Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 10 (1937)
Heft: V

Artikel: Versuch einer relativistischen Fassung des Kausalitätsprinzips (zweite Mitteilung)

Autor: Scherrer, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-110750

Versuch einer relativistischen Fassung des Kausalitätsprinzips

(zweite Mitteilung)

von **W. Scherrer**, Bern.

(23. VIII. 37.)

I. Vorbemerkungen.

In einer unter dem gleichen Titel erschienenen Note[1]) habe ich die Gründe auseinandergesetzt, welche mich veranlassten, eine auf die Methoden der Wellenmechanik gegründete „Weltpunktstatistik" ins Auge zu fassen. Für das Detail verweise ich den Leser auf diese Note und beschränke mich hier darauf, kurz noch einmal das Wichtigste in Erinnerung zu rufen:

1. Die Materie wird aufgefasst als eine Menge von „weltpunktartigen" Wirkungselementen.
2. Das dynamische Geschehen soll beschrieben werden durch folgende Festsetzungen:
   a) Man gebe eine beliebige, aber raumzeitlich vollkommen bestimmte „Ladungsverteilung" von Wirkungselementen vor.
   b) Dieselbe bestimmt in der „Aussenwelt" ein Skalarfeld Φ gemäss der Gleichung
   $$\Box\, \Phi = 0. \tag{1}$$
   c) Die Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein eines Wirkungselements ausserhalb der Ladungsmenge wird beschrieben mit Hilfe einer Wellenfunktion Ψ gemäss der Gleichung
   $$\Box\, \Psi = \Phi \cdot \Psi. \tag{2}$$

Wie diese Wahrscheinlichkeit effektiv zu bemessen ist, kann wohl erst der detaillierte Ausbau der Theorie lehren. Unser Vorbild ist die skalare Wellenmechanik von Schrödinger in der begrifflichen Interpretation von Born.

In der ursprünglichen Fassung wurden die Begriffe etwas enger definiert, insofern daselbst entsprechend der physikalisch anschaulichen Bedeutung als Aussenwelt nur Zukunftsgebiete zu-

[1]) Helvetica Physica Acta, Bd. **10**, Heft 2, 1937.

*

gelassen worden sind. Rein logisch betrachtet ist dies aber nicht nötig und vom mathematischen Standpunkt aus wäre die eben angegebene Verallgemeinerung befriedigender, da sie der vollkommenen Symmetrie der Metrik Rechnung trägt.

Wie schon in der ersten Note betont wurde, scheinen die Abweichungen von der in gewissen Bezirken mit überraschendem numerischen Erfolg arbeitenden relativistischen Elektrodynamik so stark zu sein, dass man an der Erreichung brauchbarer Ergebnisse zweifeln wird. Insbesondere wird man wohl das Vektorpotential und das damit verbundene Prinzip der Eichinvarianz vermissen.

Im folgenden soll deshalb einmal gezeigt werden, dass man auch vom skalaren Standpunkt aus eine relativistisch invariante ponderomotorische Kraft erhält, die für unendlich schweren Kern in die Coulombkraft übergeht, im übrigen aber viel einfacher gebaut ist als der bekannte Ausdruck von Minkowski. Bevor ich aber ins Detail gehe, will ich im nächsten Abschnitt den skalaren Standpunkt unter einem allgemeinen Gesichtspunkt erörtern.

II. Eine Rangordnung physikalischer Begriffe.

An die Spitze stellen wir die Begriffe Zahl, Kontinuum (Raum), Dimensionszahl und Metrik. Wir wollen diese Begriffe anerkennen, und zwar in dem Sinne, dass wir die 4-dimensionale Geometrie der speziellen Relativitätstheorie — kurz Weltmetrik — als massgebend annehmen. Als nächst wichtigen Begriff erwähnen wir eine Anzahl bezogen auf ein Volumen. Wenn dieselbe gross wird, bildet man den Begriff der Dichte, d. h. also ein invariantes Skalarfeld. Nun folge der Begriff des Vektors. Sein Vorbild ist der Verbindungsvektor zweier Punkte. Seine einleuchtendste physikalische Realisierung findet er als Gradient eines Skalarfeldes. Als nächst wichtige Vektoren folgen Tangenten- und Krümmungsvektoren. An die Vektoren aber schliessen sich an die alternierenden Tensoren der Geometrie. Einer der wichtigen Erfolge der Relativitätstheorie besteht darin, Kraft, Impuls und Energie in die Geometrie eingereiht zu haben. Nun aber leuchtet ein, dass die zu obigen Tensoren führenden Gebilde: Linien, Flächen usw. selbst wieder als Grenzfälle von Dichteverteilungen aufgefasst werden können. Damit sind die erwähnten geometrischen Tensoren indirekt auf Skalarfelder zurückgeführt.

