben hat, $J \sim S(1 + \cos^2 \varphi)$, und die wir in Tabelle V angeführt haben. Will man aber die Extinktion berücksichtigen, so muss das Integral von J in eine Summe von Einzelintegralen zerlegt werden, entweder nach Kleinert in 3 homogene Schichten, über die integriert werden kann, oder in sehr viele dünne Schichten, über die dann, nach Ramanathan, nur graphisch summiert werden kann. Da nun bei jeder dieser Berechnungsmethoden für die verschiedenen Schichten ganz verschiedene Werte von κ , bzw. k und n (s. Tab. I), benützt wurden, ist es nicht zu verwundern, dass jede Theorie merklich verschiedene Werte für die Integrale, bzw. Summen, liefern musste.

Dass aber trotzdem *alle 3 Theorien eine im ganzen befriedigende Approximation zeigen*, wenn man die Werte J/I jeweilen auf die Zenithelligkeiten = 1 bezieht, ist aus den Tabellen V—VII erkenntlich und beweist, dass die Annahmen der Theorien zu brauchbaren Resultaten führen, sobald man von den Absolutwerten absieht.

Was die einzelnen 3 Theorien anbelangt, so ist klar, dass die Methode von Ramanathan die rationellste ist; doch setzt sie eine Verteilung der Molekelzahlen n voraus, die kaum mehr haltbar ist, und zudem ist diese mühsame Methode wohl nur auf spezielle Fälle ($Z = 90^\circ$) anwendbar. Die erste Methode von Kleinert scheint die befriedigendsten Resultate zu liefern, doch möchten wir grundsätzlich der zweiten Methode Kleinert's den Vorzug geben, wenn auch ihre Resultate merkwürdige Anomalien liefern. Es scheint uns, dass auf diesem von Kleinert eingeschlagenen Weg, mit etwas veränderten Annahmen, die besten Resultate erzielt werden könnten. Wir hoffen, später eine in dieser Richtung durchgeführte, vereinfachte Theorie geben zu können.

¹⁾ DORNO hat dann einen interessanten Versuch gemacht, die Extinktion doch noch zu berücksichtigen. Da seine Zahlen das Gebiet $Z = 90-96^\circ$ nicht umfassen und auch nicht für grosse ζ berechnet sind, ist ein Vergleich mit unsern Zahlen unmöglich.

I. Auslöschungs-, Zerstreuungs- und Transmissionskoeffizienten.

$\lambda \times 10^{-5} \text{ cm}$	Nach Rayleigh		$k \times 10^{26}$			$C(x) \text{ km}^{-1}$		$\kappa \times 10^8 \text{ cm}^{-1}$; Kleinert				
	$\kappa \times 10^8 \text{ cm}^{-1}$	$n \cdot \Gamma_{\varphi=90^\circ} \times 10^8$	Rayleigh	Kleinert I	Ramanathan	Mt. Wilson	Mt. Whitney		Grau	Rot	Blau	Weiss
7,0	4,350	0,2596	0,161	0,333	0,345	0,597	0,0450	Rot	25,0	5,0	1,0	0,05
6,5	5,851	0,3492	0,217	0,407	0,430	—	0,0550		—	8,52	0,35	0,009
6,0	8,059	0,4810	0,299	0,506	0,604	0,117	0,0683		—	—	—	—
5,5	11,414	0,6812	0,423	0,641	0,716	0,132	0,0866	Grün	30,0	7,5	2,0	0,075
5,0	16,718	0,9978	0,619	0,778	0,848	0,153	0,105		—	14,2	0,59	0,015
4,5	25,470	1,520	0,943	1,192	1,270	0,223	0,161		—	—	—	—
3,9	45,148	2,695	1,672	2,000	2,100	0,365	0,270					
1,0	10 444											

$$\kappa = \text{Auslöschungskoeffizient} = \frac{32 \pi^3 (\nu - 1)^2}{3 \lambda^4 n}; \quad \nu - 1 = 29,2; \quad n = 2,7 \cdot 10^{19}.$$

$$n \Gamma_{\varphi=90^\circ} = \frac{3}{16 \pi} \cdot \kappa = n \times \text{Zerstreuungskoeffizient, nach Rayleigh.}$$

$$k = \kappa/n; \quad C(\times) = \text{Transmissionskoeffizient, nach L. V. King}^1), \text{ S. 32.}$$

κ nach Kleinert, s. S. 38 und 41.

II. Helligkeit des Himmels, nach H. Kleinert, erste Methode.

In Einheiten von 1×10^{-4} .

(Z = Zenitdistanz der Sonne; ζ = Zenitdistanz der Blickrichtung.)

