

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 7 (1934)
Heft: [2]: Supplementum 2. La théorie des électrons dans les métaux

Artikel: Fluctuations de courant dans un conducteur
Autor: Brillouin, Léon
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-110412>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Fluctuations de courant dans un conducteur

par **Léon Brillouin** (Paris).

Sommaire. Pour étudier les fluctuations dans un conducteur parcouru par un courant permanent, l'auteur s'appuie sur le fait que la répartition des électrons, dans un tel conducteur, est en fait la répartition la plus probable dans les conditions imposées. On peut donc développer le calcul des fluctuations comme pour un système en équilibre. Une difficulté sérieuse consiste dans la nécessité d'introduire les interactions magnétiques entre électrons, afin de retrouver le rôle exact de la self-induction. Le calcul indique que les fluctuations de courant sont augmentées par le passage d'un courant permanent, ce qui explique de belles expériences de Bernamont.

1. Répartition la plus probable des électrons, si le courant est donné.

Un corps isolé, abandonné à lui-même prend automatiquement la configuration la plus probable, celle qui correspond au nombre de complexions (répartitions microscopiques des particules constituantes) le plus élevé; tout ce qu'on peut observer, ce sont des fluctuations légères autour de cette configuration la plus probable. Cette remarque essentielle, qui est à la base de la mécanique statistique, n'a guère été appliquée jusqu'à présent qu'à des systèmes conservatifs. En fait, la même méthode peut servir à trouver très rapidement la répartition correspondant à un état instable, supposé maintenu artificiellement par l'action constante d'une perturbation extérieure. Je prendrai comme exemple la répartition des électrons dans un métal conducteur, et chercherai la répartition la plus probable qui correspond à un courant total donné. Je retrouverai ainsi une répartition bien connue, que l'on n'obtient ordinairement qu'après d'assez longs calculs, et par une analyse minutieuse des divers mécanismes de dissipation d'énergie (et de quantité de mouvement). Ayant ainsi constaté que la répartition réalisée est la plus probable, il sera possible de calculer les fluctuations, sans avoir besoin de faire intervenir le détail des mécanismes. La même méthode s'appliquerait au calcul de la répartition correspondant à un flux calorifique sans courant électrique; on la transposerait aussi bien aux gaz matériels, pour des problèmes analogues.

Le principe général est le suivant¹⁾: on calcule le nombre P de complexions élémentaires correspondant à une certaine répartition arbitraire; ensuite on cherche la répartition la plus probable, lorsque le nombre total N des électrons est donné ainsi

¹⁾ Voir, p. ex., L. BRILLOUIN, Statistiques quantiques (Presses Univ. Paris, 930), p. 121, éq. 32, 33; p. 135, éq. 16; p. 138, éq. 22.

que l'énergie total U et le courant total J résultant. Pour cela on pose la condition

$$\delta \log P - \alpha \delta N - \beta \delta U - \gamma \delta J = 0. \quad (1)$$

Dans les problèmes classiques, le terme en $\gamma \delta J$ n'existait pas; la seule innovation que je fasse ici consiste à l'introduire. Les coefficients arbitraires α , β , γ seront précisés ensuite. Je poursuivrai plus loin ce calcul, et je montrerai qu'il donne une répartition des électrons, avec courant total J , exactement semblable à celle qu'on obtient par la résolution de l'équation intégrale de F. BLOCH.

La condition (1) nous précise les valeurs des dérivées partielles

$$\frac{\partial \log P_0}{\partial N} = \alpha, \quad \frac{\partial \log P_0}{\partial U} = \beta = \frac{1}{kT}, \quad \frac{\partial \log P_0}{\partial J} = \gamma \quad (2)$$

P_0 est le nombre de complexions correspondant à la répartition la plus probable (1); la température absolue T s'introduit en vertu des définitions

$$S = k \log P \quad \text{et} \quad dS = \frac{dU}{T}. \quad (3)$$

Si l'on pose $\gamma = 0$, la condition (1) se réduit au calcul classique, et fournit la répartition la plus probable, sans courant résultant; lorsque γ n'est pas nul, on obtient une répartition possédant un courant J qui sera proportionnel à γ

$$J = B\gamma \quad (4)$$

Nous fixerons plus loin la valeur de ce coefficient B .

2. Electrons indépendants, sans couplage magnétique.

La théorie ordinaire des électrons dans les métaux traite ces électrons comme des particules indépendantes, et applique des méthodes calquées sur la théorie cinétique des gaz. On néglige donc les répulsions électrostatiques entre électrons; et la théorie du champ self-consistent justifie complètement ce point de vue, tant que l'on n'étudie que la répartition moyenne; dans l'étude des fluctuations, il me semble que les effets électrostatiques réapparaîtraient. On omet aussi les interactions magnétiques entre les électrons, c'est-à-dire tout le mécanisme de la self-induction; là, encore, l'erreur n'est pas grande, tant que l'on ne compare que des répartitions à courant total donné, mais dans l'étude d'états transitoires, et de fluctuations, il sera indispensable de rétablir la théorie sur une base plus solide.

Dans ce paragraphe, je reprendrai rapidement la théorie usuelle, pour montrer comment la méthode esquissée au para-

graphe 1 conduit rapidement à retrouver des résultats connus. Considérons N électrons, que nous répartissons entre divers groupes de cellules d'extension¹⁾ en phase; soit g_i le nombre de cellules d'un des groupes; u_i sera l'énergie partielle d'électrons placés dans ces cellules, et j_i le courant partiel. J'aurai par hypothèse

$$\left. \begin{aligned} N &= \sum_i n_i, & \text{nombre total d'électrons} \\ U &= \sum_i n_i u_i + C^{\text{te}}, & \text{énergie totale} \\ J &= \sum_i n_i j_i, & \text{courant total} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Une certaine répartition n_i correspond, dans la statistique de FERMI, à un nombre de complexions²⁾:

$$P = \sum_i [g_i \log g_i - n_i \log n_i - (g_i - n_i) \log (g_i - n_i)]. \quad (6)$$

Une variation δn_i des nombres n_i donne

$$\delta \log P = \sum_i \delta n_i \log \frac{g_i - n_i}{n_i}$$

de sorte que la condition (1) du § 1 s'écrit

$$\sum_i \delta n_i \left[\log \frac{g_i - n_i}{n_i} - \alpha - \beta u_i - \gamma j_i \right] = 0. \quad (7)$$

Ceci devant être obtenu pour des δn_i arbitraires, les parenthèses doivent être nulles, ce qui nous donne la répartition

$$\frac{n_i}{g_i} = f_i = \frac{1}{\exp \eta + 1}, \quad \eta = \alpha + \beta u_i + \gamma j_i. \quad (8)$$

Appliquons ces formules à des électrons libres; le groupe de cellules g_i sera défini par une valeur p_i , $p_i + dp_i$ de la quantité de mouvement et un angle solide $d\Omega$,

$$g_i = \frac{2V}{h^3} d\Omega p_i^2 dp_i \quad (9)$$

et l'on admettra les valeurs

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \frac{1}{2m} p_i^2, & \text{énergie cinétique d'un électron} \\ j_{ix} &= \frac{e}{ml} p_{ix}, & \text{courant d'un électron} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

¹⁾ Le langage des cellules est commode; en mécanique ondulatoire (méthode du champ-self-consistent) g_i représente le nombre des ondes stationnaires correspondant à certaines valeurs de la quantité de mouvement; le calcul reste exactement le même.