Nun eine frappante Erscheinung: In der jetzt geltenden Elektrodynamik sind Grössen zu finden, die nicht auf Skalarfelder zurückgeführt werden können: Das Vektorpotential, das daraus entspringende elektromagnetische Feld, sowie die Spinoren. Umgekehrt fehlt in dieser Theorie gerade die wichtigste Eigenschaft eines Skalarfeldes, nämlich die wirklich 4-dimensionale Variabilität der Dichteschwankung. Dies kommt zum Ausdruck im Anschluss der eigentlichen Gradienten oder — korrespondenzmässig ausgedrückt — in der Normierung der Eigenzeit. Dadurch ist aber auch die begrifflich einfachste Möglichkeit, die Entstehung und Vernichtung von Korpuskeln zu beschreiben, ausgeschaltet worden.

Ich will deshalb gleich an dieser Stelle ein Bedenken geltend machen gegen das Verfahren, nach welchem die makroskopische Maxwell'sche Theorie in die Relativitätstheorie übertragen wird: Das Maxwell'sche Stromelement stellt in erster Linie einen *raumartigen* Vektor dar, dem eine bestimmte Dauer, also ein *zeitartiger* Vektor zugeordnet werden muss. Die entsprechende Elementarfigur ist ein Parallelogramm, d. h. ein *Sechservektor* s_{ik} und nicht ein Vierervektor. Auf jeden Fall scheint es mir notwendig, zu prüfen, ob dieser geometrischen Analogie nicht auch die physikalische an die Seite gestellt werden muss. Wenn dies zutrifft, so gerät man in der Frage der Wechselwirkung zweier Teilchen vollends in Verlegenheit. Das an sich schon komplizierte Gesetz der Anziehung zweier Teilchen, in welches zwei Vierergeschwindigkeiten und ein Distanzvektor multiplikativ eingehen, müsste durch ein noch komplizierteres und absolut unvorstellbares Gesetz ersetzt werden. Am elektromagnetischen Feld ist auch unbefriedigend, dass die Invarianten $\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{H}^2$ und $\mathfrak{E}\mathfrak{H}$ keine ihrer mathematischen Wichtigkeit entsprechende physikalische Rolle spielen.

Bei einem Versuch, Relativitätstheorie und Quantentheorie zu vereinigen, sieht man sich also in erster Linie vor folgende *Alternative* gestellt:

Entweder die Grundgrössen sind zu beschreiben durch *Skalarfelder*,

oder die Grundgrössen sind zu beschreiben durch *Vektorfelder* und *Spinorfelder*.

Hier also soll die erste Möglichkeit untersucht werden. Dass sie bei weitem die einfachere ist, springt in die Augen. Man könnte eher befürchten, sie sei zu einfach. Doch der Schein trügt. Die Auflösung des Korpuskels in eine Kette von Einzelakten ermöglicht ausserordentlich vielgestaltige Kombinationen.

Ich weise noch auf folgenden *prinzipiellen Unterschied* hin: Die erste Möglichkeit gestattet uns, die oben an die Spitze gestellte Begriffsreihe und damit insbesondere die spezielle Weltmetrik unangetastet zu lassen. Damit möchte ich keine Zweifel an den Grundprinzipien der allgemeinen Relativitätstheorie ausdrücken. Hingegen ist es doch denkbar, dass über die Materie im Kleinen noch einiges zu ermitteln ist, das nicht aus der Gravitationstheorie abgeleitet werden kann, sondern umgekehrt zu deren Modifikation beiträgt.

