Über die Intensität der Streustrahlung gebundener Elektronen

Autor(en): **Casimir, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **6 (1933)**

Heft IV

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-110276

Über die Intensität der Streustrahlung gebundener Elektronen

von **H. Casimir** in Zürich.

(3. VI. 33.)

Einleitung:

Es ist naheliegend anzunehmen, dass die Streuvermögen gebundener und freier Elektronen asymptotisch gleich werden in dem Grenzfall, dass sowohl die Energien des einfallenden und des gestreuten Quants als ihre Energiedifferenz (also die auf das Elektron übertragene Energie) gross gegen $m c^2$ sind. Aus der vorstehenden Arbeit von PAULI geht aber hervor, dass dies keineswegs der Fall zu sein braucht. Dort wird ja gezeigt, dass auch in diesem Grenzfall das Streuvermögen von der Anfangsgeschwindigkeit des Elektrons abhängt und diese darf für ein gebundenes Elektron nicht einfach gleich null gesetzt werden. Z. B. hat ein Elektron in der K-Schale eine kugelsymmetrische Geschwindigkeitsverteilung mit einer mittleren Geschwindigkeit αc $(\alpha = Ze^2/hc = Z/137)$; nach den Pauli'schen Rechnungen würde man deshalb Abweichungen von der für ruhende freie Elektronen gültigen Klein-Nishina-Formel erwarten von der Grössenordnung α^2.

Allerdings ist es nicht zulässig ein Elektron in einem stationären Zustand ohne weiteres durch ein „Paket" bewegter freier Elektronen zu ersetzen: im stationären Zustand ist die Energie unabhängig vom Impuls, beim Paket gehört zum Impuls p die Energie $c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}$. Die relativen Energieunterschiede sind von der Grössenordnung $(v/c)^2 \sim \alpha^2$ und dürfen also nicht vernachlässigt werden.

Im folgenden werden wir nun die Streuung durch K-Elektron in folgender Weise zu berechnen versuchen: Was den Anfangszustand betrifft, werden keine Vernachlässigungen gemacht, im Zwischenzustand und Endzustand aber wird das Elektron als frei betrachtet. Weil in diesen Zuständen die Energie des Elektrons gross ist gegen $m c^2$ (also a fortiori gegen die Bindungsenergie) darf man erwarten, dass dieses Verfahren im betrachteten Grenzfall zu richtigen Ergebnissen führen wird.

§ 1. Die Erhaltungssätze.

Es seien:

$c\,\varepsilon_0$, $\vec{p}$ Energie und Impuls des Elektrons im Anfangszustand.

$c\,\varepsilon'$, $\vec{p}$ Energie und Impuls des Elektrons im Endzustand.

$\frac{h\nu}{c}\vec{n}$ Impuls des einfallenden Lichtquants (Kreisfrequenz).

$\frac{h\nu'}{c}\vec{n}'$ Impuls des gestreuten Lichtquants.

$\nu/\nu' = \gamma$ wo γ eine Zahl < 1 ist.

Der Anfangsimpuls kann dabei noch alle möglichen Werte haben. Für ein Elektron in der K-Schale ist das mittlere $|p| \sim \alpha m c$, für grössere Werte fällt die Wahrscheinlichkeit steil ab. Der Erhaltungssatz lautet:

$$\varepsilon_0 + \frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c} = \varepsilon' \tag{1a}$$

$$\vec{p} + \vec{n}\frac{h\nu}{c} - \vec{n}'\frac{h\nu'}{c} = \vec{p}'. \tag{1b}$$

Bildung von $(a)^2 - (b)^2$ liefert:

$$\varepsilon_0^2 - p^2 - m^2c^2 - 2\frac{h\nu}{c}\frac{h\nu'}{c}\{1 - (\vec{n}\,\vec{n}')\} +$$

$$+ 2\frac{h\nu}{c}\{\varepsilon_0 - (\vec{p}\,\vec{n})\} - 2\frac{h\nu'}{c}\{\varepsilon_0 - (\vec{p}\,\vec{n}')\} = 0.$$

Wir führen folgende Abkürzungen ein:

$$\delta_0 = \varepsilon_0^2 - p^2 - m^2c^2$$

$$F = 1 - \frac{(\vec{p}\,\vec{n})}{\varepsilon_0} + \frac{\delta_0}{2\,\varepsilon_0\,h\,\nu/c} \qquad F' = 1 - \frac{(\vec{p}\,\vec{n}')}{\varepsilon_0} - \frac{\delta_0}{2\,\varepsilon_0\,h\,\nu'/c}.$$

Dann folgt:

$$1 - (\vec{n}\,\vec{n}') = \frac{\varepsilon_0 F}{h\nu'/c} - \frac{\varepsilon_0 F'}{(h\nu/c)} - \frac{1}{2}\frac{\delta_0}{(h\nu/c)(h\nu'/c)}. \tag{2}$$

Schreiben wir (1) in der Form

$$\varepsilon_0 + \frac{h\nu}{c} = \varepsilon' + \frac{h\nu'}{c} \tag{a}$$

$$\vec{p} + \vec{n}\frac{h\nu}{c} = \vec{p}' + \vec{n}'\frac{h\nu'}{c} \tag{b}$$

und bilden wieder $(a)^2-(b)^2$, so folgt

$$\varepsilon_0 F \frac{\nu}{\nu'} = \varepsilon' - (\vec{p}'\,\vec{n}');$$

in ähnlicher Weise:

$$\varepsilon_0 F' \frac{\nu'}{\nu} = \varepsilon' - (\vec{p}'\,\vec{n}).$$

Nun ist

$$\varepsilon' = \sqrt{|p'|^2 + m^2 c^2} \sim |p'| + \frac{1}{2}\,\frac{m^2 c^2}{|p'|}.$$

Weiter ist

$$|p'| \geqslant (\vec{p}'\,\vec{n}'),$$

also folgt

$$F \geqslant q \cdot \frac{m c^2}{h \nu}, \tag{3}$$

wo q eine positive Zahl von der Ordnung 1 ist. Ebenso

$$F' \geqslant q' \frac{m c^2}{h \nu}. \tag{3'}$$

Die untere Grenze wird bei vorgegebenem ν' tatsächlich erreicht für $\vec{n}' = \vec{n}$. Es ist dann $(\vec{p}\,\vec{n}) = \varepsilon_0 \left(1 - q'' \frac{m c^2}{h \nu}\right)$; die Komponente $\perp \vec{n}$ kann dabei noch beliebige Werte (von der Grössenordnung $m c$) annehmen.

§ 2. Der Ansatz für den Wirkungsquerschnitt.

Wir schreiben die Diracgleichung in der Form:

$$i h \frac{\partial \psi}{\partial t} = [c\,\vec{\boldsymbol{\alpha}}\vec{p} + e\,\vec{\boldsymbol{\alpha}}\,\vec{A} + \boldsymbol{\beta}\, m c^2]\,\psi - e\,V\,\psi$$

($\vec{\boldsymbol{\alpha}}$, $\boldsymbol{\beta}$ Dirac'sche Matrizen; $-e$ Ladung des Elektrons; $\vec{A}$ Vektorpotential, V skalares Potential).