²⁾ Voir L. BRILLOUIN, Statistiques quantiques, Chap. V, p. 135—138.

Précisons le sens de cette dernière formule: Je suppose un conducteur de section S , longueur l , parcouru longitudinalement par le courant. J'ai donc

$$\left. \begin{aligned} V &= Sl, \text{ volume} \\ I_x &= \frac{e}{V} \sum_i n_i v_{ix} = \frac{e}{mV} \sum_i n_i p_{ix}, \text{ densité de courant} \\ J_x &= S I_x = \frac{e}{ml} \sum_i n_i p_{ix}, \text{ courant total} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ce qui justifie l'expression (10) du courant partiel. Le coefficient γ est nul pour la répartition sans courant, qui présente, dans l'extension en moments, la symétrie sphérique autour de l'origine (Fig. 1). Pour tous les courants usuels, γ est petit; la répartition

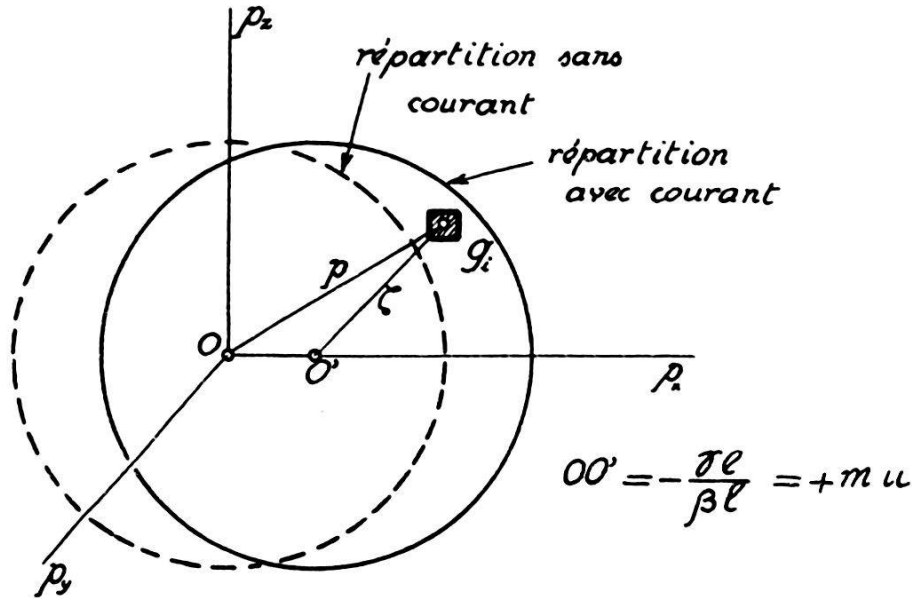


Fig. 1.

est sphérique autour d'un point O' de l'axe des x , de coordonnée $-\gamma e/\beta l$,

$$\eta = \alpha' + \frac{\beta}{2m} \left(p_i + \frac{\gamma e}{\beta l} \right)^2, \quad \alpha' = \alpha - \frac{\beta}{2m} \left(\frac{\gamma e}{\beta l} \right)^2. \quad (12)$$

Tant que γ est petit, on peut développer

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \eta_0 + \frac{\gamma e}{ml} p_{ix}, & \eta_0 &= \alpha + \beta \frac{p_i^2}{2m} \\ f_i &= \frac{1}{\exp \eta_0 + 1} - \frac{\exp \eta_0}{(\exp \eta_0 + 1)^2} \frac{\gamma e}{ml} p_{ix} \end{aligned} \right\}. \quad (13)$$

Cette formule coïncide avec celles que l'on obtient dans la théorie des métaux, à la suite d'une analyse assez pénible¹⁾.

Le nombre total d'électrons N se calcule plus rapidement si l'on part de l'expression (12):

$$N = \sum_i n_i = \sum_i f_i g_i = \frac{8 \pi V}{h^3} \int \zeta^2 d\zeta \frac{1}{\exp \left[\alpha' + \frac{\beta}{2m} \zeta^2 \right] + 1}. \quad (14)$$

J'ai posé

$$\zeta = p_i + \frac{\gamma e}{\beta l},$$

c'est donc, dans l'extension en moments, une distance comptée à partir du centre O' $\left(-\frac{\gamma e}{\beta l}\right)$ de la répartition, et l'on a

$$g_i = \frac{2 V}{h^3} \zeta^2 d\zeta d\Omega, \quad \int d\Omega = 4\pi.$$

L'intégrale (14) garde la même valeur, qu'il y ait un courant ou non, et on a étudié sa forme pour les répartitions sans courant

$$N = \frac{2 V}{h^3} (2\pi m k T)^{3/2} F(\alpha'). \quad (15)$$

F est la fonction introduite par SOMMERFELD²⁾.

Le courant total J_x s'obtient de la manière suivante

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{e}{m l} \sum_i n_i p_{ix} = \frac{e}{m l} \sum_i f_i g_i \left(\zeta_{ix} - \frac{\gamma e}{\beta l} \right) \\ &= \frac{2 e V}{m l h^3} \int d\Omega \int \zeta^2 \left(\zeta_x - \frac{\gamma e}{\beta l} \right) \frac{d\zeta}{\exp \eta + 1}. \end{aligned} \quad (16)$$

L'intégration en ζ_x pour toutes les directions $d\Omega$ donne zéro; il reste alors une intégrale identique à celle de N , éq. (15):

$$J_x = -\frac{\gamma e^2}{m l^2 \beta} N = -\frac{\gamma e^2}{m l \beta} S \frac{N}{V}. \quad (17)$$

Rappelons que le coefficient β vaut $1/kT$; l'expression $-\frac{\gamma e}{m l \beta}$ représente la vitesse moyenne des électrons

$$J_x = e S n v, \quad \left\{ \begin{array}{l} n = \frac{N}{V}, \text{ densité d'électrons} \\ v = -\frac{\gamma e}{m l \beta}, \text{ vitesse moyenne} \end{array} \right\}. \quad (18)$$

¹⁾ Statistiques quantiques, Chap. VIII, p. 279, éq. 79; p. 286, éq. 93; p. 290.