Was den Begriff des *Spinors* betrifft, so scheint es nicht möglich zu sein, denselben aus dem Begriff des Skalarfeldes abzuleiten. Jedenfalls enthält derselbe eine Bezugnahme auf ein ausgezeichnetes Koordinatensystem (einmal müssen seine Komponenten gegeben sein). Ist er vielleicht ein erstes Symptom für eine Faserstruktur der Welt oder ist er uns nur durch das ebenfalls noch undurchsichtige elektromagnetische Feld aufgezwungen worden? Ich komme in der Schlussbemerkung noch einmal kurz auf diesen Begriff zurück.

III. Das retardierte Potential.

Nach der ins Auge gefassten Auflösung der Materie in Wirkungselemente muss die Weltlinie eines dauernd existierenden Teilchens gedeutet werden als nicht abbrechende Kette von Wirkungspunkten. Ist Q einer dieser Punkte, so erzeugt er im Aufpunkt P ein Potential

$$\varphi = \frac{k}{c^2\,(t-u)^2-(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2-(x_3-y_3)^2} \tag{3}$$

wo ct, x_i resp. cu, y_i die Koordinaten von P und Q sind. Das totale in P zur Wirkung gelangende Potential soll nun aus derartigen Einzelpotentialen durch Summation erzeugt werden. Doch seien im Sinne der Retardation nur diejenigen Quellpunkte berücksichtigt, welche innerhalb des Vergangenheitskegels von P liegen. Würde man die Quellpunkte in einer kontinuierlichen Linie verschmolzen annehmen, so müsste das totale Potential offenbar in jedem Aufpunkt singulär werden. Wir denken uns deshalb einen Grenzübergang ausgeführt. Derselbe lässt sich für alle stetig differenzierbaren und stetig belegten Weltlinien durchführen. Es genügt aber, ihn für die konstant belegte Ruhachse zu beschreiben. Dieselbe sei also mit einer nirgends abbrechenden äquidistanten Kette von Wirkungselementen bedeckt. Die Intervallbreite sei δ. Der durch einen vorgegebenen Aufpunkt gelegte Nullkegel der Vergangenheit teilt ein ganz bestimmtes dieser Intervalle im Verhältnis λ. Nun lassen wir δ unter Festhaltung von λ gegen Null konvergieren und behalten von der gegen ∞

strebenden Potentialsumme nur den Term höchster Ordnung in δ bei. Die Berechnung ergibt:

$$\Phi = \lim_{\delta \to 0} \frac{k}{2} \operatorname{Lg}\left(\frac{1}{\delta}\right) \cdot \frac{1}{r}.$$

Um also etwas Endliches zu erhalten, muss k gegen Null streben, so dass

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{k}{2} \operatorname{Lg}\left(\frac{1}{\delta}\right) = e \tag{4}$$

eine endliche Zahl wird.

Indem wir noch die Retardierung zum Ausdruck bringen, erhalten wir schliesslich

$$\Phi = \frac{e\,(ct - r)}{r}. \tag{5}$$

Um den gewonnenen Ausdruck in invarianter Weise auf krumme und nicht homogen belegte Weltlinien zu übertragen, benutzen wir die orthogonale Schreibweise. Wir setzen also für die Ortsvektoren der Aufpunkte P resp. Quellpunkte Q

$$\mathfrak{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, \sqrt{-1}\,ct) \tag{6}$$
$$\text{resp. } \mathfrak{Y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_1, y_2, y_3, \sqrt{-1}\,cu).$$

Ausserdem sei s die Bogenlänge der Quellinie, also

$$\left(\frac{d\mathfrak{Y}}{ds}\right)^2 = \mathfrak{Y}'^2 = -1. \tag{7}$$

An Stelle von (5) erhält man so den allgemeineren Ausdruck

$$\Phi = \frac{e(s)}{(\mathfrak{Y} - \mathfrak{X})\,\mathfrak{Y}'} \tag{8}$$

mit der Nebenbedingung

$$0 = (\mathfrak{X} - \mathfrak{Y})^2. \tag{9}$$

Wir stellen daneben den gebräuchlichen Ausdruck für das Vektorpotential

$$(\varphi_i) = \frac{e\,\mathfrak{Y}'}{(\mathfrak{Y} - \mathfrak{X})\,\mathfrak{Y}'}. \tag{8*}$$

Unsere Ableitung würde übrigens gestatten, auch in (8*) e als Funktion von s zu schreiben.