Die Wellenfunktionen eines freien Elektrons sind:

$$\psi_\varrho^{(k)} = u_\varrho^{(k)}(\vec{p})\, e^{-i(\varepsilon^{(k)} c\, t - \vec{p}\,\vec{x})/h}.$$

Der Index k läuft von 1 bis 4 und numeriert die zu einem Impulsvektor gehörigen Zustände.

$$\varepsilon^{1,2} = +\sqrt{p^2 + m^2 c^2}\,; \quad \varepsilon^{3,4} = -\sqrt{p^2 + m^2 c^2}.$$

Die $u_\varrho^{(k)}$ werden so normiert, dass

$$\sum_\varrho u_\varrho^{(l)}(\vec{p})^* \; u_\varrho^{(k)}(\vec{p}) = \delta_{lk}.$$

Die Wellenfunktionen des gebundenen Elektrons schreiben wir:

$$\psi_\varrho^{(k)} = (2\pi h)^{-\frac{3}{2}} \int v_\varrho^{(k)}(\vec{p})\, e^{-i(\varepsilon_0 c t - \vec{p}\vec{x})/h}\, d\vec{p};$$

hier kommen nur zwei Zustände ($k = 1{,}2$) in Betracht, entsprechend den zwei Möglichkeiten für die Spinorientierung. Es gilt:

$$\sum_\varrho \int v_\varrho^{(k)}(\vec{p})^* \; v_\varrho^{(l)}(\vec{p})\, d\vec{p} = \delta_{kl}.$$

Den Wirkungsquerschnitt pro Winkelintervall $d\Omega$ definieren wir als den Bruchteil der pro cm^2 einfallenden Quanten der in das betreffende Winkelgebiet gestreut wird. (Weil das Wellenpaket im Raum ruht, braucht dabei zwischen Gesamtstreuung und Streuung pro Zeiteinheit nicht unterschieden zu werden). Nach WALLER[1]) gibt das p-Gebiet zwischen $\vec{p}$ und $\vec{p} + d\vec{p}$ zu diesem Wirkungsquerschnitt den Beitrag:

$$Q_{p,\,\Omega} = e^4 \frac{\nu'}{\nu} \left[\frac{\partial(h\nu', \vec{p}')}{\partial(\delta W, \vec{p})}\right]_{\delta W = 0} \cdot \sum_{k, k' = 1, 2} \overline{|B^{k'k}|^2}\, d\vec{p}\, d\Omega.$$

Hier ist:

$$\delta W = c\,\varepsilon(\vec{p}') - c\,\varepsilon_0 - h\nu + h\nu'$$

$$B^{k'k} = \sum_l \frac{u^{k'}\left(\vec{p} + \frac{h\nu}{c}\vec{n} - \frac{h\nu'}{c}\vec{n}'\right)^* (\vec{\boldsymbol{\alpha}}\vec{e}')\, u^l\left(\vec{p} + \frac{h\nu}{c}\vec{n}\right) u^l\left(\vec{p} + \frac{h\nu}{c}\vec{n}\right)^* (\vec{\boldsymbol{\alpha}}\vec{e})\, v^k(\vec{p})}{c\,\varepsilon^l\left(\vec{p} + \frac{h\nu}{c}\vec{n}\right) - h\nu - c\,\varepsilon_0}$$

$$+ \sum_l \frac{u^{k'}\left(\vec{p} + \frac{h\nu}{c}\vec{n} - \frac{h\nu'}{c}\vec{n}'\right)^* (\vec{\boldsymbol{\alpha}}\vec{e})\, u^l\left(p - \frac{h\nu'}{c}\vec{n}'\right) u^l\left(\vec{p} - \frac{h\nu'}{c}\vec{n}'\right)^* (\vec{\boldsymbol{\alpha}}\vec{e}')\, v^k(\vec{p})}{c\,\varepsilon^l\left(\vec{p} - \frac{h\nu'}{c}\vec{n}'\right) + h\nu' - c\,\varepsilon_0}$$

$\vec{e}$, $\vec{e}'$ Richtung des elektrischen Vektors für das einfallende bzw. das gestreute Quant.

Zu mitteln ist über sämtliche Polarisationsrichtungen der einfallenden und gestreuten Strahlung.

[1]) J. WALLER, ZS. f. Phys. **61**, 837, 1930.

Für die Funktionaldeterminante findet man:

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon' - (\vec{p}\,\vec{n}')} = \frac{\nu'}{\nu}\,\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{F},$$

also

$$Q_{p,\,\Omega} = e^4\,\frac{\nu'^2}{\nu^2}\,\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}\,\frac{1}{F}\sum_{k,k'=1,2}\overline{|B^{k'k}|^2}\,d\vec{p}\,d\,\Omega.$$

An Stelle der Streuung pro Winkelintervall wollen wir die Streuung pro $d\nu'$-Intervall betrachten. Ist ϑ der Winkel zwischen $\vec{n}$ und $\vec{n}'$, so folgt aus (2) unter Vernachlässigung höherer Glieder in $m\,c^2/h\,\nu$ (der Unterschied zwischen F und F' ist von gleicher Grössenordnung wie sin ϑ, also $\sim \sqrt{F\cdot m\,c^2/h\,\nu}$):

$$d\cos\vartheta = \frac{\varepsilon_0 F}{h\,\nu'/c}\,\frac{1}{\nu'}\,d\,\nu'.$$

Nach Integration über den Azimut (es wird sich herausstellen, dass in der von uns betrachteten Näherung $\overline{\Sigma/B^{k'k}/^2}$ nicht vom Azimut abhängt) kommt also:

$$Q_{\nu',\,p} = \frac{1}{\nu^2}\,2\,\pi\,e^4\,\frac{c\,\varepsilon'}{h}\sum\overline{|B^{k'k}|^2}\,d\,\vec{p}\,d\,\nu'. \tag{4}$$

§ 3. Summation über die Zwischenzustände.

Die in $B^{k'k}$ auftretenden Summationen über l lassen sich in analoger Weise wie bei Waller ausführen. Es sei

$$q^l = \frac{u^l\left(\vec{p} + \frac{h\,\nu}{c}\,\vec{n}\right)^*(\vec{\alpha}\,\vec{e})\,v^{(k)}(\vec{p})}{c\,\varepsilon^l\left(\vec{p} + \frac{h\,\nu}{c}\,\vec{n}\right) - h\,\nu - c\,\varepsilon_0}.$$

Dann ist

$$\sum_l\left\{c\,\varepsilon^l\left(\vec{p} + \frac{h\,\nu}{c}\,\vec{n}\right) - h\,\nu - c\,\varepsilon_0\right\}u^l\left(\vec{p} + \frac{h\,\nu}{c}\,\vec{n}\right)q^l = (\vec{\alpha}\,\vec{e})\,v^{(h)}(\vec{p})$$

oder, weil $u^l\left(\vec{p} + \frac{h\,\nu}{c}\,\vec{n}\right)$ die zur Energie $c\,\varepsilon^l\left(\vec{p} + \frac{h\,\nu}{c}\,\vec{n}\right)$ gehörige Lösung der Dirac-Gleichung ist:

$$\left\{c\left(\vec{p} + \frac{h\,\nu}{c}\,\vec{n}\right)\vec{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta}\,m\,c^2 - h\,\nu - c\,\varepsilon_0\right\}\sum_l u^l\left(\vec{p} + \frac{h\,\nu}{c}\,\vec{n}\right)q^l = (\vec{\alpha}\,\vec{e})\,v^k(\vec{p}).$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit

$$c\left(\vec{p} + \frac{h\nu}{c}\vec{n}\right)\vec{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta}\, m c^2 + h\nu + c\,\varepsilon_0,$$

so kommt

$$[-(h\nu + c\,\varepsilon_0)^2 + m^2 c^4 + c^2 p^2 + (h\nu)^2 + 2\,h\nu\, c\,(\vec{p}\,\vec{n})] \sum_l u^l\left(\vec{p} + \frac{h\nu}{c}\vec{n}\right) q^l =$$

$$= [(c\,\vec{p} + h\nu\,\vec{n})\,\vec{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta}\, m\, c^2 + h\nu + c\,\varepsilon_0]\,(\vec{\boldsymbol{\alpha}}\,\vec{e})\, v^k(\vec{p}),$$

oder

$$\left[-c^2\,\delta_0 - 2\,h\nu\, c\,\varepsilon_0\left\{1 - \frac{(\vec{p}\,\vec{n})}{\varepsilon_0}\right\}\right] \sum_l u^l\left(\vec{p} + \frac{h\nu}{c}\vec{n}\right) q^l =$$

$$= \left[h\nu\,(\vec{\boldsymbol{\alpha}}\,\vec{e}) + h\nu\,\vec{\boldsymbol{\sigma}}\,[\vec{n}\times\vec{e}] + c\,(\vec{\boldsymbol{\alpha}}\,\vec{e})\left\{\varepsilon_0 - \boldsymbol{\beta}\, m\, c - (\vec{p}\,\vec{\boldsymbol{\alpha}})\right\} + 2\,c\,(\vec{p}\,\vec{e})\right] v^k(\vec{p}). \quad (5)$$