²⁾ Cf. Statistiques quantiques, Chap. V, p. 143, éq. 29, II.

Cette formule est tout à fait comparable à celles du § 1, (4):

$$J = B\gamma.$$

L'expression $\frac{N e^2}{m l^2}$ joue le rôle de $1/L$; c'est ce que nous vérifions en évaluant l'énergie cinétique supplémentaire de la répartition avec courant J_x , car la relation

$$\frac{1}{2} N m v^2 = \frac{1}{2} L J^2$$

nous donne bien

$$L = \frac{N m}{e^2 S^2 n^2} = \frac{m l^2}{N e^2}. \quad (19)$$

Les électrons indépendants, sans couplage magnétique, ne peuvent donner la vraie valeur de la self-induction.

3. Les fluctuations, pour les électrons indépendants.

Toutes les formules usuelles, relatives aux fluctuations, ne sont démontrées que pour de petits écarts, à partir d'un état d'équilibre. Je veux calculer des fluctuations à partir d'une répartition présentant un courant permanent, donc pas en équilibre; c'est pourquoi j'ai jugé plus prudent de reprendre le raisonnement depuis le début.

La formule (7) nous montre la relation

$$\frac{\partial \log P_0}{\partial n_i} = \alpha + \beta u_i + \gamma j_i = \log \frac{g_i - n_{i0}}{n_{i0}}. \quad (20)$$

Appelons n_{i0} le nombre d'électrons, dans les g_i cellules, pour cette répartition, que nous supposons réalisée en moyenne; P_0 sera le nombre de complexions de la répartition n_{i0} ; étudions maintenant une répartition un peu différente

$$n_i = n_{i0} + m_i; \quad (m_i \text{ petit}),$$

et cherchons à évaluer le nombre de complexions P qui y correspond; nous pouvons développer

$$\begin{aligned} \log P = \log P_0 + \sum_i m_i \frac{\partial \log P_0}{\partial n_i} + \frac{1}{2} \sum_i m_i^2 \frac{\partial^2 \log P_0}{\partial n_i^2} \\ + \sum_{i \neq k} m_i m_k \frac{\partial^2 \log P_0}{\partial n_i \partial n_k} \end{aligned} \quad (21)$$

ou, d'après (20) et (5)

$$\begin{aligned} \log P = \log P_0 + \alpha \delta N + \beta \delta U + \gamma \delta J \\ + \frac{1}{2} \sum_i m_i^2 \frac{\partial^2 \log P_0}{\partial n_i^2} + \sum_{i \neq k} m_i m_k \frac{\partial^2 \log P_0}{\partial n_i \partial n_k}. \end{aligned} \quad (22)$$

Mais d'après (20)

$$\frac{\partial^2 \log P_0}{\partial n_i^2} = - \frac{1}{n_{i0} (g_i - n_{i0})}, \quad \frac{\partial^2 \log P_0}{\partial n_i \partial n_k} = 0.$$

La formule (22) peut être appliquée à l'étude des fluctuations dans un métal, en supposant que le nombre N , l'énergie U et le courant J soient constants; nous aurons alors à barrer les termes en δN , δU , et δJ ; mais les fluctuations m_i dans les divers groupes de cellules ne pourront pas être indépendantes, de sorte qu'un tel problème paraît assez artificiel.

Ce qui est plus intéressant, c'est d'étudier des fluctuations en supposant notre conducteur C en contact avec un second corps C' (N' , U' , J') consistant un thermostat, ou très gros réservoir de chaleur ($U' \gg U$), un gros réservoir d'électrons ($N' \gg N$) et un volant important de courant ($J' \gg J$). Le contact entre les

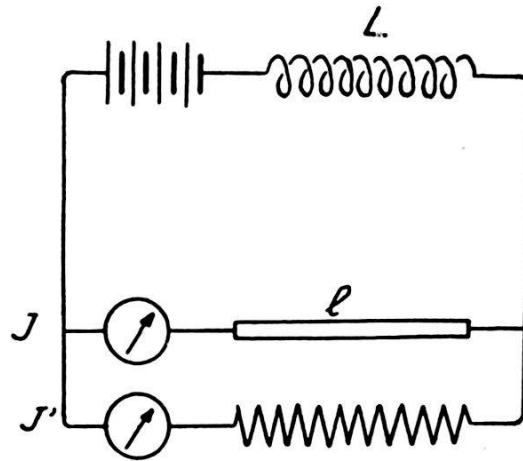


Fig. 2.

corps C et C' sera supposé réalisé de façon que des échanges d'électrons et de courant soient possibles, les totaux restant constants

$$\begin{aligned} N + N' &= C_{\text{te}} & U + U' &= C_{\text{te}} & J + J' &= C_{\text{te}} \\ \delta N &= -\delta N' & \delta U &= -\delta U' & \delta J &= -\delta J' \end{aligned} \quad (24)$$

les deux premières conditions seront réalisées par simple contact, et même, dans ce cas, le réseau cristallin du métal constituera automatiquement le réservoir d'énergie et d'électrons. La condition de courant total constant correspondrait à un montage en parallèle des conducteurs C et C' , avec une grosse self-induction en série (Fig. 2); cela revient à appliquer au conducteur étudié une *force électromotrice rigoureusement constante*.

Le nombre de complexions du système CC' est $P \cdot P'$; pour

des répartitions un peu différentes de la moyenne, nous aurons des formules du type (22)

$$\begin{aligned}\log P' &= \log P_0' + \alpha' \delta N' + \beta \delta U' + \gamma' \delta J' + \dots \\ &= \log P_0' - \alpha \delta N - \beta \delta U + \gamma \delta J + \dots\end{aligned}\quad (25)$$

Le corps C' étant un gros réservoir, les variations sont pour lui très petites, de sorte qu'on peut arrêter le développement (25) aux termes du premier ordre; l'équilibre moyen exige d'autre part

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad \text{et} \quad \gamma = \gamma'.$$

Dans notre montage complet, la répartition m_i se trouve donc douée, au total, d'un nombre de complexions

$$\log (P \cdot P') = \log (P_0 \cdot P_0') - \sum_i \frac{m_i^2}{2 n_{i0} (g_i - n_{i0})} \quad (26)$$

d'après (22), (24) et (25); les termes du premier degré sont compensés

$$P \cdot P' = P_0 \cdot P_0' \exp \left[\sum_i \frac{-m_i^2}{2 n_{i0} (g_i - n_{i0})} \right].$$

En intégrant pour toutes les valeurs de m_i , suivant une méthode classique, on obtient

$$\overline{m_i^2} = n_{i0} (g_i - n_{i0}). \quad (27)$$

Cette formule était bien connue, pour les fluctuations à partir de l'état d'équilibre; nous voyons qu'elle s'applique aussi aux fluctuations autour d'une répartition avec courant, moyennant les définitions que nous avons précisées. L'important, c'est que le mécanisme de la résistance électrique n'a pas besoin d'être explicité.