Im Sinne der von mir vorgeschlagenen Auffassung bedeutet die Ermittlung des Potentials (8) folgendes: Je dichter die Wirkungselemente liegen, desto mehr konzentriert sich die Summe der Einzelpotentiale auf ein kurzes Stück der Quellinie, das im betrachteten Quellpunkt endigt, um schliesslich nach vollzogenem Grenzübergang ganz auf den Quellpunkt zusammenzuschrumpfen. Gleichzeitig wird die ganze Potentialbewertung in der Grössenordnung um eine Stufe verschoben.

Es ist zu empfehlen, sich den ganzen Prozess auch beim Vektorpotential vorzustellen. In erster Linie müsste man k in (3) durch einen Vektor $\mathfrak{k}$ ersetzen und dann treten folgende Absonderlichkeiten auf:

1. Um (8*) zu erhalten, müsste man alle $\mathfrak{k}$ in die Quellinie hineindrehen. Anders ausgedrückt, die zu addierenden Elementarvektoren müssten im Sinne von Lie einen Elementverein bilden. Der einzelne Summand wäre also nicht eine unabhängige Elementargrösse.

2. Bei der darauffolgenden Summation hat man 4 Integrale zu bilden, für jede Koordinatenrichtung eines und man frägt sich unwillkürlich: Woher wissen die Teilchen, in welchem Koordinatensystem sie sich befinden? Wohl gemerkt: die Invarianz der Kraftgleichungen leidet nicht darunter. Aber möglicherweise sind sie deshalb so kompliziert geworden, weil sie diese Struktureigenschaft des Vektorpotentials kompensieren müssen.

Beim skalaren Potential (8) beachte man vor allem folgende Eigenschaft: Es ist nur bestimmt, wenn der Quellpunkt $\mathfrak{Y}$ *und* die Richtung $\mathfrak{Y}'$ gegeben sind. Der Richtungseffekt des Viererpotentials steckt also drin, nur in einfacherer Form.

IV. Die ponderomotorische Kraft.

Wir entwickeln jetzt einen Ausdruck für die Kraft, welche ein dauernd existierendes Teilchen (Quellpunktlinie) auf ein an einer bestimmten Weltstelle vorhandenes Teilchen ausübt. Dabei legen wir den Ausdruck (8) für das skalare Potential zusammen mit den Nebenbedingungen (7) und (9) zugrunde, also:

$$\boxed{\begin{array}{c} \Phi = \dfrac{e(s)}{(\mathfrak{Y}-\mathfrak{X})\,\mathfrak{Y}'} \\[2ex] (\mathfrak{X}-\mathfrak{Y})^2 = 0\,; \qquad \mathfrak{Y}'^2 = -1 \end{array}} \tag{10}$$

Bekanntlich ist es möglich, die Feldgesetze der relativistischen Elektrodynamik dadurch zu gewinnen, dass man die Gesetze des magnetischen Feldes auf invariante Weise in die Weltmetrik überträgt.

Nun überlegt man sich leicht, dass die hier befürwortete Theorie der Wirkungselemente auch gedeutet werden kann als invariante Übertragung der *elektrischen* Feldgesetze in die Weltmetrik. Als Ansatz für die ponderomotorische Viererkraft ergibt sich damit:

$$\mathfrak{K} = -\bar{e} \operatorname{grad} \Phi. \tag{11}$$

Das Verfahren zur Bestimmung von grad Φ findet man in der Literatur durchgeführt für den komplizierteren Fall des Vektorpotentials. Da die Sache für uns wichtig ist und wir ausserdem die Bezeichnung anders gewählt haben, sollen die Hauptpunkte der Berechnung geschildert werden.