Hier ist $\vec{\boldsymbol{\sigma}}$ der Vektor mit Komponenten $\sigma_1 = \boldsymbol{\alpha}_2\,\boldsymbol{\alpha}_3$ usw. Es gilt für zwei beliebige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$(\vec{\boldsymbol{\alpha}}\,\vec{a})\,(\vec{\boldsymbol{\alpha}}\,\vec{b}) = \vec{\boldsymbol{\sigma}}\,[\vec{a}\times\vec{b}] + (\vec{a}\,\vec{b}).$$

Ist weiter $\gamma^5 = \boldsymbol{\alpha}_1\,\boldsymbol{\alpha}_2\,\boldsymbol{\alpha}_3$ so ist $\vec{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\gamma}_5\,\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ und deshalb $(\boldsymbol{\gamma}_5\,\alpha_i = \boldsymbol{\alpha}_i\,\gamma_5)$

$$(\vec{\boldsymbol{\alpha}}\,\vec{a})\,(\vec{\boldsymbol{\sigma}}\,\vec{b}) = (\vec{a}\,\vec{b})\,\boldsymbol{\gamma}_5 + [\vec{b}\times\vec{a}]\,\vec{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Unter Benutzung dieser Beziehungen findet man, wenn man noch die Bezeichnungen

$$\vec{m} = [\vec{n}\times\vec{e}]$$

$$\Lambda = c\,\varepsilon_0 - \boldsymbol{\beta}\, m\, c^2 - c\,(\vec{p}\,\vec{\boldsymbol{\alpha}})$$

einführt, durch Multiplikation von (5) mit

$$u^{k'}\left(\vec{p} + \frac{h\nu}{c}\vec{n} - \frac{h\nu'}{c}\vec{n}'\right)(\vec{\boldsymbol{\alpha}}\,\vec{e}'),$$

$$\sum_l \frac{u^{k'}\left(\vec{p} + \frac{h\nu}{c}\vec{n} - \frac{h\nu'}{c}\vec{n}'\right)(\vec{\boldsymbol{\alpha}}\,\vec{e}')\,u^l\left(\vec{p} + \frac{h\nu}{c}\vec{n}\right) u^l\left(\vec{p} + \frac{h\nu}{c}\vec{n}\right)^* (\vec{\boldsymbol{\alpha}}\,\vec{e})\, v^k(\vec{p})}{c\,\varepsilon^l\left(\vec{p} + \frac{h\nu}{c}\vec{n}\right) - h\nu - c\,\varepsilon_0} =$$

$$= -u^{k'}\cdot\left[\frac{h\nu\left\{(\vec{e}\,\vec{e}') + \vec{\sigma}\,[\vec{e}'\times\vec{e}] + \vec{\boldsymbol{\alpha}}\,[\vec{m}\times\vec{e}'] + \boldsymbol{\gamma}_5(\vec{e}'\,\vec{m})\right\} + \left\{(e\,e') + \sigma\,[e\times e']\right\}\Lambda + 2(\vec{\boldsymbol{\alpha}}\,\vec{e}')\,c\,(\vec{p}\,\vec{e})}{2\,c\,\varepsilon_0\, h\nu\, F}\right] v^k$$

In ähnlicher Weise wird der zweite Summand in $B^{k'k}$ berechnet. Man findet schliesslich:

$$B^{k'k} = -\frac{1}{2\,\varepsilon_0\, c}\, u^{k'}(\vec{p}\,')^*\, \boldsymbol{A}\, v^k(\vec{p})$$

mit

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{F}\left[(\vec{e}\,\vec{e}\,') + \vec{\boldsymbol{\alpha}}\,[\vec{m} \times \vec{e}\,'] + \vec{\boldsymbol{\sigma}}\,[e' \times e] + \boldsymbol{\gamma}_5(\vec{e}\,'\,\vec{m})\right] +$$

$$+ \frac{1}{F'}\left[(\vec{e}\,'\vec{e}) + \vec{\boldsymbol{\alpha}}\,[\vec{m}\,' \times \vec{e}\,] + \vec{\boldsymbol{\sigma}}\,[\vec{e} \times \vec{e}\,] + \boldsymbol{\gamma}_5(\vec{e}\,\vec{m}\,')\right] +$$

$$+ \frac{1}{h\,\nu}\left[\left(\frac{1}{F} - \frac{1}{F'}\right)\{(e\,e') + \vec{\boldsymbol{\sigma}}[\vec{e} \times \vec{e}\,']\}\, \boldsymbol{A} + \frac{2\,c}{F}(\vec{p}\,\vec{e}\,)(\vec{e}\,'\vec{\boldsymbol{\alpha}}) - \frac{2\,c}{F'}(\vec{p}\,\vec{e}\,')(\vec{e}\,\vec{\boldsymbol{\alpha}})\right].$$

§ 4. Summation über k, k'.

Zur Bestimmung von

$$\sum_{k'k} |B^{k'k}|^2$$

verwenden wir eine von Dirac[1]) angegebene Methode:

$$\sum_{k',\,k=1,\,2} |B^{k'k}|^2 = \frac{1}{4\,c^2\,\varepsilon_0^2} \sum_{k',\,k=1,\,2} |u^{k'*}\, A\, v^k|^2 =$$

$$\frac{1}{4\,c^2\,\varepsilon_0^2} \sum_{k',\,k=1,\,2} (u_\varrho^{k'*}\, B_{\varrho\sigma}\, v_\sigma^k)\,(u_\lambda^{k'}\, B^{*}_{\lambda\mu}\, v_\mu^k) =$$

$$\frac{1}{4\,c^2\,\varepsilon_0^2} \left(\sum u_\lambda^{k'}\, u_\varrho^{k'*}\right) A_{\varrho\sigma} \left(\sum v_\sigma^k\, v_\mu^{k*}\right) A^{\dagger}_{\mu,\lambda}$$

(über zweimal vorkommende griechische Indizes wird summiert). $A^\dagger$ ist die zu A konjugiert transponierte Matrix. Man erhält sie auch, indem man das Vorzeichen von $\vec{\boldsymbol{\sigma}}$ und γ_5 umkehrt und die Reihenfolge von A und $\{(\vec{e}\,\vec{e}\,') + \sigma[\vec{e}\,' \times \vec{e}\,]\}$ verwechselt. Schreiben wir

$$\sum_{k'=1,\,2} u_\lambda^{k'}\, u_\varrho^{k'*} = \frac{1}{2\,\varepsilon'}\, U_{\lambda\varrho} \qquad \sum_{k=1,\,2} v_\sigma^k\, v_\mu^k = V_{\sigma\mu}\,,$$

so folgt:

$$\sum |B^{k'k}|^2 = \frac{1}{4\,c^2\,\varepsilon_0^2}\, \frac{1}{2\,\varepsilon'}\, Sp\,(\boldsymbol{U\,A\,V\,A}^\dagger)$$

$$Q_{\nu'} = \frac{1}{h\,\nu^2}\, 2\,\pi\, e^4\, \frac{1}{2\,c\,\varepsilon_0^2} \int \overline{(\tfrac{1}{4}\, Sp\, \boldsymbol{U\,A\,V\,A}^\dagger)}\, d\,\vec{p}\,.$$

---

[1]) P. A. M. Dirac. Proc. Cambr. Phil. Soc. **26**, 361, 1930.

Zu integrieren ist dabei über den durch die Bedingung (3) beschriebenen Teil des p-Raumes. Die Matrix $\boldsymbol{U}$ lässt sich sofort bestimmen. Es ist

$$\frac{1}{2\,\varepsilon'}\,\boldsymbol{U}\,u^l(\vec{p}\,') = \sum_{k=1,2} u^k_\lambda\, u^{k*}_\varrho\, u^l_\varrho = \begin{cases} u_l & \text{für } l = 1, 2 \quad \varepsilon_l > 0 \\ 0 & \text{für } l = 3, 4 \quad \varepsilon_l < 0. \end{cases}$$

Durch diese Eigenschaft wird $\boldsymbol{U}$ eindeutig bestimmt. Man sieht aber sofort, dass

$$\boldsymbol{U} = \varepsilon' + \vec{\boldsymbol{\alpha}}\,\vec{p}\,' + \boldsymbol{\beta}\, m\, c$$

diese Eigenschaft hat.