4. Fluctuations du nombre d'électrons et du courant.

Supposons-nous placés dans les conditions définies plus haut, et recherchons les fluctuations du nombre total d'électrons; dans chaque groupe de cellules, les fluctuations se font indépendamment; nous aurons donc pour tout l'ensemble

$$N = N_0 + M, \quad M = \sum m_i$$

$$\overline{M^2} = \sum_i \overline{m_i^2} = \sum_i n_i (g_i - n_i) = \sum_i g_i \frac{\exp \eta}{[\exp \eta + 1]^2} = - \sum_i g_i \frac{\partial f_i}{\partial \eta}, \quad (28)$$

en se rapportant à la formule (8).

Pour effectuer la sommation, nous prendrons dans l'extension en moments des coordonnées centrées sur le point 0' (Fig. 1) comme en (14):

$$p_i = \zeta_i - \frac{\gamma e}{\beta l}, \quad g_i = \frac{2V}{h^3} d\Omega \zeta^2 d\zeta.$$

La répartition est symétrique autour de 0', de sorte que nous pouvons immédiatement intégrer en $d\Omega$

$$\overline{M^2} = -\frac{8\pi V}{h^3} \int \frac{\partial f}{\partial \eta} \zeta^2 d\zeta. \quad (29)$$

Une intégration par parties s'impose, car ζf est nul aux deux limites ($\zeta = 0$ et ∞),

$$\eta = \alpha' + \frac{\beta}{2m} \zeta^2, \quad \zeta d\zeta = \frac{m}{\beta} d\eta, \quad \int \frac{\partial f}{\partial \eta} \zeta^2 d\zeta = \frac{m}{\beta} \int \zeta df$$

$$\overline{M^2} = \frac{8\pi V m}{h^3 \beta} \int f d\zeta = \frac{2\pi V}{h^3} \left(\frac{2m}{\beta} \right)^{3/2} \int (\eta - \alpha')^{-1/2} f d\eta.$$

Cette intégrale se ramène à un type général étudié par SOMMERFELD.

$$V_e = \frac{1}{\Gamma(\varrho + 1)} \int_0^\infty \frac{z^\varrho dz}{\exp(\alpha' + z) + 1} = \frac{1}{\Gamma(\varrho + 1)} \int (\eta - \alpha')^\varrho f d\eta. \quad (30)$$

Nous obtenons donc

$$\overline{M^2} = \frac{2V}{h^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} U_{-1/2} \quad \left(\beta = \frac{1}{kT} \right) \quad (31)$$

car $\Gamma(\frac{1}{2})$ est égal à $\sqrt{\pi}$. Les intégrales U_e ont les valeurs suivantes:

$$\left. \begin{array}{l} \text{statistique classique, } \alpha' \gg 0, \quad U_e \approx \exp(-\alpha') \\ \text{cas dégénéré, } \alpha' \ll 0, \quad U_e \approx \frac{(-\alpha')^{\varrho+1}}{\Gamma(\varrho+2)}, \quad U_{-1/2} \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} (-\alpha')^{1/2} \end{array} \right\}. \quad (32)$$

D'autre part l'intégrale F du § précédent est identique à $U_{1/2}$ de sorte qu'on a

$$\left. \begin{array}{l} \text{cas classique } U_{1/2} = \exp(-\alpha') = \frac{Nh^3}{2V} (2\pi mkT)^{3/2} \\ \text{cas dégénéré } -\alpha' = \frac{h^2}{2mkT} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{3/2} \end{array} \right\}. \quad (33)$$

Nous aboutissons ainsi aux résultats suivants :

$$\left. \begin{array}{l} \text{cas classique, très hautes températures, } \overline{M^2} = N \\ \text{cas dégénéré, très basses temp., } \overline{M^2} = V \frac{8\pi m k T}{h^2} \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{1/3} \end{array} \right\}. \quad (34)$$

Le résultat classique est bien connu; à haute température la statistique de FERMI se confond avec celle de BOLTZMANN. Les fluctuations du gaz dégénéré auraient pu s'obtenir directement sur la formule (29), en remarquant (Fig. 3) que $-\frac{\partial f}{\partial \eta}$ est presque partout nul, mais présente une valeur élevée pour $\eta = 0$. de sorte que $-\frac{\partial f}{\partial \eta}$ joue le rôle d'une fonction δ de DIRAC

$$\int \frac{\partial f}{\partial \eta} \zeta^2 d\zeta = \frac{m}{\beta} \int \zeta \frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta = \frac{m}{\beta} \zeta_{(\eta=0)} = \frac{m}{\beta} \sqrt{-\frac{2m\alpha'}{\beta}} = m k T h \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{1/3}.$$

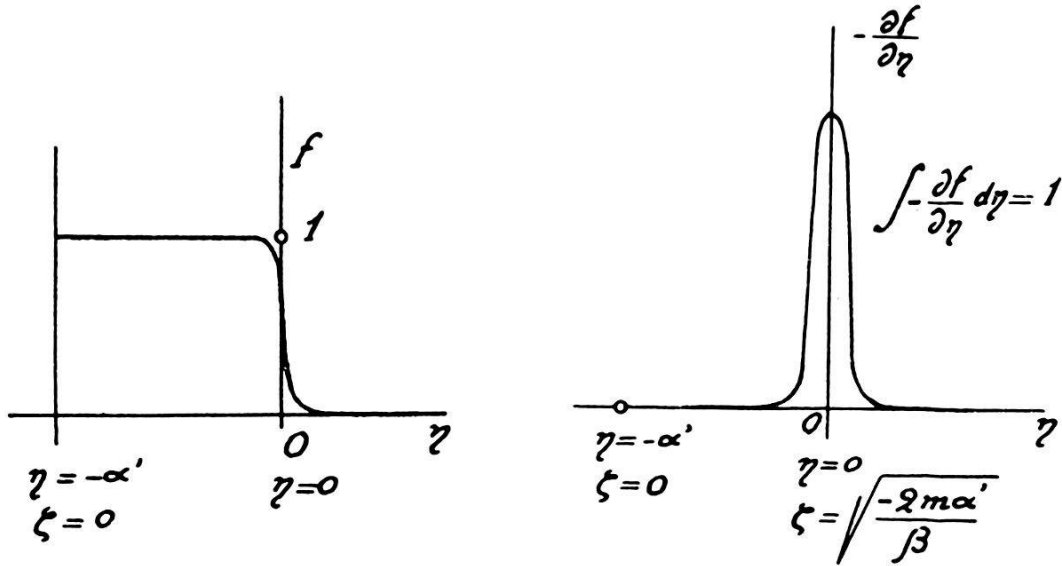


Fig. 3.