1. Man benützt die Abkürzung

$$r \equiv (\mathfrak{Y} - \mathfrak{X})\,\mathfrak{Y}' = (\mathfrak{Y} - \mathfrak{X})\,\mathfrak{X}' \tag{12}$$

und erhält

$$\operatorname{grad} \Phi = \operatorname{grad}\left(\frac{e(s)}{r}\right) = -\frac{e(s)}{r^2} \operatorname{grad} r + \frac{e'(s)}{r} \operatorname{grad} s$$

denn s ist zufolge der zweiten Nebenbedingung in (10) auch eine Funktion des Aufpunktes.

Anschaulich: s ist der Parameterwert desjenigen Quellpunktes, in welchem der Nullkegel der Vergangenheit durch den Aufpunkt die Quellinie trifft. Daraus folgt leicht

$$\operatorname{grad} s = -\frac{\mathfrak{X} - \mathfrak{Y}}{r} \tag{13}$$

und damit fürs erste

$$\operatorname{grad} \Phi = -\frac{1}{r^2}\left\{e(s) \operatorname{grad} r + e'(s) \cdot (\mathfrak{X} - \mathfrak{Y})\right\} \tag{14}$$

2. Für die weitere Berechnung muss man r sowohl als Funktion von s und $\mathfrak{X}$ als auch von $\mathfrak{X}$ allein darstellen. Wir führen daher folgende verschiedene Bezeichnungen für r ein:

$$\left.\begin{aligned} r &= (\mathfrak{Y}(s) - \mathfrak{X})\,\mathfrak{Y}'(s) \equiv f(s, \mathfrak{X}) \\ r &= f[s(\mathfrak{X}), \mathfrak{X}] \equiv g(\mathfrak{X}) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

sowie die Ableitungssymbole

$$\frac{\partial r}{\partial s} \equiv \frac{\partial f}{\partial s}\,; \quad \frac{\partial r}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}\,; \quad \frac{d r}{d x_i} \equiv \frac{\partial g}{\partial x_i} \tag{16}$$

Dann folgt wegen (13):

$$\operatorname{grad} r = \left(\frac{d r}{d x_i}\right) = -\mathfrak{Y}' - \frac{\partial r}{\partial s} \cdot \frac{\mathfrak{X} - \mathfrak{Y}}{r}\,. \tag{17}$$

Durch Einsetzen in (14) erhält man:

$$\operatorname{grad} \Phi = \frac{e(s)}{r^2} \left\{ \mathfrak{Y}' + \left(\frac{\frac{\partial r}{\partial s}}{r} - \frac{e'(s)}{e(s)} \right) \cdot (\mathfrak{X} - \mathfrak{Y}) \right\} \tag{18}$$

3. Um aus dem gewonnenen Gradienten die Bahngleichungen zu bekommen, müssen wir schliesslich alles in Funktion von s darstellen. Dann aber muss aus (18) die partielle Ableitung $\partial r / \partial s$ entfernt werden. Wir benötigen also neben (15) eine dritte Darstellung von r:

$$r = f\,[s, \mathfrak{X}(s)] \equiv h(s)\,. \tag{19}$$

Wir setzen weiter

$$r' = \frac{dh}{ds} \tag{20}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} r' &= \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}\, x_\lambda' \\ &= \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial x_\lambda}\, x_\lambda' \\ &= \frac{\partial r}{\partial s} - y_\lambda'\, x_\lambda' \end{aligned}$$

Also:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = r' + \mathfrak{X}'\,\mathfrak{Y}' \tag{21}$$

und damit an Stelle von (18):

$$\operatorname{grad} \Phi = \frac{e(s)}{r^2} \left\{ \mathfrak{Y}' + \left(\frac{r' + \mathfrak{X}'\,\mathfrak{Y}'}{r} - \frac{e'}{e} \right) \cdot (\mathfrak{X} - \mathfrak{Y}) \right\} \tag{22}$$

Bei der Darstellung der ponderomotorischen Kraft gemäss (11) beschränken wir uns auf *konstante* e:

$$e(s) = \text{konstans} = e \tag{23}$$

und erhalten

$$\boxed{\mathfrak{K} = -\frac{e\,\bar{e}}{r^2} \left\{ \mathfrak{Y}' + \frac{r' + \mathfrak{X}'\,\mathfrak{Y}'}{r} \cdot (\mathfrak{X} - \mathfrak{Y}) \right\}} \tag{24}$$

Diese Formel liefert also die *ponderomotorische Kraft* einer der Weltlinie $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}(s)$ zugeordneten konstanten Ladung e auf ein Teilchen mit der konstanten Ladung $\bar{e}$.

