Über die Intensität der Streustrahlung bewegter freier Elektronen

Autor(en): **Pauli, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **6 (1933)**

Heft IV

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-110275

Über die Intensität der Streustrahlung bewegter freier Elektronen

von **W. Pauli**, Zürich.

(3. VI. 33.)

§ 1. Die Problemstellung.

Durch die Formel von KLEIN und NISHINA ist die Intensität der Streustrahlung durch anfangs ruhende freie Elektronen bestimmt. Die vorliegende Arbeit entstand aus der Problemstellung, ob gebundene Elektronen gemäss dieser Klein-Nishina'schen Formel streuen, sobald die einfallende Strahlung eine Frequenz ν besitzt, die gross ist gegen die Ionisierungsfrequenz des Atoms. Bei der Beantwortung dieser Frage ist zunächst zu beachten, dass bei endlichem Streuwinkel die Frequenz ν' der gestreuten Strahlung bei wachsender Frequenz der einfallenden Strahlung gegen einen festen Grenzwert konvergiert und nicht beliebig anwächst. Schon aus diesem Grunde sind Abweichungen der Intensität der gestreuten Strahlung von dem durch die Klein-Nishina-Formel gegebenen Wert zu erwarten, die prozentual endlich bleiben, wenn ν beliebig anwächst.

Man kann jedoch den Grenzfall betrachten, dass nicht nur ν beliebig anwächst, sondern auch ν', und zwar derart, dass der Quotient ν'/ν gegen einen festen Grenzwert konvergiert. Dies setzt allerdings voraus, dass der Streuwinkel mit wachsendem ν nach Null konvergiert (und zwar wie $\nu^{-\frac{1}{2}}$). Wir wollen diesen Grenzfall[1])

$$\nu \to \infty\,, \qquad \nu' \to \infty\,, \qquad \frac{\nu'}{\nu} \to \gamma < 1 \tag{1}$$

kurz als „Limes L" bezeichnen. Man könnte nun vielleicht vermuten, dass wenigstens in diesem Limes L die Intensität der Streustrahlung gleich ist dem für die betreffende Frequenz ν' der Streustrahlung durch die Klein-Nishina-Formel gegebenen Wert. Die Prüfung dieser Frage hat jedoch ergeben, dass *diese Vermutung nicht zutrifft.* Hier wollen wir dies nur für bewegte freie Elektronen

[1]) Auf die Bedeutung dieses Grenzfalles bin ich von W. HEISENBERG aufmerksam gemacht worden.

zeigen, während die etwas komplizierteren Verhältnisse bei gebundenen Elektronen in der nachfolgenden Arbeit von CASIMIR behandelt werden.

Im Fall der bewegten freien Elektronen zeigt es sich nämlich, dass auch im Limes L die Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen in der Formel für die Intensität der Streustrahlung pro Frequenzintervall $d\nu'$ nicht herausfällt. Es kann dies als eine Art Dopplereffekt der Streuintensität betrachtet werden.

Im folgenden § 2 führen wir allgemein die Lorentz-Transformation der Klein-Nishina-Formel durch, während der § 3 den Übergang zum Limes L enthält.

§ 2. Lorentz-Transformation der Klein-Nishina-Formel.

Der Absorptions- oder Schwächungskoeffizient A der in einer bestimmten Richtung $\vec{n}$ einfallenden Strahlung der Frequenz ν pro Raumwinkel $d\Omega$ der gestreuten Strahlung ist folgendermassen definiert. Fällt eine bestimmte Anzahl N_1 von Quanten der Frequenz ν in einer gewissen Zeit t auf die ruhende, auf der Einfallsrichtung $\vec{n}$ senkrechte Fläche mit dem Areal q, so werden von diesen Quanten

$$N_2 = N_1 \frac{1}{q} A \, d\Omega \tag{2}$$

in den räumlichen Winkel $d\Omega$ gestreut. Ist

$$E = N_1 h\nu$$

die während der Zeit t einfallende Energie, so ist der Streukoeffizient S pro räumlichen Winkel $d\Omega$ definiert durch

$$E' = E \frac{1}{q} S \, d\Omega \tag{3}$$

worin

$$E' = N_2 h\nu'$$

die aus dem während der Zeit t einfallenden Bündel gestreute Energie ist. Es gilt also