Nous pouvons maintenant calculer les *fluctuations de quantité de mouvement*. Un excès de m_i électrons, dans une cellule de quantité de mouvement p_i donne un excès de quantité de mouvement totale

$$m_i p_{ix};$$

les fluctuations dans les diverses cellules sont indépendantes, je puis donc écrire

$$\overline{\Delta P_x^2} = \sum_i \overline{m_i^2} p_{ix}^2 = - \sum_i g_i p_{ix}^2 \frac{\partial f_i}{\partial \eta}. \quad (35)$$

Prenons des coordonnées ζ centrées sur $0'$, comme en (29) et nous obtenons

$$\overline{\Delta P_x^2} = -\frac{2V}{h^3} \int d\Omega \int \left[\zeta_{ix}^2 - \frac{2\gamma e}{\beta l} \zeta_{ix} + \left(\frac{\gamma e}{\beta l} \right)^2 \right] \frac{\partial f}{\partial \eta} \zeta^2 d\zeta.$$

La fonction f ne dépend pas de l'angle solide $d\Omega$; par symétrie le terme en ζ_{ix} s'annule en moyenne, et ζ_{ix}^2 prend en moyenne la valeur $\frac{1}{3} \zeta^2$,

$$\begin{aligned} \overline{\Delta P_x^2} &= -\frac{8\pi V}{h^3} \int \left[\frac{1}{3} \zeta^2 + \left(\frac{\gamma e}{\beta l} \right)^2 \right] \frac{\partial f}{\partial \eta} \zeta^2 d\zeta \\ &= -\frac{8\pi V}{h^3} \frac{m}{\beta} \int \left[\zeta^2 + \left(\frac{\gamma e}{\beta l} \right)^2 \right] f d\zeta, \end{aligned}$$

en intégrant par parties, comme pour (29). Nous voyons apparaître une intégrale en $f\zeta^2 d\zeta$ identique à celle qui donne N dans l'équation (15), et une autre en $f d\zeta$ identique à celle qui définit $\overline{M^2}$ dans (31); le résultat final s'explicite ainsi

$$\overline{\Delta P_x^2} = N m k T + \overline{M^2} \left(\frac{\gamma e}{\beta l} \right)^2 = N m k T + \overline{M^2} \frac{P_x^2}{N^2} \quad (36)$$

car d'après (17) le courant total et la quantité de mouvement totale sont reliés par

$$J_x = \frac{e}{m l} P_x = -N \frac{\gamma e^2}{m \beta l^2}.$$

Nous trouvons donc pour les *fluctuations de courant*

$$\overline{\Delta J_x^2} = \frac{N e^2}{m l^2} k T + \overline{M^2} \frac{J_x^2}{N^2}. \quad (37)$$

Ces résultats sont *rigoureux* pour un état de dégénérescence quelconque, tant qu'on néglige les couplages magnétiques et traite les électrons comme indépendants. L'expression $\frac{m l^2}{N e^2}$ joue alors le rôle de la self-induction (éq. 19). Les fluctuations de courant se composent donc

1° d'un terme $\frac{k T}{L}$ indépendant du courant moyen,

2° d'un terme proportionnel au carré du courant moyen $\overline{J_x^2} \frac{\overline{M^2}}{N^2}$.

Le premier résultat est bien connu, mais le second est nouveau. Il disparaîtrait si les fluctuations n'étaient pas indépendantes, et si le nombre total des électrons restait rigoureusement constant ($M = 0$). L'aspect de ce résultat appelle quelques remarques:

1^o — Les fluctuations $\overline{M^2}$ du nombre total des électrons sont calculées sans tenir compte de leurs répulsions électrostatiques; lorsque nous avons M électrons libres en trop, nous admettons qu'ils sont uniformément répartis dans la masse du métal, et ne constituent pas une charge électrostatique superficielle. Cette hypothèse paraît justifiée, puisque le réservoir naturel d'électrons est constitué par la masse du métal; dire qu'un excès M d'électrons libres apparaît, c'est supposer que M ions du réseau ont passé à un état supérieur d'ionisation. Le métal dans son ensemble (réseau ionique + électrons libres) reste neutre.

2^o — Les électrons indépendants sont une fiction. Il va falloir maintenant tenir compte de leurs couplages magnétiques, afin de retrouver correctement le rôle de la self-induction.

5. L'interaction magnétique entre les électrons.

Deux électrons, de vitesses v_i et v_k , situés à une distance r_{ik} l'un de l'autre, exercent l'un sur l'autre des forces dérivant d'une énergie $\frac{e^2}{c^2 r_{ik}} (v_i \cdot v_k)$; ces termes supplémentaires d'énergie dépendent des vitesses et doivent être comptés dans l'énergie cinétique. Pour un système de N électrons nous aurons donc une énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2} m \sum_i v_i^2 + \frac{e^2}{c^2} \sum_{i>k} \frac{(v_i \cdot v_k)}{r_{ik}}; \quad (38)$$

la seconde sommation est faite en comptant une fois chaque paire i, k . Par définition, la quantité de mouvement de l'électron i sera

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial v_i} = m v_i + \frac{e^2}{c^2} \sum_{k \neq i} \frac{v_k}{|r_i - r_k|} \\ (r_{ik} = |r_i - r_k|). \quad (38\text{bis})$$

Ces formules ont été fort bien discutées par BETHE et FRÖHLICH¹⁾; les termes magnétiques que nous venons d'ajouter contiennent, entre autres, les effets de self-induction. Considérons un conducteur rectiligne de section S , longueur l , contenant n électrons par cc.:

$$V = Sl \quad N = nV.$$

Supposons une répartition d'électrons qui comporte une vitesse moyenne v_x suivant Ox , et des vitesses w d'agitation dirigées en tous sens

$$v_k = v_x + w_k, \quad \sum_k w_k = 0. \quad (39)$$

¹⁾ Z. f. P. **85**, 389, 1933.