Falls man sich auf den Standpunkt stellt, dass von dieser Kraft nur die Normalkomponente zur momentanen Richtung des bewegten Teilchens $\bar{e}$ dynamisch wirksam sein dürfe, hat man an Stelle von (24) zu setzen:

$$\boxed{\mathfrak{K} = -\frac{e\bar{e}}{r^2}\left\{\mathfrak{Y}' + \frac{r' + \mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'}{r}\cdot(\mathfrak{X}-\mathfrak{Y}) + \frac{r'}{\mathfrak{X}'^2}\cdot\mathfrak{X}'\right\}} \qquad (24')$$

Zum Vergleich setzen wir daneben die Formel für die „*elektrodynamische Kraft*“ nach MINOWSKI[2] *).

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{s}'\,\mathfrak{K} = {} & \frac{e\bar{e}}{r^2}(r' + \mathfrak{X}'\mathfrak{Y}')\left\{\mathfrak{Y}' + \frac{\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'}{r}\cdot(\mathfrak{X}-\mathfrak{Y})\right\} \\ & -\frac{e\bar{e}}{r^2}\{r\,\mathfrak{Y}'' + \mathfrak{X}'\mathfrak{Y}''\cdot(\mathfrak{X}-\mathfrak{Y})\}\end{aligned}} \qquad (24^*)$$

Wir spezialisieren noch alle drei Ausdrücke auf den Fall des *unendlich schweren Kerns.* Dann muss offenbar gesetzt werden $\mathfrak{Y}'' = 0$. Daraus folgt aber $r' + \mathfrak{X}'\mathfrak{Y}' = -1$ und man erhält somit folgende drei Ausdrücke:

$$\mathfrak{K} = -\frac{e\bar{e}}{r^2}\left\{\mathfrak{Y}' - \frac{1}{r}(\mathfrak{X}-\mathfrak{Y})\right\} \qquad (25)$$

$$\mathfrak{K} = -\frac{e\bar{e}}{r^2}\left\{\mathfrak{Y}' - \frac{1}{r}\cdot(\mathfrak{X}-\mathfrak{Y}) + \frac{r'}{\mathfrak{X}'^2}\cdot\mathfrak{X}'\right\} \qquad (25')$$

$$\bar{s}'\,\mathfrak{K} = -\frac{e\bar{e}}{r^2}\left\{\mathfrak{Y}' + \frac{\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'}{r}\cdot(\mathfrak{X}-\mathfrak{Y})\right\} \qquad (25^*)$$

Der durch Spezialisierung von (24) erhaltene Ausdruck (25) stellt *genau* die klassische Coulombkraft dar. Diese Feststellung mag Bedenken erwecken. Doch ist folgendes zu beachten. Sobald man dem Kern ein endliches Gewicht zuschreibt, wird auch die Quellinie gekrümmt und damit ändert sich die Kraftwirkung. Ausserdem bildet die Annahme der kontinuierlichen Verteilung der Wirkungselemente auf eine Weltlinie einen Grenzfall. Wenn

[2]) Für die Literatur verweise ich auf den Enzyklopädiebericht von W. PAULI: Relativitätstheorie, insbesondere S. 644ff.

*) $\bar{s}$ ist die zum Teilchen $\bar{e}$ gehörige Bogenlänge.

es überhaupt möglich ist, den Strahlungsprozess in die Dynamik einzubeziehen, so liefert dazu das Verhalten der einzelnen Wirkungselemente vielleicht eine bessere Handhabe.