Zur Bestimmung von $\boldsymbol{V}$ werden wir die expliziten Ausdrücke für die $v^k_\varrho(\vec{p})$ verwenden.

§ 5. Die Wellenfunktionen im Impulsraum: Bestimmung von V.

Wir wählen für $\boldsymbol{\beta}$, $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ die folgenden Matrizen:

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha_1 = \begin{pmatrix} & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} & & 0 & -i \\ & & i & 0 \\ 0 & -i & & \\ i & 0 & & \end{pmatrix} \qquad \alpha_3 = \begin{pmatrix} & & 1 & 0 \\ & & 0 & -1 \\ 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \end{pmatrix}$$

Das elektrostatische Potential ist $Z\,e^2/z = hc\,\alpha/r$.
Es sei $\lambda = \sqrt{1-\alpha^2}$, $a = \alpha\, m\, c/h$. Die Energie im Grundzustand ist $\lambda\, mc^2$. Die zwei zu dieser Energie gehörigen Lösungen lauten (wie man durch einsetzen in die Gleichungen leicht verifizieren kann) abgesehen von einem Normierungsfaktor:

$$\psi_1 = r^{\lambda-1}\, e^{-ar} \qquad\qquad \psi_1 = 0$$

$$\psi_2 = 0 \qquad\qquad \psi_2 = r^{\lambda-1}\, e^{-ar}$$

$$\psi_3 = \frac{z}{r}\,\frac{i\,\alpha}{1+\lambda}\, r^{\lambda-1}\, e^{-ar} \qquad\qquad \psi_3 = \frac{x-i\,y}{r}\,\frac{i\,\alpha}{1+\lambda}\, r^{\lambda-1}\, e^{-ar}$$

$$\psi_4 = \frac{x+i\,y}{r}\cdot\frac{i\,\alpha}{1+\lambda}\, r^{\lambda-1}\, e^{-ar} \qquad\qquad \psi_4 = -\frac{z}{r}\,\frac{i\,\alpha}{1+\lambda}\, r^{\lambda-1}\, e^{-ar}.$$

Die Lösungen im Impulsraum werden daraus erhalten durch Berechnung der Integrale

$$v_\varrho(p) = \int \psi_\varrho(\vec{x})\, e^{-i(\vec{p}\,\vec{x})/\hbar}\, d\vec{x}$$

Man findet:

$$\begin{array}{ll} v_1 = V & v_1 = 0 \\ v_2 = 0 & v_2 = V \\ v_3 = \dfrac{p_z}{m\,c}\,W & v_3 = \dfrac{p_x - i\,p_y}{m\,c}\,W \\ v_4 = \dfrac{p_x + i\,p_y}{m\,c}\,W & v_4 = -\dfrac{p_z}{m\,c}\,W \end{array}$$

mit

$$V = N\cdot\Gamma(\lambda+1)\,\frac{i}{p/\alpha\,m\,c}\left\{\frac{1}{(1+i\,p/\alpha\,m\,c)^{\lambda+1}} - \frac{1}{(1-i\,p/\alpha\,m\,c)^{\lambda+1}}\right\}$$

$$W = N\cdot\Gamma(\lambda)\,\frac{1}{(p/\alpha\,m\,c)^2}\,\frac{i}{p/\alpha\,m\,c}\left\{\left[\frac{1}{(1+i\,p/\alpha\,m\,c)^{\lambda}} - \frac{1}{(1-i\,p/\alpha\,m\,c)^{\lambda}}\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{\lambda}{\lambda+1}\left[\frac{1}{(1+i\,p/\alpha\,m\,c)^{\lambda+1}} - \frac{1}{(1-i\,p/\alpha\,m\,c)^{\lambda+1}}\right]\right\}.$$

Der Normierungsfaktor ist so zu bestimmen, dass

$$\int \sum_\varrho |\,v_\varrho|^2\, d\vec{p} = \int \left(V^2 + \frac{p^2}{m^2\,c^2}\,W^2\right) d\vec{p} = 1\,.$$

Für leichte Kerne ist (bis auf Glieder von der Ordnung α^2)

$$2\,W = V = N'\,\frac{1}{(1+p^2/\alpha^2\,m^2\,c^2)^2} \tag{6}$$

$$N'^{-2} = 4\pi\int_0^\infty \frac{1+p^2/4\,m^2\,c^2}{(1+p^2/\alpha^2\,m^2\,c^2)^4}\,p^2\,d\,p =$$

$$= \frac{1}{8}\,\pi^2\,\alpha^3\,m^3\,c^3\,(1+O\,(\alpha^2))\,. \tag{6'}$$

Für die Matrix $\boldsymbol{V}$ finden wir:

$$\boldsymbol{V} = \begin{vmatrix} V^2 & 0 & \frac{p_x}{m\,c}\,V\,W & \frac{p_x - i\,p_y}{m\,c}\,V\,W \\ 0 & V^2 & \frac{p_x + i\,p_y}{m\,c}\,V\,W & -\frac{p_z}{m\,c}\,V\,W \\ \frac{p_z}{m\,c}\,V\,W & \frac{p_x + p_y}{m\,c}\,V\,W & \frac{p^2}{m^2\,c^2}\,W^2 & 0 \\ \frac{p_x - i\,p_y}{m\,c}\,V\,W & -\frac{p_z}{m\,c}\,V\,W & 0 & \frac{p^2}{m^2\,c^2}\,W^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(V^2 + \frac{p^2}{m^2\,c^2}\,W^2\right)\mathbf{1} + \frac{1}{2}\left(V^2 - \frac{p^2}{m^2\,c^2}\,W^2\right)\boldsymbol{\beta} + \frac{1}{m\,c}\,(\vec{p}\,\vec{\boldsymbol{\alpha}})\,V\,W.$$

Abkürzend schreiben wir

$$\boldsymbol{V} = a + b\,(\vec{\boldsymbol{\alpha}}\,\vec{p}) + d\,\boldsymbol{\beta}.$$

§ 6. Bestimmung der Spur.

Bei der Berechnung von $\int d\,\vec{p}\;S\,p\;(\boldsymbol{U\,A\,V\,A}^\dagger)$ wollen wir sämtliche Glieder, die bei wachsenden $h\nu$ gegen O gehen vernachlässigen. Es ist zweckmässig bei den Fehlerabschätzungen den p-Raum in zwei Gebiete zu zerlegen. Im Gebiet I sei $F > g$, wo g eine kleine, von ν unabhängige Zahl ist. In unserer Annäherung ist das identisch mit $p_z < \varepsilon_0\,(1 - g)$ (wir wählen die z Richtung $\|\,\vec{n}$). Im Gebiet II wollen wir anstatt $p_x, p_y, p_z,, p_x, p_y, F$ als Variablen einführen. Mit hinreichender Genauigkeit ist $d\,p_x\,d\,p_y\;d\,p_z = -\,\varepsilon_0\,d\,F\;d\,p_x\;d\,p_y$. F läuft dabei von g bis $q.\,m\,c^2/h\,\nu$. Streng genommen hängt die Zahl q noch von p_x, p_y ab, für die in Betracht kommenden p_x, p_y ist sie aber immer von der Grössenordnung 1. Wir wählen weiter g so klein, dass im Gebiet II in den Funktionen $a\,(\vec{p})$, $b\,(\vec{p})$, $d\,(\vec{p})$, $p_z = \varepsilon_0$ gesetzt werden darf. Wir wollen zunächst zeigen, dass im Limes $h\,\nu/m\,c^2 \longrightarrow \infty$ der Fehler, den wir machen, wenn wir in $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{A}^\dagger$ die Terme mit $1/h\,\nu$ weglassen, gleich $O\,(1)\;m\,c\,\alpha^5$ ist. Es ist

$$|\vec{n} - \vec{n}'| \sim \sin\delta \sim \sqrt{F\,\frac{m\,c^2}{h\,\nu}}$$

$$[\vec{e} \times \vec{e}\,'] = -(\vec{e}\,\vec{e}\,')\,\vec{n} + O\,(1)\,\sqrt{F\,\frac{m\,c^2}{h\,\nu}}$$

$$[\vec{m} \times \vec{e}\,'] = -(\vec{m}\,\vec{e}\,')\,\vec{n} + O\,(1)\,\sqrt{F\,\frac{m\,c^2}{h\,\nu}}$$