$$S \, d\Omega = \frac{\nu'}{\nu} A \, d\Omega \,. \tag{4}$$

Es ist zu beachten, dass die Zeit t' während der die Quanten gestreut werden, im Falle, wo sich das Elektron bewegt, eine andere ist, als die Zeit t, während welcher die einfallenden Quanten durch die ruhende Fläche hindurchtreten. Und zwar ist

$$\frac{t'}{t} = \frac{1}{D}, \tag{5}$$

wenn

$$D = 1 - \frac{v}{c} \cos \alpha = 1 - \frac{1}{c} (\vec{v}\, \vec{n}) \tag{6}$$

gesetzt wird, worin $\vec{v}$ die Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen und α der Winkel zwischen ihrer Richtung und derjenigen der einfallenden Strahlung bedeutet. Fragen wir also nach dem Bruchteil

$$B\, d\Omega$$

der *pro Zeiteinheit* in den räumlichen Winkel $d\,\Omega$ gestreuten Quanten zu den *pro Zeiteinheit* durch die ruhende Querschnittseinheit einfallenden Quanten, so ist

$$B = \frac{t}{t'} A = DA. \tag{7}$$

Dieser Schwächungskoeffizient B ist es, der durch die allgemeinen von WALLER[1]) und DIRAC[2]) angegebenen Formeln gegeben ist, während wir hier den Schwächungskoeffizient A (bzw. den aus ihm folgenden Streukoeffizient S) betrachten wollen. Der letztere liegt auch den Betrachtungen in der ursprünglichen Arbeit von GORDON[3]) zu Grunde. Es sei noch bemerkt, dass bei gebundenen Elektronen der Unterschied zwischen den Koeffizienten B und A fortfällt, da in diesem Fall der Mittelpunkt des Elektronenwellenpaketes sich nicht fortbewegt.

Wir bezeichnen nun mit dem Index 0 alle Grössen, die sich auf das Bezugssystem K_0 beziehen, in welchem das Elektron zu Beginn des Prozesses ruht, während mit einem Akzent die Grössen bezeichnet werden, die sich auf den Zustand nach dem Streuprozess beziehen. Im System K_0 gilt dann nach KLEIN und NISHINA für unpolarisierte Strahlung

$$A_0\, d\,\Omega_0 = C \frac{\nu_0'^2}{\nu_0^2} \left[\frac{\nu_0}{\nu_0'} + \frac{\nu_0'}{\nu_0} - \sin^2 \vartheta_0 \right] d\,\Omega_0, \tag{8}$$

wenn ϑ den Winkel zwischen der Richtung $\vec{n}$ des einfallenden

[1]) J. WALLER, ZS. f. Phys. **61**, 837, 1930, Gl. (23″).
[2]) P. A. M. DIRAC, Proc. Cambr. Phil. Soc. **26**, 361, 1930.
[3]) W. GORDON, ZS. f. Phys. **40**, 117, 1926.

Quants und der Richtung $\vec{n}'$ des Streuquants bedeutet, sodass gilt

$$\cos\vartheta = (\vec{n}\,\vec{n}'), \tag{9}$$

und wenn

$$C = \frac{e^4}{2\,m_0^2\,c^4} \tag{10}$$

gesetzt ist.

Da die Lichtquantenzahlen N_2 und N_1 in Gl. (2) Invarianten sind, findet man sofort, dass $\frac{1}{q}\,A\,d\Omega$ eine Invariante ist.

$$\frac{1}{q}\,A\,d\,\Omega = \frac{1}{q_0}\,A_0\,d\,\Omega_0. \tag{11}$$

Es lässt sich zeigen, dass q selbst eine Invariante ist;

$$q = q_0, \tag{12}$$

sodass auch gilt

$$A\,d\Omega = A_0\,d\Omega_0. \tag{13}$$

Um (12) zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass bei dem Ansatz

$$\vec{x} = \vec{n}\,c\,t + \vec{a}$$

worin $\vec{n}$ die Wellennormale bedeutet, und der Koordinatenursprung in eine zu betrachtende Wellenfront gelegt wird, folgt

$$(\vec{x}\,\vec{n}) - c\,t = 2\,(\vec{a}\,\vec{n})$$

$$x^2 - c^2 t^2 = 2\,(\vec{a}\,\vec{n})\,c\,t + a^2.$$

Da die Phase $\nu\,[(\vec{\alpha}\,\vec{n}) - c\,t]$ und $x^2 - c^2 t^2$ Invarianten sind, ergibt sich weiter

$$\nu\,(\vec{a}\,\vec{n}) = \nu_0\,(\vec{a}_0\,\vec{n}_0)$$

$$2\,(\vec{a}\,\vec{n})\,c\,t + a^2 = 2\,(\vec{a}_0\,\vec{n}_0)\,c\,t_0 + a_0^2.$$