ζ	$Z = 90^\circ$		$Z = 92^\circ$		$Z = 93^\circ$		$Z = 94^\circ$		$Z = 96^\circ$	
	Rot	Grün	Rot	Grün	Rot	Grün	Rot	Grün	Rot	Grün
+85°	22,268	19,374	8,953	7,724	5,483	4,769	3,400	3,330	1,941	1,487
+80°	13,816	12,542	5,754	5,342	2,884	3,088	1,882	1,856	1,188	1,123
+75°	9,103	9,487	3,878	3,905	2,245	2,362	1,196	1,274	0,886	0,883
+70°	6,976	7,402	2,971	3,100	1,619	1,858	0,854	0,952	0,700	0,679
+60°	4,564	4,857	1,866	1,949	1,043	1,145	0,548	0,609	0,454	0,436
+45°	2,683	3,064	1,146	1,238	0,641	0,679	0,319	0,376	0,270	0,257
0°	1,300	1,427	0,539	0,576	0,280	0,317	0,152	0,187	0,139	0,121
-45°	2,668	2,854	1,011	1,082	0,535	0,592	0,302	0,376	0,275	0,217
-60°	4,225	4,437	1,682	1,672	0,782	0,832	0,458	0,569	0,396	0,173
-70°	6,296	6,394	2,335	2,205	0,920	0,953	0,776	0,703	0,442	0,139
-75°	8,391	7,852	2,836	2,562	1,079	1,054	0,956	0,665	0,187	0,068
-80°	11,138	9,813	3,056	2,627	1,049	1,018	0,834	0,529	—	—
-85°	15,577	10,388	2,056	0,868	0,441	0,124	—	—	—	—

III. Helligkeit des Himmels, nach H. Kleinert, zweite Methode.

In Einheiten von 1×10^{-4} .

(Z = Zenitdistanz der Sonne; ζ = Zenitdistanz der Blickrichtung.)

ζ	$Z = 90^\circ$	$Z = 91^\circ$		$Z = 92^\circ$		$Z = 93^\circ$		$Z = 94^\circ$		$Z = 95^\circ$		$Z = 96^\circ$	
		Rot	Grün	Rot	Grün	Rot	Grün	Rot	Grün	Rot	Grün	Rot	Grün
+ 85°	—	(0,6142)	(0,2266)	1,4539	0,9374	0,9331	0,6663	0,6065	0,4444	0,2619	0,1948	0,1333	0,1152
+ 80°	—	1,4906	1,0043	1,0912	1,0237	0,7288	0,6995	0,3438	0,3398	0,1466	0,1667	0,1247	0,1441
+ 75°	—	1,1488	1,0960	0,8312	0,8843	0,5263	0,5524	0,2035	0,2308	0,1186	0,1508	0,1002	0,1292
+ 70°	—	0,9473	0,9860	0,6497	0,7575	0,4076	0,4522	0,1321	0,1672	0,0951	0,1287	0,0861	0,1014
+ 60°	—	0,6388	0,6996	0,4382	0,5191	0,2456	0,2952	0,0780	0,1073	0,0634	0,0889	0,0513	0,0689
+ 45°	—	0,3502	0,4704	0,2726	0,3352	0,1453	0,1770	0,0494	0,0683	0,0389	0,0555	0,0299	0,0420
+ 30°	—	0,2889	0,3289	0,1898	0,2319	0,0992	0,1207	0,0328	0,0478	0,0265	0,0386	0,0195	0,0258
0°	—	0,2090	0,2366	0,1342	0,1653	0,0635	0,0821	0,0233	0,0351	0,0172	0,0273	0,0144	0,0194
— 30°	—	0,2955	0,3383	0,1926	0,2392	0,0867	0,1110	0,0330	0,0490	0,0263	0,0390	0,0136	0,0249
— 45°	—	0,4244	0,4791	0,2659	0,3076	0,1126	0,1407	0,0470	0,0675	0,0345	0,0504	0,0200	0,0356
— 60°	—	0,6965	0,7307	0,3916	0,4412	0,1295	0,1555	0,0675	0,0936	0,0458	0,0647	0,0251	0,0364
— 70°	—	1,0117	1,0342	0,5257	0,5893	0,1378	0,1500	0,0882	0,0918	0,0534	0,0712	0,0073	0,0036
— 75°	—	1,2520	1,2543	0,6000	0,6506	0,1408	0,1494	0,0944	0,0814	0,0607	0,0687	0,0008	0,0004
— 80°	—	1,596	1,492	0,5653	0,5670	0,1194	0,1235	0,0932	0,0189	0,0020	0,0010	—	—
— 85°	—	1,631	0,521	0,2649	0,2721	0,0138	0,0076	—	—	—	—	—	—

IV. Helligkeit des Himmels nach K. R. Ramanathan.

In Einheiten von $I \times 10^{-4}$.