Cela nous donne un courant total (éq. 11, et fig. 4)

$$J_x = S n e v_x = \frac{e}{l} \sum_k v_k.$$

La sommation (37) peut s'écrire un peu autrement :

$$\sum_{i>k} \frac{(v_i \cdot v_k)}{|r_i - r_k|} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{k \neq i} \frac{(v_i \cdot v_k)}{|r_i - r_k|}.$$

Lorsqu'on fait les sommations séparément sur i et k , on compte en effet deux fois chaque terme, pour les ordres i, k et k, i . Les électrons sont, en moyenne, répartis uniformément dans tout le volume V . Prenons un volume $d\tau_i$; nous y trouverons $\frac{N}{V} d\tau_i$ électrons, de vitesse moyenne v_x , suivant Ox ; dans un autre volume $d\tau_k$ nous aurons $\frac{N-1}{V}$ électrons, car il en reste $N-1$ à distribuer, l'électron i étant exclu; la vitesse moyenne est encore v_x ; au total

$$\frac{1}{2} \sum_i \sum_{k \neq i} \frac{(v_i \cdot v_k)}{|r_i - r_k|} \approx \frac{N(N-1) v_x^2}{2 V^2} \iint \frac{d\tau_i d\tau_k}{|r_i - r_k|}.$$

Cette intégrale double n'est autre que celle qui définit la self-induction L du circuit :

$$L = \frac{1}{c^2 S^2} \iint \frac{d\tau_i d\tau_k}{|r_i - r_k|} \quad (40)$$

car la self-induction se calcule pour un courant total 1, donc une densité de courant $1/S$. Notre formule (37) prend donc, en moyenne, la valeur

$$T = \frac{m}{2} \sum_i v_i^2 + \frac{(N-1)}{2 N} L J^2, \quad (41)$$

d'après (39) et (40). Dans tous les conducteurs usuels, N est très grand, de sorte que $\frac{N-1}{N}$ est égal à l'unité, et la formule (41) représente un résultat classique. Ceci peut se transformer encore

$$T = \frac{m}{2} \sum_i v_i^2 + \frac{(N-1) e^2}{2 N l^2} L (\sum v_{kx})^2 = \frac{m}{2} \left[\sum_i v_i^2 + \varkappa \left(\sum_k v_{kx} \right)^2 \right] \quad (42)$$

avec

$$m \varkappa = \frac{(N-1) e^2}{N l^2} L = \frac{(N-1) e^2}{N c^2 V^2} \iint \frac{d\tau_i d\tau_k}{|r_i - r_k|}.$$

Si nous adoptons pour l'énergie cinétique l'expression moyenne (42) nous obtenons pour les moments

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial v_i} \begin{cases} p_{ix} = m(1 + \kappa) v_{ix} + \sum_{k \neq i} m \kappa v_{kx}, \\ p_{iy} = m v_{iy}, \quad p_{iz} = m v_{iz}. \end{cases} \quad (43)$$

Ces formules simplifiées ne permettront de tenir compte des effets magnétiques et de la self-induction, au moins en première approximation. Précisons les ordres de grandeur:

$$L \frac{e^2}{l^2} \ll m \ll N L \frac{e^2}{l^2} \quad (44)$$

donc

$$\kappa \ll 1 \ll N \kappa.$$

Considérons un fil de 1 cm de long et 0,2 mm de diamètre, sa self-induction est de l'ordre de 10^{-8} henry, soit $10^{-8} \frac{1}{9} 10^{-11}$ U. E. S. C. G. S.:

$$\begin{aligned} L &\approx 10^{-20} \\ e &= 4,77 \cdot 10^{-19} \\ m &= 0,9 \cdot 10^{-27} \\ N &\approx 10^{19} \\ l &\approx 1 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Les trois termes des inégalités (44) valent

$$10^{-39} \ll 10^{-27} \ll 10^{-20}.$$

L'expression de la quantité de mouvement p_i , en (38) ou (43), ressemble à celle que l'on obtient pour un électron dans un champ défini par un potentiel vecteur A donné

$$p_i = m v_i + \frac{e}{c} A. \quad (45)$$

La différence entre les deux formules est pourtant considérable, car le terme additif de (43) n'est pas fixe, donné à l'avance, comme A ; c'est au contraire un terme qui dépend des vitesses de tous les électrons et ne peut être isolé artificiellement du $m v_i$.

Dans notre calcul, la direction Ox suivant laquelle se dirige le courant joue un rôle favorisé, et crée une dissymétrie dans les formules; on peut éliminer cette anomalie. Prenons un conducteur parallélépipédique (Fig. 4) de côtés l_x, l_y, l_z ; le courant J total aura une direction oblique quelconque, la vitesse moyenne étant

(v_x, v_y, v_z) ; nous aurons à définir trois valeurs de self, dont l'une, L_x , est celle que nous avons déjà trouvée en (40):

$$L_x = \frac{D}{(cl_y l_z)^2}, \quad L_y = \frac{D}{(cl_x l_z)^2}, \quad L_z = \frac{D}{(cl_x l_y)^2}, \quad (46)$$

avec

$$D = \iint \frac{d\tau_i d\tau_k}{|r_i - r_k|},$$

et l'énergie cinétique totale s'écrira

$$T = \frac{m}{2} \left[\sum_i v_i^2 + \kappa \left(\sum_k v_{kx} \right)^2 + \kappa \left(\sum_k v_{ky} \right)^2 + \kappa \left(\sum_k v_{kz} \right)^2 \right] \quad (47)$$

car l'expression (42) de κ nous montre que L_x , L_y , et L_z donnent la même valeur pour κ . Pour la quantité de mouvement, nous trouvons

$$\left. \begin{aligned} p_{ix} &= m(1 + \kappa) v_{ix} + \sum_{k \neq i} m \kappa v_{kx} \\ p_{iy} &= m(1 + \kappa) v_{iy} + \sum_{k \neq i} m \kappa v_{ky} \\ p_{iz} &= m(1 + \kappa) v_{iz} + \sum_{k \neq i} m \kappa v_{kz} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

La symétrie est complètement rétablie.

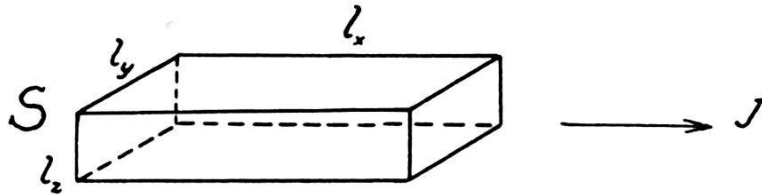


Fig. 4.

6. Comment trouver de nouvelles variables séparées.

Il est impossible de conserver comme variables les coordonnées x, y, z des divers électrons, car l'énergie cinétique ne se présente pas comme une somme de carrés; les variables ne sont pas séparées, et leur interdépendance est fort gênante.