Wir können deshalb schreiben:

$$\boldsymbol{UAVA}^{\dagger}=\left[\left(\frac{h\nu}{c}-\frac{h\nu'}{c}\right)\left(1+(\vec{\boldsymbol{\alpha}}\,\vec{n})\right)+O\,(1)\sqrt{F\,h\,\nu\cdot m\,c^2}+\boldsymbol{\beta}\,m\,c\right]\cdot$$

$$\left[(1-\vec{\boldsymbol{\alpha}}\,\vec{n})\left\{\frac{1}{F}\left[(\vec{e}\,\vec{e}\,')+\boldsymbol{\gamma}_5(\vec{e}\,'\vec{m})\right]+\frac{1}{F'}\left[(\vec{e}\,\vec{e}\,')+\gamma_5(\vec{e}\,\vec{m}\,')\right]\right\}+\right.$$

$$\left.+\,O\,(1)\sqrt{F\cdot\frac{m\,c^2}{h\,\nu}+\frac{1}{h\,\nu}(\cdots)}\right]\cdot\left[a+b\,(\vec{\boldsymbol{\alpha}}\,\vec{p})+d\,\boldsymbol{\beta}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[(1-\vec{\boldsymbol{\alpha}}\,\vec{n})\left\{\frac{1}{F}\left[(\vec{e}\,\vec{e}\,')-\boldsymbol{\gamma}_5(\vec{e}\,'\vec{m})\right]+\frac{1}{F'}\left[(\vec{e}\,\vec{e}\,')-\boldsymbol{\gamma}_5(\vec{e}\,\vec{m}\,')\right]\right\}+\right.$$

$$\left.+\,O\,(1)\sqrt{F\cdot\frac{m\,c^2}{h\,\nu}+\frac{1}{h\,\nu}(\cdots)}\right].$$

Die mit $(\ldots.)$ bezeichneten Ausdrücke sind höchstens $O\,(1)$. mc/F. Man sieht sofort, dass sie im Gebiet I keinen Beitrag zur Spur geben können: die einzigen sie enthaltenden Glieder die keine $\sqrt{\nu}$ oder ν im Nenner haben, verschwinden wegen

$$\left(1-(\vec{\boldsymbol{\alpha}}\,\vec{n})\right)\left(1+(\vec{\boldsymbol{\alpha}}\,\vec{n})\right)=0\,.$$

Was das Gebiet II anbetrifft ist zu beachten, dass Ausdrücke von der Grössenordnung (man beachte dass $F/F'=O\,(1)$)

$$f\,(p)\,\frac{c}{h\,\nu}\,(m\,c)^2\,\frac{1}{F^2}\qquad\text{und}\qquad f\,(p)\sqrt{\frac{m\,c^2}{h\,\nu}}\cdot m\,c\,\frac{1}{F'^{3/2}}$$

vorkommen können; $f\,(p)$ ist dabei irgendeine Kombination von $a\,(p)$, $b\,(p)$, $d\,(p)$. Bei Integration ergibt das

$$O\,(1)\,(m\,c)^2\left[\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty}d\,p_x\,d\,p_y\,f\,(p)\right]_{p_z=\varepsilon_0}.$$

Man wird für das Integral die richtige Grössenordnung finden, wenn man annimmt, dass $f\,(p)=V^2$. Unter Benutzung der Formeln (6) und (6′) gelangt man dann zum oben formulierten Ergebnis.

Es bleibt für $\boldsymbol{A}$ ein Ausdruck von der Form:

$$\boldsymbol{A}=A_0+\vec{A}_1\,\vec{\boldsymbol{\alpha}}+\vec{A}_2\,\vec{\boldsymbol{\sigma}}+A_3\,\boldsymbol{\gamma}_5$$

mit

$$A_0 = \left(\frac{1}{F} - \frac{1}{F'}\right)(\vec{e}\,\vec{e}\,')$$

$$\vec{A}_1 = \frac{1}{F}\,[\vec{m} \times \vec{e}\,'] + \frac{1}{F'}\,[\vec{m}' \times \vec{e}]$$

$$\vec{A}_2 = \left(\frac{1}{F} - \frac{1}{F'}\right)[\vec{e}\,' \times \vec{e}]$$

$$A_3 = \frac{1}{F}\,(\vec{e}\,'\vec{m}) + \frac{1}{F'}\,(\vec{e}\,\vec{m}').$$

Spur $\boldsymbol{UAVA}^\dagger$ lässt sich nun verhältnismässig leicht berechnen, wenn man beachtet, dass die Spur der Diracmatrizen und ihrer Produkte verschwindet. Schreiben wir also $\boldsymbol{UAVA}^\dagger$ als Linearkombination der Einheitsmatrix und der Diracmatrizen und ihrer Produkte, so ist die Spur gleich (4 × Koeffizient der Einheit). Wir finden für diesen Koeffizienten:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\,Sp\,\boldsymbol{UAVA}^\dagger = {} & A_0^2\,\{a\,\varepsilon' + b\,\vec{p}\,'\vec{p} + d\,m\,c\} + A_1^2\,\{a\,\varepsilon' - b\,\vec{p}\,'\vec{p} - d\,m\,c\} + \\ & + A_2^2\,\{a\,\varepsilon' - b\,\vec{p}\,'\vec{p} + d\,m\,c\} + A_3^2\,\{a\,\varepsilon' + b\,\vec{p}\,'\vec{p} - d\,m\,c\} + \\ & + 2\,b\,(\vec{p}\,\vec{A}_2)\,(\vec{p}\,'\vec{A}_2) + 2\,b\,(\vec{p}\,\vec{A}_1)\,(\vec{p}\,'\vec{A}_1) + \\ & + 2\,A_3\,\{b\,\varepsilon'\,(\vec{p}\,\vec{A}_2) + a\,(\vec{p}\,'\,\vec{A}_2)\} + 2\,A_0\,\{b\,\varepsilon'\,(\vec{p}\,\vec{A}_1) + a\,(\vec{p}\,'\,\vec{A}_1)\} + \\ & + b\,(-2\,A_0\,\vec{A}_2 + 2\,A_3\,\vec{A}_1)\,[\vec{p} \times \vec{p}\,'] + 2\,[\vec{A}_2 \times \vec{A}_1]\,\{\varepsilon'\,b\,\vec{p} - a\,\vec{p}\,'\}. \qquad (7)\end{aligned}$$

§ 7. Mittelung über die Polarisationen.

Die Mittelung über die Polarisationen liefert (es ist: $\vec{\delta p} = \vec{p}\,' - \vec{p}$, $\delta\,\varepsilon = \varepsilon' - \varepsilon_0$):

$$\overline{A_0^2} = \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{F'}\right)^2 \frac{1}{4}\,(1 + \cos^2\vartheta)\,,$$

$$\overline{A_1^2} = \left(\frac{1}{F^2} + \frac{1}{F'^2}\right)\left\{1 - \frac{1}{4}\,(1 + \cos^2\vartheta)\right\} + \frac{1}{F\,F'}\,\cos\vartheta$$

$$\overline{A_2^2} = \left(\frac{1}{F} - \frac{1}{F'}\right)^2\left\{1 - \frac{1}{4}\,(1 + \cos^2\vartheta)\right\},$$

$$\overline{A_3^2} = \left(\frac{1}{F^2} + \frac{1}{F'^2}\right)\frac{1}{4}\,(1 + \cos^2\vartheta) - \frac{1}{F\,F'}\,\cos\vartheta$$

$$\overline{2\,(\vec{p}\,\vec{A}_2)^2} = \left(\frac{1}{F} - \frac{1}{F'}\right)^2 \left\{\frac{1}{2}\,p^2 \sin^2\vartheta + (\vec{p}\,\vec{n}')\,(\vec{p}\,\vec{n})\cos\vartheta\right\}$$