Nun liege der Punkt $\vec{x}$ auf der Wellenfront, sodass

$$(\vec{a}\,\vec{n}) = 0.$$

Dann gilt auch

$$(\vec{a}_0\,\vec{n}_0) = 0.$$

Das heisst Weltpunkte der Wellenfront liegen auch im anderen Bezugsystem auf der Wellenfront. Ferner folgt dann

$$a^2 = a_0^2,$$

d. h. alle räumlichen Abstände, von Punkten der Wellenfront bleiben bei Lorentztransformationen invariant. Dies hat unmittelbar zur Folge, dass die Querdimensionen eines Lichtbündels sich bei Übergang zu einem anderen Bezugssystem nicht ändern.

Die Transformationsformeln für die Frequenzen lauten mit Einführung der Abkürzungen

$$D = 1 - \frac{v}{c} \cos \alpha = 1 - \frac{1}{c} (\vec{v}\, \vec{n}) \tag{6}$$

$$D' = 1 - \frac{v}{c} \cos \alpha' = 1 - \frac{1}{c} (\vec{v}\, \vec{n}') \tag{6'}$$

(α und α' bedeuten die Winkel der einfallenden bzw. gestreuten Strahlung mit der Geschwindigkeitsrichtung des Elektrons vor dem Prozess)

$$\nu_0 = \nu \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \nu \frac{E}{m c^2} D \tag{14}$$

$$\nu_0' = \nu' \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \nu' \frac{E}{m c^2} D', \tag{14'}$$

wenn

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

die Energie des Elektrons vor dem Prozess bedeutet. Ferner gilt, da

$$\left(\frac{\nu}{c} \vec{n},\, i \frac{\nu}{c}\right)$$

bzw.

$$\left(\frac{\nu'}{c} \vec{n}',\, i \frac{\nu'}{c}\right)$$

die Komponenten je eines Vierervektors bilden, als Folge der Invarianz des skalaren Produktes dieser Vierervektoren

$$\nu \nu' (1 - \cos \vartheta) = \nu_0 \nu_0' (1 - \cos \vartheta_0), \tag{15}$$

wobei mit ϑ und ϑ_0 die Streuwinkel im ursprünglichen und im Ruhsystem bezeichnet sind.

Führen wir die Abkürzungen ein

$$1 - \cos \vartheta = \varkappa, \qquad 1 - \cos \vartheta_0 = \varkappa_0, \tag{16}$$

so folgt aus (15) und (14), (14') die Invarianz von

$$\frac{\varkappa}{D D' E^2} = \frac{\varkappa_0}{(m_0 c^2)^2}\,. \tag{17}$$

Ferner gilt bekanntlich als Folge des Energie- und Impulssatzes im Ruhsystem

$$\varkappa_0 = \left(\frac{1}{\nu_0{}'} - \frac{1}{\nu_0}\right)\frac{m_0 c^2}{h}, \tag{18_0}$$

also folgt

$$\varkappa = \left(\frac{D}{\nu'} - \frac{D'}{\nu}\right)\frac{E}{h}, \tag{18}$$

was man auch durch Anwendung des Energie- und Impulssatzes direkt bestätigen kann. Endlich folgt für den in (8) vorkommenden Wert von $\sin^2 \vartheta_0$:

$$\sin^2 \vartheta_0 = 2\,\varkappa_0 - \varkappa_0^2 =$$

$$= \frac{m_0 c^2}{h}\,\frac{m_0 c^2}{E}\left(\frac{1}{\nu' D'} - \frac{1}{\nu D}\right)\left[2 - \frac{m_0 c^2}{h}\,\frac{m_0 c^2}{E}\left(\frac{1}{\nu' D'} - \frac{1}{\nu D}\right)\right]. \tag{19}$$