Die Ermittlung des Potentials und damit der ponderomotorischen Kraft für zwei- und mehrdimensionale Mengen von Wirkungselementen scheint eigentümliche Schwierigkeiten zu bieten, falls man alle Elementardistanzen als von der gleichen Grössenordnung annimmt*). Nun zeigt aber die Erfahrung, dass die Abstände der Atome gross sind gegenüber ihren Wirkungsquerschnitten. Dem kann man Rechnung tragen, indem man die zeitartige Distanz der einzelnen Wirkungselemente als klein annimmt. Dann ist es möglich, die Wirkungselemente zuerst in einzelne Weltlinien zusammenzufassen und hernach die totale ponderomotorische Kraft aus den Kräften der einzelnen Weltlinien (Teilchen) additiv zusammenzusetzen.

V. Die korrespondierende Dynamik.

Schon durch die im vorigen Abschnitt vorgenommene Ermittlung einer ponderomotorischen Kraft ist angedeutet worden, dass wir beabsichtigen, unsere ursprünglich auf wellenmechanische Grundsätze begründete Auffassung korrespondenzmässig darzustellen. Das halte ich zwecks einer ersten Orientierung für beinahe unumgänglich. Die wellenmechanischen Berechnungen sind kompliziert und liefern dabei viele Feinheiten, die einen ersten Überblick erschweren.

Der wellenmechanischen Grundgleichung

$$\Box\, \Psi = \Phi \cdot \Psi \tag{2}$$

entspricht offenbar die „Energiegleichung“

$$\underline{\frac{1}{2}\, m\, c^2 \left(\frac{d\mathfrak{X}}{d\sigma}\right)^2 + V = W.} \tag{26}$$

Hierbei bedeutet σ einen Parameter von der Dimension einer Länge, der jedenfall mit der Zahl der auf die Weltlinie des Teilchens entfallenden Wirkungselemente zusammenhängen muss. Da beim Übergang von (2) nach (26) die Konstanten geändert werden, habe ich V an Stelle von Φ gesetzt. Um Missverständnisse zu vermeiden, füge ich noch hinzu, dass sich natürlich auch das in Abschnitt III berechnete Φ von dem in (2) auftretenden um eine multiplikative Konstante unterscheidet.

*) Die weitere Verwendbarkeit unseres skalaren Ansatzes wird wohl davon abhängen, ob möglich ist, einen brauchbaren Ausdruck für das Magnetfeld eines Stromes zu erhalten.

Die zu (26) gehörigen Bewegungsgleichungen lauten offenbar

$$m c^2 \frac{d^2 \mathfrak{X}}{d\sigma^2} = -\operatorname{grad} V. \tag{27}$$

Auf den ersten Blick scheint eine genaue Übertragung der Newton'schen Mechanik in die Weltmetrik vorzuliegen. Dem ist aber nicht so. Die das Potential erzeugenden „Massen" (die „Ursachen") sind hier im R_4 vorgegebene feste Wirkungszentren. Die „bewegten Massen" (die „Wirkungen") werden in *einen* Probekörper zusammengefasst. Wird derselbe irgendwo im Zukunftsgebiet eingesetzt, so beschreibt er eine Bahn. Diese Bahn ist nichts anderes als das korrespondenzmässige Analogon der Menge der bei vorgegebener Anfangslage mit grösster Wahrscheinlichkeit zu erwartenden Wirkungen. Ohne die an die Spitze der ganzen Untersuchung gestellten wellenmechanischen Grundsätze wäre also diese Dynamik vollkommen unverständlich. Objektiv genommen sind Ursachen und Wirkungen gleichartige Wirkungselemente. Subjektiv genommen müssen sie aber scharf auseinander gehalten werden vermöge der eigentümlichen Situation, in welcher sich der Erkennende befindet. Er will ja aus der Vergangenheit die Zukunft bestimmen, oder — allgemeiner ausgedrückt — aus einem Teil das Ganze rekonstruieren. Dies ist möglich, sofern oder soweit Naturgesetze existieren.