Für $Z = 90^\circ$

$\zeta =$	+ 85°	+ 80°	+ 60°	+ 45°
Rot	97,6	65,2	23,4	14,6
Grün	81,8	62,8	26,7	16,6
Blau	42,0	49,4	26,5	18,1

$\zeta =$	0°	− 45°	− 60°	− 80°	− 85°
Rot	6,9	13,8	21,8	49,7	62,2
Grün	7,9	15,5	23,0	43,9	39,3
Blau	9,0	16,1	22,4	28,4	12,3

V. Vergleich der relativen Helligkeiten, bezogen auf Zenithelligkeit = 1, bei Sonnenuntergang $Z = 90^\circ$.

ζ	Blau		Grün		Beobachtg. von Dorno	Rot		$(1 + \cos^2 \varphi) S$
	Ramanathan	Ramanathan	Kleinert I	Ramanathan		Kleinert I		
+ 85°	4,67	13,54	13,58		(12,2)	14,15	17,13	20,72
+ 80°	5,49	7,95	8,79		(11,96)	9,45	10,63	11,04
+ 75°	4,95	5,85	6,65		(11,4)	7,10	7,00	7,38
+ 70°	4,20	4,65	5,19		10,68	5,10	5,37	5,46
+ 60°	2,95	3,38	3,40		5,86	3,39	3,51	3,50
+ 45°	2,01	2,10	2,15		2,40	2,12	2,07	1,83
+ 30°	1,48	1,36	1,37		1,52	1,36	1,35	1,44
0°	1,00	1,00	1,00		1,00	1,00	1,00	1,00
- 30°	1,31	1,34	1,36		1,26	1,36	1,35	1,44
- 45°	1,79	1,96	2,00		1,88	2,00	2,05	1,83
- 60°	2,49	2,91	3,11		2,98	3,16	3,25	3,50
- 70°	2,90	4,00	4,48		3,98	4,55	4,84	5,46
- 75°	3,10	4,65	5,50		4,60	5,60	6,46	7,38
- 80°	3,16	5,55	6,88		(5,36)	7,20	8,57	11,04
- 85°	1,37	4,98	7,28		(6,30)	9,01	11,98	20,72

Die Angaben von Dorno gelten für die gesamte Himmelselligkeit; die Zahlen in () sind ungewiss.

Alle kleingedruckten Zahlen sind auf graphischem Weg interpoliert.

Vla. Vergleich der relativen Helligkeiten, bezogen auf Zenithelligkeit = 1, bei tieferen Sonnendepressionen,
 $Z = 90-96^\circ$, im Rot.

ζ	$Z = 90^\circ$		$Z = 91^\circ$		$Z = 92^\circ$		$Z = 93^\circ$			$Z = 94^\circ$		$Z = 95^\circ$		$Z = 96^\circ$	
	Kl. I	Kl. II	Kl. I	Kl. II	Kl. I	Kl. II	Kl. I	Kl. II	Dorno- Helligk.	Kl. I	Kl. II	Kl. I	Kl. II	Kl. I	Kl. II
+ 85°	17,13	(2,94)	16,6	10,8	19,6	14,7	19,6	14,7		22,4	26,0	15,2		12,96	9,26
+ 80°	10,63	7,13	10,7	8,30	10,3	11,5	10,3	11,5		12,4	14,8	8,52		8,55	8,66
+ 75°	7,00	5,51	7,20	6,21	8,01	8,28	8,01	8,28		7,87	8,73	6,90		6,37	6,96
+ 70°	5,37	4,53	5,51	4,86	5,78	6,42	5,78	6,42	(10?)	5,62	5,67	5,53		5,03	5,98
+ 60°	3,51	3,06	3,46	3,27	3,73	3,87	3,73	3,87	4,95	3,60	3,35	3,69		3,27	3,56
+ 45°	2,07	1,68	2,13	2,04	2,27	2,27	2,27	2,27	2,36	2,10	2,12	2,26		1,93	2,07
+ 30°	1,80	1,38	1,80	1,42	1,90	1,56	1,90	1,56	1,62	1,80	1,41	1,55		1,70	1,35
0°	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,02	1,00	1,00	1,00		1,00	1,00
- 30°	1,80	1,41	1,70	1,42	1,70	1,37	1,70	1,37	1,32	1,75	1,41	1,54		1,75	0,94
- 45°	2,05	2,03	1,88	1,98	1,87	1,77	1,87	1,77	1,55	2,00	2,01	2,00		1,98	1,39
- 60°	3,25	3,33	3,12	2,93	2,79	2,04	2,79	2,04	2,06	3,01	2,90	2,66		2,84	1,75
- 70°	4,84	4,84	4,33	3,92	3,29	2,17	3,29	2,17	(2,85)	5,10	3,78	3,10		3,18	0,51
- 75°	6,46	6,00	5,26	4,48	3,92	2,22	3,92	2,22		6,29	4,05	3,53		1,35	0,06
- 80°	8,57	7,64	5,67	4,22	3,75	1,89	3,75	1,89		5,49	4,00	0,12		-	-
- 85°	11,98	7,80	3,81	1,97	1,58	0,22	1,58	0,22		-	-	-		-	-

Die Angaben von Dorno gelten für die gesamte Himmelselligkeit; die Zahlen in () sind ungewiss.