Für die räumlichen Öffnungswinkel der Lichtbündel des gestreuten Strahles gilt ferner die bekannte Transformationsformel

$$\nu'^2\, d\,\Omega = \nu_0{}'^2\, d\,\Omega_0 \tag{20}$$

Aus (13), (14), (14′) und (20) folgt schliesslich das Endresultat

$$A\,d\,\Omega = A_0 \frac{\nu'^2}{\nu_0{}'^2}\,d\,\Omega = C\,\frac{\nu'^2}{\nu^2}\left(\frac{m_0 c^2}{E D}\right)^2 \left[\frac{\nu D}{\nu' D'} + \frac{\nu' D'}{\nu D} - \sin^2 \vartheta_0\right], \tag{21}$$

worin $\sin^2 \delta_0$ aus (19) entnommen werden kann. Für den Streukoeffizient S findet man sodann gemäss (4)

$$S\,d\,\Omega = C\,\frac{\nu'^3}{\nu^3}\left(\frac{m_0 c^2}{E D}\right)^2 \left[\frac{\nu D}{\nu' D'} + \frac{\nu' D'}{\nu D} - \sin^2 \vartheta_0\right] d\,\Omega. \tag{22}$$

§ 3. Übergang zum Limes L.

Wir wollen jetzt noch den Übergang zum Limes

$$\nu \longrightarrow \infty, \qquad \nu' \longrightarrow \infty, \qquad \frac{\nu'}{\nu} = \gamma < 1$$

machen. Nach (17) und (18) wird dann

$$\varkappa \longrightarrow 0, \qquad \varkappa_0 \longrightarrow 0, \qquad \sin^2 \vartheta_0 \longrightarrow 0,$$

und wegen

$$\cos \alpha' = \cos \alpha \, \cos \vartheta + \sin \, \alpha \sin \vartheta \cos \varphi, \tag{23}$$

wenn φ das Azimut der Richtung der Streustrahlung in Bezug auf die Ebene durch $\vec{n}$ und $\vec{v}$ ist:

$$\cos\alpha' \longrightarrow \cos\alpha$$

$$\frac{D'}{D} \longrightarrow 1\,.$$

Aus (22) folgt also im Limes L

$$S\,d\,\Omega = C\left(\frac{m_0\,c^2}{E\,D}\right)^2 \gamma^2\,(1+\gamma^2)\,d\,\Omega\,. \tag{24}$$

Wir wollen nun noch den Streukoeffizient umrechnen auf die Streuung pro $d\nu'$. Hiebei ist zu beachten, dass wegen der Abhängigkeit der Grösse D' von ϑ und φ gemäss (18) ν' nicht nur von ϑ, sondern auch von φ abhängt. Und zwar folgt bei festem Azimut φ gemäss (18)

$$-D\,\frac{d\,\nu'}{\nu'^2} = \frac{h}{E}\,d\,k + \frac{1}{\nu}\,d\,D' = \frac{h}{E}\,d\,k +$$

$$+\frac{1}{\nu}\,\frac{v}{c}\left(\cos\alpha + \sin\alpha\cos\varphi\,\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right)d\,k\,,$$

also

$$-\frac{1}{\nu'^2}\,\frac{E\,D}{h}\left(\frac{d\,\nu'}{d\,k}\right)_\varphi = 1 + \frac{E\,v}{h\,c}\left(\frac{\cos\alpha}{\nu} + \sin\alpha\cos\varphi\,\frac{\cos\vartheta}{\nu\sin\vartheta}\right).$$

Im Limes L ist

$$k\,\nu \longrightarrow \frac{\vartheta^2}{2}\,\nu \longrightarrow \frac{E\,D}{h}\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right),$$

also geht $\frac{1}{\nu\,\vartheta}$ gegen Null wie $\nu^{-\frac{1}{2}}$ und es ist im Limes L

$$-\nu'^2\,\frac{d\,k}{d\,\nu'} \longrightarrow \frac{E\,D}{h}$$

und dies ist im Limes L unabhängig vom Azimut φ. Wegen

$$S_{\nu'}\,d\,\nu' = S\,d\,\Omega = S\,d\,\varkappa\,d\,\varphi$$

folgt also im Limes L

$$S_{\nu'}\,d\,\nu' = C\,\frac{m_0\,c^2}{h}\,\frac{m_0\,c^2}{E\,D}\,(1+\gamma^2)\,\frac{2\,\pi\,d\,\nu'}{\nu^2}\,. \tag{25}$$

Es fällt also, wie behauptet, die Geschwindigkeit v im Endresultat nicht heraus. Für $v = 0$ hat man

$$S_{\nu_0'} \, d \nu_0' = C \, \frac{m_0 c^2}{h} (1 + \gamma_0^2) \, \frac{2 \pi \, d \nu_0'}{\nu_0^2}, \tag{25}$$

sodass im Faktor $\frac{m_0 c^2}{E D}$ in (25) die Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons explizite vorkommt.

Zürich, Physikal. Institut der E. T. H.