Je vais chercher à former des combinaisons linéaires qui ramènent l'énergie cinétique à une somme de carrés. Revenons au cas d'un courant longitudinal, suivant Ox , et supposons le courant moyen nul partout, dans les directions y et z . L'énergie cinétique a la forme (42); les coordonnées y et z sont séparées, seules les coordonnées x ne le sont pas. Posons

$$X_i = (a + b) x_i + b \sum_{k \neq i}^{N-1} x_k = a x_i + b \sum_k^N x_k \quad (49)$$

et cherchons à ramener l'énergie cinétique à la forme

$$\left. \begin{aligned} \frac{2T}{m} &= \sum_i (\dot{X}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \\ \sum_i \dot{X}_i^2 &= a^2 \sum_i \dot{x}_i^2 + (2ab + Nb^2) \left(\sum_k \dot{x}_k \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Identifions (50) et (42), nous trouvons

$$a = 1, \quad Nb^2 + 2b = \varkappa, \quad b = \frac{1}{N} (-1 + \sqrt{1 + N\varkappa}). \quad (51)$$

Il faut prendre le signe + devant le radical, afin que b s'annule lorsque $\varkappa$ tend vers zéro. Les X_i , y_i , z_i forment des variables séparées; le moment P_{ix} correspondant à X_i est

$$P_{ix} = m \dot{X}_i$$

et l'on a

$$P_x = \sum_i P_{ix} = m(a + Nb) \sum_k \dot{x}_k = m \sqrt{1 + N\varkappa} \sum_k \dot{x}_k. \quad (52)$$

La relation entre le courant total J_x et la quantité de mouvement totale P_x s'écrit donc

$$J_x = \frac{e}{l} \sum_k \dot{x}_k = \frac{e}{ml} \frac{P_x}{\sqrt{1 + N\varkappa}}. \quad (53)$$

Mais reportons-nous aux ordres de grandeur (44), nous notons

$$1 + N\varkappa \approx N\varkappa = \frac{NLe^2}{ml^2} \approx 3 \cdot 10^3;$$

la relation (53) s'explicite donc ainsi

$$J_x \approx \frac{P_x}{\sqrt{mNL}}.$$

Quel est le domaine de variation de la coordonnée X ? La coordonnée x d'un électron peut varier de 0 à l ; donc X peut aller de zéro à $(a + Nb)l$ d'après (49), ce qui fait $l\sqrt{1 + N\varkappa}$. C'est ce que nous retrouvons en calculant le déterminant fonctionnel (Voir appendice)

$$\Delta = \frac{D(X)}{D(x)} = \begin{vmatrix} a+b & b & b & \dots \\ b & a+b & b & \dots \\ b & b & a+b & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = a^{N-1}(a + Nb) = \sqrt{1 + N\varkappa}. \quad (54)$$

Partout où figure le volume V , dans les formules de la théorie des électrons, nous devons écrire $V\Delta$; moyennant cette correction, tous les calculs des §§ 2, 3, et 4 sont directement utilisables, puisque nous avons ramené l'énergie cinétique (50) à la forme usuelle.

Récrivons rapidement les formules essentielles, en tenant compte des deux corrections (53) et (54):

$$g_i = \frac{2V\Delta}{h^3} d\Omega p_i^2 dp_i, \quad \text{nombre de cellules.} \quad (9\text{bis})$$

$$j_i = \frac{e}{ml\sqrt{1+N\kappa}} P_{ix}, \quad \text{courant partiel.} \quad (10\text{bis})$$

La répartition avec courant moyen s'obtient comme au § 2, mais

$$\begin{aligned} \eta &= \alpha + \beta u_i + \gamma j_i = \alpha + \frac{\beta}{2m} p_i^2 + \frac{\gamma e}{ml\sqrt{1+N\kappa}} P_{ix} \\ &= \alpha' + \frac{\beta}{2m} \left(p_i + \frac{\gamma e}{\beta l\sqrt{1+N\kappa}} \right)^2. \end{aligned} \quad (12\text{bis})$$

Le nombre total d'électrons est relié à la quantité α'

$$N = \frac{2V\Delta}{h^3} (2\pi m k T)^{3/2} F(\alpha') \quad (15\text{bis})$$

$$\alpha' = -\frac{h^2}{2mkT} \left(\frac{3N}{8\pi V\Delta} \right)^{3/2}, \quad \text{cas dégénéré,}$$

et

$$J_x = \frac{e}{ml\sqrt{1+N\kappa}} \sum_i n_i P_{ix} = -\frac{\gamma e^2 N}{m\beta l^2 (1+N\kappa)} \approx \frac{\gamma}{L\beta}. \quad (17\text{bis})$$

Si l'on considère une répartition avec courant, et qu'on calcule l'énergie correspondante, on trouve, par un calcul analogue à celui de (14) et (16)

$$U = \frac{1}{2m} \sum_i n_i p_i^2 = \frac{1}{2m} \sum_i f_i g_i \left[\zeta^2 - \frac{2\gamma e \zeta}{\beta l\sqrt{1+N\kappa}} + \frac{1}{1+N\kappa} \left(\frac{\gamma e}{\beta l} \right)^2 \right].$$

Le premier terme donne l'énergie U_0 sans courant, le second est nul en moyenne, et le total s'écrit

$$U = U_0 + \frac{N}{2m(1+N\kappa)} \left(\frac{\gamma e}{\beta l} \right)^2 \approx U_0 + \frac{1}{2} L J^2 \quad (55)$$

après les réductions indiquées en (53).

Passons maintenant aux fluctuations du § 4:

$$\overline{M^2} = \frac{V \Delta}{h^2} 8 \pi m k T \left(\frac{3 N}{8 \pi V \Delta} \right)^{1/3}, \text{ cas dégénéré,} \quad (32 \text{ bis})$$

$$\overline{\Delta P_x^2} = N m k T + \overline{M^2} \frac{P_x^2}{N^2}, \quad (36 \text{ bis})$$

$$\overline{\Delta J_x^2} = \frac{e^2}{m^2 l^2 (1 + N \kappa)} \overline{\Delta P_x^2} = \frac{N e^2 k T}{m l^2 (1 + N \kappa)} + \overline{M^2} \frac{J_x^2}{N^2}, \quad (37 \text{ bis})$$

$$\overline{\Delta J_x^2} \approx \frac{k T}{L} + \overline{M^2} \frac{J_x^2}{N^2}. \quad (56)$$

Nous obtenons très correctement cette fois les fluctuations de courant dans un circuit sans courant moyen; le terme $\frac{k T}{L}$ avec la self-induction L est classique. Que signifie le second terme?

$$\frac{\overline{M^2}}{N^2} = \frac{\Delta}{N n h^2} 8 \pi m k T \left(\frac{3 n}{8 \pi \Delta} \right)^{1/3} = 3 \frac{m k T}{N h^2} \left(\frac{8 \pi \Delta}{3 n} \right)^{2/3} \quad (57)$$

avec $n = N/V$, densité d'électrons.

Si le rôle de la self-induction, par rapport à la masse propre des électrons, reste le même, notre coefficient Δ est inchangé; les fluctuations proportionnelles au carré du courant moyen seront donc d'autant plus importantes que le nombre total N d'électrons sera plus faible, c'est-à-dire que le volume du conducteur sera plus petit. Nous verrons plus loin que les résultats expérimentaux confirment ce point de vue.