$$\overline{2\,(\vec{p}\,\vec{A}_2)\,(\delta\,\vec{p}\,\vec{A}_2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{F} - \frac{1}{F'}\right)^2 \left[\frac{h\,\nu}{c}\{(\vec{p}\,\vec{n}) + (\vec{p}\,\vec{n}')\cos\vartheta\}\right.$$
$$\left. - \frac{h\,\nu'}{c}\{(p\,n') + (p\,n)\cos\vartheta\}\right]$$

$$\overline{2\,(\vec{p}\,\vec{A}_1)^2} = \left(\frac{1}{F^2} + \frac{1}{F'^2}\right)\left\{\frac{1}{2}\,p^2 \sin^2\vartheta + (\vec{p}\,\vec{n}')\,(\vec{p}\,\vec{n})\cos\vartheta\right\}$$
$$+ \frac{2}{F\,F'}\,(\vec{p}\,\vec{n})\,(\vec{p}\,\vec{n}')$$

$$\overline{2\,(\vec{p}\,\vec{A}_1)\,(\delta\,\vec{p}\,\vec{A}_1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{F^2} + \frac{1}{F'^2}\right)\left[\frac{h\,\nu}{c}\{(\vec{p}\,\vec{n}) + (\vec{p}\,\vec{n}')\cos\vartheta\}\right.$$
$$\left. - \frac{h\,\nu'}{c}\{(\vec{p}\,\vec{n}') + (\vec{p}\,\vec{n})\cos\vartheta\}\right] +$$
$$+ \frac{1}{F\,F'}\left[\frac{h\,\nu}{c}\{(\vec{p}\,\vec{n}') + (\vec{p}\,\vec{n})\cos\vartheta\} - \frac{h\,\nu'}{c}\{(\vec{p}\,\vec{n}) + (\vec{p}\,\vec{n}')\cos\vartheta\}\right]$$

$$\overline{2\,A_3\,(\vec{p}\,\vec{A}_2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{F} - \frac{1}{F'}\right)\left[-\frac{1}{F}\{(\vec{p}\,\vec{n}) + (\vec{p}\,\vec{n}')\cos\vartheta\}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{F}\{(\vec{p}\,\vec{n}') + (\vec{p}\,\vec{n})\cos\vartheta\}\right]$$

$$\overline{2\,A_3\,(\delta\,\vec{p}\,\vec{A}_2)} = \left(\frac{1}{F} - \frac{1}{F'}\right)\left[\frac{h\,\nu}{c}\left\{-\frac{1}{F}\,\frac{1}{2}\,(1 + \cos^2\vartheta) + \frac{1}{F'}\cos\vartheta\right\}\right.$$
$$\left. + \frac{h\,\nu'}{c}\left\{\frac{1}{F}\cos\vartheta - \frac{1}{F'}\,\frac{1}{2}\,(1 + \cos^2\vartheta)\right\}\right]$$

$$\overline{2\,A_0\,(\vec{p}\,\vec{A}_1)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{F} + \frac{1}{F'}\right)\left[\frac{1}{F}\{(\vec{p}\,\vec{n}) + (\vec{p}\,\vec{n}')\cos\vartheta\}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{F'}\{(\vec{p}\,\vec{n}') + (\vec{p}\,\vec{n})\cos\delta\}\right]$$

$$\overline{2\,A_0\,(\delta\,\vec{p}\,\vec{A}_1)} = -\left(\frac{1}{F} + \frac{1}{F'}\right)\left[\frac{h\,\nu}{c}\left\{\frac{1}{F}\,\frac{1}{2}\,(1 + \cos^2\vartheta) + \frac{1}{F'}\cos\vartheta\right\}\right.$$
$$\left. - \frac{h\,\nu'}{c}\left\{\frac{1}{F}\cos\vartheta + \frac{1}{F'}\,\frac{1}{2}\,1 + \cos^2\vartheta)\right\}\right]$$

$$\overline{-2\,A_0\,(\vec{A}_2[\vec{p}\times\overrightarrow{\delta p}])} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{F^2}-\frac{1}{F'^2}\right)\cos\vartheta\left[\frac{h\nu}{c}\{(\vec{p}\,\vec{n}'-\cos\vartheta(\vec{p}\,\vec{n})\}\right.$$
$$\left.+\frac{h\nu'}{c}\{(\vec{p}\,\vec{n})-(\vec{p}\,\vec{n}')\cos\vartheta\}\right]$$

$$\overline{2\,A_3(\vec{A}_1[\vec{p}\times\overrightarrow{\delta p}])} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{F^2}-\frac{1}{F'^2}\right)\cos\vartheta\left[\frac{h\nu}{c}\{(\vec{p}\,\vec{n}')-\cos\vartheta\,(\vec{p}\,\vec{n})\}\right.$$
$$\left.+\frac{h\nu'}{c}\{(\vec{p}\,\vec{n})-(\vec{p}\,\vec{n}')\cos\vartheta\}\right]$$

$$\overline{2\,(\vec{p}\,[\vec{A}_2\times\vec{A}_1])} = \left(\frac{1}{F}-\frac{1}{F'}\right)\left[-\frac{1}{F}\{(\vec{p}\,\vec{n})-(\vec{p}\,\vec{n}')\cos\vartheta\}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{F'}\{(\vec{p}\,\vec{n}')-(\vec{p}\,\vec{n})\cos\vartheta\}\right]$$

$$\overline{-2\,(\overrightarrow{\delta p}\,[\vec{A}_2\times\vec{A}_1])} = \left(\frac{1}{F}-\frac{1}{F'}\right)\left(\frac{h\nu}{c}\,\frac{1}{F}+\frac{h\nu'}{c}\,\frac{1}{F'}\right)\sin^2\vartheta\,.$$

Bei der Auswertung von (7) dürfen wir folgende Vernachlässigungen machen:

a) in den Gliedern ohne $\delta\,\varepsilon$ oder $\delta\,p$ setzen wir $\cos\vartheta = 1$. Der Fehler wird

$$< O\,(1)\cdot F\cdot\frac{m\,c^2}{h\,\nu}\cdot\frac{1}{F^2}\cdot m\,c\,f\,(p)\,,$$

verschwindet also sowohl in I als (nach Integration) in II.

b) in den Gliedern mit $\delta\,\varepsilon$ oder $\delta\,p$ setzen wir in Gliedern die $(1-\cos\vartheta)$ als Faktor enthalten $F = F'$, $\vec{n} = \vec{n}'$, $F = 1-(\vec{p}\vec{n})/\varepsilon_0$. Der Fehler ist

$$< O\,(1)\,\frac{h\,\nu}{c}\cdot F\,\frac{m\,c^2}{h\,\nu}\,\frac{1}{F}\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{F'}\right) = O\,(1)\sqrt{\frac{m\,c^2}{h\,\nu}}\cdot\frac{m\,c}{F^{3/2}}\,.$$

Das verschwindet in I und gibt in II einen Beitrag $O\,(1)\;mc\,\alpha^5$. Wir erhalten in dieser Weise:

a) *Glieder ohne* $\delta\,\varepsilon$, $\delta\,p$

$$a\,\varepsilon_0\{\overline{A_0^2+A_1^2+A_2^2+A_3^2}\} = a\,\varepsilon_0\left(\frac{2}{F^2}+\frac{2}{F'^2}\right)$$

$$b\,p^2\{\overline{A_0^2-A_1^2-A_2^2-A_3^2}\} = d\,m\,c\{\overline{A_0^2-A_1^2+A_2^2-A_3^2}\} = 0$$

$$2\,b\,\overline{(\vec{p}\,\vec{A}_2)^2}+2\,b\,\overline{(\vec{p}\,\vec{A}_1)^2} = b\,(\vec{p}\,\vec{n})\,(\vec{p}\,\vec{n}')\left(\frac{2}{F^2}+\frac{2}{F'^2}\right)$$

$$(2\,b\,\varepsilon_0+2\,a)\{\overline{A_3(\vec{p}\,\vec{A}_2)+A_0(\vec{p}\,\vec{A}_1)}\} = -(b\,\varepsilon_0+a)\{(\vec{p}\,\vec{n})+(\vec{p}\,\vec{n}')\}\left(\frac{1}{F^2}+\frac{1}{F'^2}\right)$$

$$(2\,b\,\varepsilon_0-2\,a)\,(\overline{\vec{p}\,[\vec{A}_2\times\vec{A}_1]}) = (\varepsilon_0\,b-a)\,\{(\vec{p}\,\vec{n}')-(\vec{p}\,\vec{n})\}\left(\frac{1}{F^2}-\frac{1}{F'^2}\right).$$