Alle kleingedruckten Zahlen sind auf graphischem Weg interpoliert.

Vlb. Vergleich der relativen Helligkeiten, bezogen auf Zenithelligkeit = 1, bei tieferen Sonnendepressionen,
 $Z = 90 - 96^\circ$, im Grün.

ζ	$Z = 90^\circ$		$Z = 91^\circ$		$Z = 92^\circ$		$Z = 93^\circ$		$Z = 94^\circ$		$Z = 95^\circ$		$Z = 96^\circ$	
	Kl. I	Kl. II	Kl. I	Kl. II	Kl. I	Kl. II	Kl. I	Kl. II	Kl. I	Kl. II	Kl. I	Kl. II	Kl. I	Kl. II
+85°	13,58	(0,96)	13,5	5,66	15,03	8,10	17,8	12,7	7,13	12,3	5,94			
+80°	8,79	4,24	9,24	6,19	9,74	8,52	9,96	9,68	6,11	9,28	7,43			
+75°	6,65	4,63	6,78	5,35	7,45	6,73	6,81	6,55	5,52	7,30	6,66			
+70°	5,19	4,17	5,38	4,58	5,86	5,51	5,10	4,76	4,71	5,61	5,23			
+60°	3,40	2,96	3,38	3,14	3,61	3,59	3,25	3,04	3,25	3,60	3,55			
+45°	2,15	1,98	2,15	2,03	2,14	2,16	2,01	1,95	2,03	2,12	2,16			
+30°	1,80	1,39	1,80	1,40	1,80	1,47	1,75	1,36	1,41	1,80	1,33			
0°	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00			
-30°	1,75	1,40	1,70	1,44	1,70	1,35	1,75	1,39	1,42		1,29			
-45°	2,00	2,02	1,88	1,86	1,87	1,70	2,01	1,92	1,84	1,80	1,83			
-60°	3,11	3,06	2,90	2,66	2,63	1,89	3,04	2,67	2,36	1,43	1,88			
-70°	4,48	4,37	3,83	3,56	3,01	1,83	3,76	2,61	2,60	1,15	0,19			
-75°	5,50	5,30	4,45	3,93	3,32	1,82	2,10	2,31	2,52	0,56	0,02			
-80°	6,88	6,31	4,56	4,03	3,21	1,50	1,67	0,56	0,04	—	—			
-85°	7,28	2,20	1,31	1,64	0,39	0,10	—	—	—	—	—			

Die Angaben von Dorno gelten für die gesamte Himmelselligkeit; die Zahlen in () sind ungewiss.

Alle kleingedruckten Zahlen sind auf graphischem Weg interpoliert.

VII. Vergleich der Zenithelligkeiten in Rot und Grün,
für $Z = 90^\circ$ bis $Z = 96^\circ$.

	$Z =$	90°	91°	92°
Rot	Kleinert I	1,00	—	0,415
	Kleinert II	—	0,707	0,453
Grün	Kleinert I	1,00	—	0,403
	Kleinert II	—	0,639	0,446
Grün/Rot	Kleinert I	1,098	—	1,070
	Kleinert II	—	1,13	1,23
Rot	} Dorno	1,00	0,65	0,29
Grün		1,00	0,57	0,29
Helligkeit		1,00	0,62	0,30

	$Z =$	93°	94°	95°	96°
Rot	Kleinert I	0,215	0,117	—	0,107
	Kleinert II	0,215	0,079	0,058	0,049
Grün	Kleinert I	0,222	0,131	—	0,085
	Kleinert II	0,222	0,095	0,074	0,052
Grün/Rot	Kleinert I	1,13	1,23	—	0,86
	Kleinert II	1,28	1,50	1,59	1,35
Rot	} Dorno	0,12	0,06	—	—
Grün		0,12	0,04	—	—
Helligkeit		0,14	—	—	—

Bei Kleinert II stehen keine Angaben für $Z = 90^\circ$ zur Verfügung; die Intensitäten wurden so umgerechnet, dass sie bei $Z = 93^\circ$ mit Kleinert I übereinstimmen.

Bern, Januar 1932.