Soulignons tout de suite une *difficulté sérieuse*; l'effet de la self-induction est de *réduire énormément la dégénérescence*. La dégénérescence peut se mesurer au moyen du facteur (15bis),

$$F(\alpha') = \frac{N h^3}{2 V \Delta} (2 \pi m k T)^{-3/2}. \quad (58)$$

Si F est bien plus grand que 1, on a une dégénérescence complète, et si F est très petit, on retrouve le gaz classique; or pour les métaux usuels à 300° K, $\frac{N h^3}{2 V} (2 \pi m k T)^{-3/2}$ est de l'ordre de 3000, ce qui, avec $\Delta = 1$ (électrons sans couplage magnétique) assure une dégénérescence complète; mais dans mon exemple

numérique, je trouve Δ de l'ordre de 3000, ce qui me donne pour F une valeur voisine de l'unité, c'est-à-dire une dégénérescence moyenne. Les évaluations numériques du § 5 sont peut-être un peu fortes; à forme constante, la self-induction L varie comme les dimensions linéaires, donc Ll^{-2} varie comme l^{-1} ; si donc on multiplie par 10 les dimensions d'un circuit, le facteur Δ est divisé par 10, et l'on retrouve une dégénérescence nette.

Ce résultat ne doit peut-être pas trop surprendre. Pour des particules indépendantes, la dégénérescence est d'autant plus élevée que la masse est plus faible; le couplage magnétique fait apparaître la self-induction, qui est équivalente à une énorme augmentation de l'inertie des électrons. On devrait s'attendre, en conséquence, à une grosse diminution de la dégénérescence.

7. Résultats expérimentaux.

C'est pour interpréter de curieuses expériences de BERNAMONT¹⁾ que j'ai été conduit à examiner ce problème des fluctuations. BERNAMONT a réellement observé l'augmentation des fluctuations de courant en fonction du courant moyen. Cet effet ne s'obtient que sur des conducteurs de très faible volume, constitués par de minces dépôts métalliques obtenus par voie cathodique, ou par des fils à la WOLLASTON. Les résultats qualitatifs semblent d'accord avec le type de formule que j'ai obtenue; le terme de fluctuations en J^2 , dans l'équation (56) fait intervenir un facteur en $\frac{\overline{M}^2}{N^2}$ qui, d'après (57), doit varier comme l'inverse du nombre total N d'électrons, c'est-à-dire comme l'inverse du volume du conducteur. On comprend donc que cet effet ne puisse s'observer que sur des conducteurs extrêmement fins. BERNAMONT était arrivé, indépendamment, à poser une formule du type (56). Il supposait que l'effet était dû à des *fluctuations de résistance*, la résistance instantanée étant proportionnelle au nombre $N_0 + M$ d'électrons libres à l'instant considéré; pour lui, les variations du nombre d'électrons libres proviennent de la dissociation des atomes du métal en ions et électrons; ce point de vue est équivalent à celui que j'ai développé. Je tiens à remercier tout spécialement BERNAMONT de ses critiques et suggestions; les discussions que nous avons eues m'ont grandement aidé à préciser le sens des conditions théoriques générales et à dégager les hypothèses de base.

¹⁾ C. R. **198**, 1755, 1934 et **198**, 2144, 1934.

8. Appendice.

Nous avons à calculer un déterminant à N lignes et N colonnes du type suivant

$$D_N = \begin{vmatrix} 1 & c & c & \dots \\ c & 1 & c & \dots \\ c & c & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}_{(N)} = \begin{vmatrix} 1 & c & c & c & c & \dots \\ c-1 & 1-c & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & c-1 & 1-c & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & c-1 & 1-c & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}_{(N)} \quad (\text{A } 1)$$

en retranchant de chaque ligne la ligne de dessus. Développons par rapport à la première ligne, nous obtenons un premier terme isolé et ensuite $N-1$ termes identiques

$$D_N = \begin{vmatrix} 1-c & 0 & 0 & 0 & \dots \\ c-1 & 1-c & 0 & 0 & \dots \\ 0 & c-1 & 1-c & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}_{(N-1)} - (N-1)c \begin{vmatrix} c-1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1-c & 0 & 0 & \dots \\ 0 & c-1 & 1-c & 0 & \dots \\ 0 & 0 & c-1 & 1-c & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}_{(N-1)}$$

Le premier déterminant se réduit à son terme diagonal $(1-c)^{N-1}$ et le second vaut $-(1-c)^{N-1}$, donc

$$D_N = (1-c)^{N-1} [1 + (N-1)c] = (1-c)^N + Nc(1-c)^{N-1}. \quad (\text{A } 2)$$

On peut, par un procédé analogue, évaluer les mineurs. Un mineur M_{ii} à deux indices égaux est égal à D_{N-1} ; le mineur d'un élément hors de la diagonale, M_{ik} , avec $k \neq i$ est

$$M_{ik} = - \begin{vmatrix} c & c & c & c & \dots \\ c & 1 & c & c & \dots \\ c & c & 1 & c & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}_{N-1} = - \begin{vmatrix} c & c & c & c & c & \dots \\ 0 & 1-c & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & c-1 & 1-c & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & c-1 & 1-c & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = -c(1-c)^{N-2}. \quad (\text{A } 3)$$

On en déduit les coefficients de la transformation inverse

$$\left. \begin{aligned} C_{ii} &= \frac{M_{ii}}{D_N} = \frac{D_{N-1}}{D_N} = \frac{1 + (N-2)c}{(1-c)[1 + (N-1)c]}, \\ C_{ik} &= \frac{M_{ik}}{D_N} = \frac{-c}{(1-c)[1 + (N-1)c]}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A } 4)$$

Le déterminant Δ de l'équation (54) est bien du type ci-dessous

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b & b & b & \dots \\ b & a+b & b & \dots \\ b & b & a+b & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = (a+b)^N \begin{vmatrix} 1 & \frac{b}{a+b} & \frac{b}{a+b} & \dots \\ \frac{b}{a+b} & 1 & \frac{b}{a+b} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)^N \left(1 - \frac{b}{a+b}\right)^{N-1} \left[1 + (N-1) \frac{b}{a+b}\right] = a^{N-1} (a + Nb). \quad (\text{A } 5)$$

Les formules (A 4) se contrôlent de la façon suivante: Le tableau des coefficients de (A 1) définit une transformation linéaire

$$X_i = x_i + c \sum_{k \neq i} x_k = (1-c) x_i + c \sum_k x_k.$$

Mais

$$\sum_i X_i = (1-c) \sum_i x_i + Nc \sum_k x_k = [1 + (N-1)c] \sum_k x_k.$$

D'où l'on tire

$$x_i = \frac{X_i}{1-c} - c \frac{\sum_k X_k}{(1-c)[1 + (N-1)c]}$$

$$= X_i \frac{1 + (N-2)c}{(1-c)[1 + (N-1)c]} - \frac{c}{(1-c)[1 + (N-1)c]} \sum_{k \neq i} X_k,$$

ce qui redonne les coefficients (A 4) de la transformation inverse.