Zusammen:

$$2\,[a-b\,(\vec{p}\,\vec{n})]\left[\frac{\varepsilon_0-(\vec{p}\,\vec{n}')}{F^2}+\frac{\varepsilon_0-(\vec{p}\,\vec{n})}{F'^2}\right]\sim\frac{4\,\varepsilon_0}{F}\,[(a-b\,\varepsilon_0)+b\,\varepsilon_0\,F]. \quad \text{(A)}$$

Der bei dem letzten Übergang gemachte Fehler ist

$$\sim\varepsilon_0\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{F'}\right)\sim\sqrt{\frac{m\,c^2}{h\,\nu}}\,\varepsilon_0\,\frac{1}{F^{3/2}}.$$

b) *Glieder mit* $\delta\,\varepsilon$, $\delta\,p$

$$a\,\delta\,\varepsilon\{\overline{A_0^2+A_1^2+A_2^2+A_3^2}\} = 2\,a\,\delta\,\varepsilon\left(\frac{1}{F^2}+\frac{1}{F'^2}-(1-\cos\vartheta)\frac{1}{F^2}\right)$$

$$b\,\vec{p}\,\delta\,\vec{p}\,\{\overline{A_0^2-A_1^2-A_2^2+A_3^2}\} = -2\,b\,\varepsilon_0\,\delta\,\varepsilon\;\frac{1-F}{F^2}\,(1-\cos\vartheta)$$

$$2\,b\,\overline{(\vec{p}\,\vec{A}_2)\,(\delta\,\vec{p}\,\vec{A}_2)} = \frac{1}{2}\,b\,\delta\,\varepsilon\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{F'}\right)^2\{(\vec{p}\,\vec{n})+(\vec{p}\,\vec{n}')\}$$

$$2\,b\,\overline{(\vec{p}\,\vec{A}_1)\,(\delta\,\vec{p}\,\vec{A}_1)} = \frac{1}{2}\,b\,\delta\,\varepsilon\left(\frac{1}{F}+\frac{1}{F'}\right)^2\{(\vec{p}\,\vec{n})+(\vec{p}\,\vec{n}')\}-$$
$$-2\,b\,(\varepsilon_0\,\delta\,\varepsilon)\,\frac{1-F}{F^2}\,(1-\cos\vartheta)$$

$$2\,b\,\delta\,\varepsilon\,\overline{A_3\,(\vec{p}\,\vec{A}_2)} = -\frac{1}{2}\,b\,\delta\,\varepsilon\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{F'}\right)^2\{(\vec{p}\,\vec{n})+(\vec{p}\,\vec{n}')\}$$

$$2\,a\,\overline{A_3\,(\delta\,\vec{p}\,\vec{A}_2)} = -a\,\delta\,\varepsilon\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{F'}\right)^2$$

$$2\,b\,\delta\,\varepsilon\,\overline{A_0\,(\vec{p}\,\vec{A}_1)} = -\frac{1}{2}\,b\,\delta\,\varepsilon\left(\frac{1}{F}+\frac{1}{F'}\right)^2\{(\vec{p}\,\vec{n})+(\vec{p}\,\vec{n}')\}+$$
$$+2\,b\,\varepsilon_0\,\delta\,\varepsilon\,\frac{1-F}{F^2}\,(1-\cos\vartheta)$$

$$2\,a\,\overline{A_0\,(\delta\,\vec{p}\,\vec{A}_1)} = -a\,\delta\,\varepsilon\left(\frac{1}{F}+\frac{1}{F'}\right)^2+4\,a\,\delta\,\varepsilon\,\frac{1}{F^2}\,(1-\cos\vartheta)$$

$$-2\,b\,A_0\,\overline{(\vec{A}_2\,[\vec{p}\times\delta\,\vec{p}])}+2\,b\,\overline{A_3\,(\vec{A}_1\,[\vec{p}\times\delta\,\vec{p}])} =$$
$$= +b\,\delta\,\varepsilon\left(\frac{1}{F^2}-\frac{1}{F'^2}\right)\{(\vec{p}\,\vec{n})-(\vec{p}\,\vec{n}')\}$$

$$2\,\delta\,\varepsilon\,b\,\overline{(\vec{p}\,[\vec{A}_2\times\vec{A}_1])} = -\delta\,\varepsilon\,b\left(\frac{1}{F^2}-\frac{1}{F'^2}\right)\{(\vec{p}\,\vec{n})-(\vec{p}\,\vec{n}')\}.$$

Zusammen:

$$\{2a - 2b\,\varepsilon_0\,(1-F)\}\,\frac{1}{F^2}\,\delta\,\varepsilon\,(1-\cos\vartheta) \sim$$

$$\sim \{2a - 2b\,\varepsilon_0\,(1-F)\}\,\frac{\varepsilon_0}{F}\left[\frac{\nu}{\nu'} + \frac{\nu'}{\nu} - 2\right]. \tag{B}$$

Wir finden also schliesslich:

$$\frac{1}{4}\int \delta\,\vec{p}\,Sp\,(\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}^\dagger) =$$

$$= \int \frac{2}{F}\,(a - b\,\varepsilon_0 + b\,\varepsilon_0\,F)\,\varepsilon_0\left(\frac{\nu}{\nu'} + \frac{\nu'}{\nu}\right) d\,\vec{p} + O\,(1)\,m\,c\,\alpha^5. \tag{8}$$

§ 8. Diskussion der Endformel.

Aus (8) ergibt sich für den Wirkungsquerschnitt:

$$Q_{\nu'} = \frac{2\,\pi\,e^4}{2\,m\,c^2}\cdot\frac{1}{h\,\nu^2}\left(\frac{\nu'}{\nu} + \frac{\nu}{\nu'}\right).$$

$$\cdot\left[\frac{m\,c}{\varepsilon_0}\int\limits_{-\infty}^{\varepsilon_0 - q\frac{m^2 c^3}{h\,\nu}} d\,p_z \int\!\!\int d\,p_x\,d\,p_y \left\{\frac{2\,(a - b\,\varepsilon_0)}{1 - p_z/\varepsilon_0} + 2\,b\,\varepsilon_0\right\} + O\,(1)\,\alpha^5\right].$$

Entwicklung von $1/(1-p_z/\varepsilon_0)$ ergibt für das Integral:

$$\int\limits_{-\infty}^{\varepsilon_0 - q\frac{m^2 c^3}{h\,\nu}} d\,p_z \int\!\!\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\,p_x\,d\,p_y \left\{\left[2\,a + 2\,(a - b\,\varepsilon_0)\left(\frac{p_z}{\varepsilon_0} + \frac{p_z^2}{\varepsilon_0^2} + \frac{p_z^3}{\varepsilon_0^3} + \frac{p_z^4}{\varepsilon_0^4}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{p_z^5}{\varepsilon_0^5}\,\frac{1}{1 - \frac{p_z}{\varepsilon_0}}\right\}.$$

Bei der Berechnung der Terme in der eckigen Klammer darf man die Integration auch über den ganzen p-Raum erstrecken; wie man leicht zeigt, macht man dabei einen Fehler $\sim \alpha^5$. Das Integral von $2a$ ergibt dann 1, denn $2a$ ist die Dichte im p-Raum. Die Integrale mit p_z und $p_z{}^3$ verschwinden, weil a und b nur von $|p|$ abhängen. Das Glied $p_z{}^4$ gibt einen Beitrag $\sim \alpha^6$, denn $|p_z|$ ist im Mittel $\sim \alpha\,mc$ und

$$2\,(a - b\,\varepsilon_0) = V^2 + \frac{p^2}{m^2\,c^2}\,W^2 - 2\,\frac{\varepsilon_0}{m\,c}\,V\,W \sim \alpha^2.$$

Zur Berechnung von

$$c_4 = \int d\vec{p}\left(V^2 + \frac{p^2}{m^2 c^2} W^2 - 2\frac{\varepsilon_0}{m c} V W\right)\frac{p_z^2}{\varepsilon_0^2}$$

ist es zweckmässig zum Koordinatenraum zurück zu gehen. Es ist

$$\int d\vec{p}\, V^2 p_z^2 = -h^2 \int d\vec{x}\, \psi_1^* \frac{\partial^2}{\partial z^2}\psi_1$$

$$\int d\vec{p}\, V W p_z^2 = \frac{h}{i}\int d\vec{x}\, \psi_3^* \frac{\partial}{\partial z}\psi_1.$$

Es ergibt sich

$$c_4 = \frac{2}{3}\alpha^4.$$

Es bleibt noch das Integral mit

$$\left(\frac{p_z}{\varepsilon_0}\right)^5 \frac{1}{1-p_z}$$

zu untersuchen. Es ist

$$J_5 = \left[\int\limits_{-\infty}^{m c\left(1-q\frac{m c^2}{h \nu}\right)} d p_z \iint\limits_{-\infty}^{\infty} d p_x\, d p_y \frac{1}{4}\frac{p^2}{m^2 c^2} V^2 \left(\frac{p_z}{m c}\right)^5 \frac{1}{1-p_z/m c}\right](1+O(1)\,\alpha^2).$$

Es ergibt sich:

$$J_5 = \log q \frac{h\nu}{m c^2}\cdot\left[\frac{1}{m c}\left\{\iint\limits_{-\infty}^{\infty} d p_x\, d p_y \frac{1}{4}\left(1+\frac{p_x^2+p_y^2}{m^2 c^2}\right)V^2\right\}_{p_z = m c} + O(1)\,\alpha^2\right] + \\ + O(1)\,\alpha^5.$$

Das Integral ist $\frac{1}{\pi}\, m c\, \alpha^5$. Unsere Endformel wird also (wir entwickeln auch $m c/\varepsilon_0 = 1/\sqrt{1-\alpha^2}$ nach Potenzen von α^2).

$$Q_{\nu'} = \frac{2\pi e^4}{2 m c^2}\frac{1}{h\nu^2}\left(\frac{\nu'}{\nu}+\frac{\nu}{\nu'}\right)\left(1+\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{25}{24}\alpha^4+O(1)\,\alpha^5+\frac{\alpha^5}{\pi}\log\frac{h\nu}{m c^2}\{1+O(\alpha^2)\}\right).$$

Das Glied $\frac{1}{2}\alpha^2$ erhält man auch aus den Pauli'schen Rechnungen, wenn man den — durch die Bewegung des Wellenpakets bedingten — Faktor D_0 weglässt. Befremdend ist auf den ersten Anblick das Auftreten des logarithmischen Gliedes, das im Limes

$h\nu/mc^2 \longrightarrow \infty$ sogar alle anderen übertrifft. Es liegt hier eine Art „anomale Dispersion" vor. Für $F = 0$ ist auch

$$\Delta = \varepsilon^1 (\vec{p} + \frac{h\nu}{c} \vec{n}) - \varepsilon_0 - \frac{h\nu}{c} = 0;$$

für p-Werte in der Fläche $F = 0$ ist deshalb eine Absorption des eingestrahlten Quants ohne Emission eines ν'-Quants möglich, weil die Erhaltungssätze für Energie und Impuls dann gleichzeitig erfüllt werden können[1]). Aus den Erhaltungssätzen (§ 1) folgt, dass das Gebiet der p-Werte, die zur Streuung beitragen können, für wachsendes $h\nu$ immer näher an die Fläche $F = 0$ heranrückt. Der in $B^{k'k}$ auftretende Nenner Δ wird also immer grösser, und in dieser Weise entsteht das logarithmische Glied, dessen Auftreten also aufs engste mit der Existenz des Photoeffektes verknüpft ist.

Es muss schliesslich betont werden, dass es keineswegs bewiesen ist, dass die Verwendung ebener Wellen zur Beschreibung der Zustände des kontinuierlichen Spektrums erlaubt ist. So hat man z. B. zu beachten, dass die strengen Wellenfunktionen für sehr grosse Energien, asymptotisch *nicht* $\sim e^{i(\vec{p}\vec{x})/h}$, sondern $\sim \exp\{i(\vec{p}\,\vec{x})/h - i\,\alpha \log z\,(1 - \cos\delta)\; mc/h)\}$ sind, was für schwere Kerne eine erhebliche Korrektion geben könnte. Jedenfalls möchten wir es aber für nicht unplausibel halten, dass ein logarithmisches Glied auch bei einer strengen Rechnung auftreten wird; an dem Vorkommen fast verschwindender Resonanznenner wird sich dabei kaum etwas ändern.

Herrn Prof. Dr. W. Pauli möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für viele Ratschläge bei deren Durchführung herzlichst danken.

Zürich, Physikalisches Institut der E. T. H.

Anmerkung bei der Korrektur. Es lässt sich leicht zeigen, dass diejenige Prozesse, bei welchen das Elektron zu einem Zustand negativer Energie übergeht, im betrachteten Grenzfall nur eine verschwindend kleine Wahrscheinlichkeit besitzen. Man findet für diese Prozesse einen Wirkungsquerschnitt

$$Q^-_{\nu'} < \alpha^5 (mc^2/h\nu)^3\, Q_{\nu'}.$$

---

[1]) Ist $F' = 0$, so kann ein ν'-Quantum emittiert werden ohne Absorption eines ν-Quants; das Elektron geht dabei über zu einem Zustand negativer Energie.

Die diatonische Tonleiter als gesetzmässiges Tonspektrum

von **H. Greinacher.**

(16. VI. 33.)

Zusammenfassung. Die natürliche diatonische Tonleiter lässt sich als gesetzmässiges Tonspektrum darstellen. Aus der Serienformel geht hervor: 1. die besondere Bedeutung des Grundtons und der Quinte, 2. die Zuordnung konjugierter Töne. Diese verlangt, dass die vollständige Tonleiter aus 8 Tönen besteht.

Schon die alten Griechen kannten den Aufbau der diatonischen, d. h. 7-stufigen Tonleiter. Pythagoras zeigte, wie man die Intervallverhältnisse der 7 Töne mathematisch unter einziger Benützung des reinen Oktaven- und Quintenintervalls aufbauen kann. Dieses Pythagoräische System, nach dem die Tonleiter nur aus grossen ganzen Tönen ($^9/_8$) und Pythagoräischen Halbtönen ($^{256}/_{243}$) besteht, ist bis ins 16. Jahrhundert auch das praktisch dominierende gewesen. So bestrickend es durch seinen konsequenten Aufbau und auch durch seine Anlehnung an die Praxis der reinen Quintenstimmung ist, so wenig konnte es den Anforderungen der Modulationsfähigkeit der modernen Musik genügen. Auch der chromatische Ausbau nach demselben Prinzip des Quintenzirkels und unter Benützung der enharmonischen Verwechslung gewisser Töne, d. h. der Zusammenlegung ganz benachbarter Töne, konnte den praktischen Bedürfnissen nicht gerecht werden. Erst die Erfindung der gleichschwebenden Temperatur durch Werckmeister und ihre Einführung durch J. S. Bach schuf das für die moderne Musik geeignete Ausdrucksmittel. Auch die reine oder natürliche Stimmung, die im 16. Jahrhundert durch Zarlino eingeführt wurde, ist schon längst durch die temperierte Stimmung verdrängt. Sie wird aber theoretisch immer von grundlegender Bedeutung bleiben, da sie uns einzig den gesetzmässigen Aufbau der diatonischen Tonleiter und ihr Verhältnis zu der Harmonie und Tonführung in der Musik verstehen lässt.

Die Auswahl der Töne gründet sich hiernach auf die Verwandtschaft derselben mit dem gewählten Grundton, wobei unter dem Grade der Verwandtschaft zweier Töne das Vorhandensein mehr oder weniger zahlreicher gemeinsamer harmonischer Obertöne verstanden ist. So sind in der Durtonleiter mit c als Grundton d e g und h einfach Obertöne von c, die durch Division mit 2, 4, 8 in die Oktave cc_1 hinunterversetzt sind. Auch f und a besitzen