Es ist lehrreich sich zu überlegen, was eine wörtliche Übertragung der Newton'schen Mechanik bedeuten würde. V müsste eine Wechselwirkungsgrösse sein, also von den Koordinatendifferenzen zweier aufeinander bezogenen Teilchen abhängen. Damit würde also wieder das begrifflich unentwirrbare Problem der koexistierenden Phasen auftauchen. Als weitere Folge ergäbe sich wiederum ein „Trägheitsgesetz" und man könnte dann auf „Ruhe", d. h. Zeitlosigkeit transformieren. Damit hätte man eine 5-dimensionale „Galileitransformation" und das Spiel mit der richtigen Formulierung des Relativitätsprinzips könnte von neuem beginnen, ganz abgesehen davon, dass ein neuer Parameter aufgenommen werden müsste, um dessen Deutung man wohl verlegen wäre. Auf dieser Linie ist kein Ende abzusehen, wenn man sich nicht einmal entschliesst, den *absoluten* Standpunkt einzunehmen, den wir gleich zu Beginn für die weltmetrische Dynamik postuliert haben. Man darf vielleicht sagen, dass die *Relativität* von Raum und Zeit in der *Absolutheit* der Wirkung ein sehr befriedigendes Korrelat findet. Die Tatsache, dass zu einer bestimmten Zeit an einem bestimmten Ort eine Wirkung stattgefunden hat, lässt sich ja auf keine Weise wegtransformieren.

Schliesslich noch einige Bemerkungen zur formalen Verfassung unserer „Weltpunktdynamik“. Sie kann natürlich ohne weiteres durch Hamilton'sche Gleichungen zum Ausdruck gebracht werden. Nun wird die geometrische Deutung durch infinitesimale Berührungstransformationen — welcher in der klassischen Mechanik keine reale Bedeutung zukommt — und die damit verknüpfte Zusammenfassung aller zur selben Energiefunktion gehörigen Bahnen zu einem Büschel verständlich. Die wellenmechanische Lösung fasst eben viele Bahnen zusammen und erteilt ihnen überdies ein Wahrscheinlichkeitsgewicht. Es ist also anzunehmen, dass sich die Betrachtungen von SCHRÖDINGER[3]) in allen wesentlichen Punkten übertragen lassen.

Es ist sogar möglich, dass die Extremalprinzipien eine ganz konkrete Bedeutung gewinnen. Zum Beispiel erscheint das Prinzip von MAUPERTUIS formal unverändert in der Gestalt

$$\delta \int_A^B \sqrt{2\,(W - V)\, d\mathfrak{X}^2} = 0. \tag{28}$$

Nimmt man hier an, $\overrightarrow{A\,B}$ sei ein zeitartiger Vektor und setzt $V = 0$ (kräftefreie Bewegung), so resultiert die geodätische Verbindung von A nach B, also die Strecke $A\,B$. Nun beweist man leicht nach den Grundsätzen der Elementargeometrie, dass von allen zeitartigen Verbindungen zwischen A und B die Strecke $A\,B$ die *längste* ist. Man kann also hier die Frage aufwerfen, in welchem Umfange es wohl möglich sei, die Weltpunktdynamik einem *Prinzip der maximalen Wirkung* zu unterstellen.

VI. Schlussbemerkung.

Zusammenfassend kann man also feststellen, dass die auf das Potential

$$\Phi = \frac{\varepsilon}{c^2\,t^2 - x^2 - y^2 - z^2}$$

gegründete Weltpunktstatistik der relativistischen Elektrodynamik viel näher steht, als man auf den ersten Blick meinen könnte. Sie hat aber den Vorteil, logisch und anschaulich vollkommen durchsichtig zu sein. Die Frage ist nun, ob sie sich so ausgestalten lässt, dass sie auch numerisch befriedigende Ergebnisse liefert. Speziell: Genügt der skalare Ansatz für den weitern Ausbau

[3]) „Abhandlungen zur Wellenmechanik“, Leipzig 1927 (Verlag J. A. Barth).

oder muss die Entwicklung in Richtung des Spinorbegriffs gelenkt werden?

Was die mathematische Analyse des Spinorbegriffs betrifft, so möchte ich hier auf die Theorie der Quaternionenfunktionen von FUETER[4]) hinweisen. Die von diesem Autor gewonnenen linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung sind ja — abgesehen vom Vorzeichen der Metrik — offenbar mit den sogenannten Wellengleichungen des Neutrino äquivalent.

Die der oben formulierten physikalischen Fragestellung entsprechende mathematische Fragestellung lautet also folgendermassen: Sind für die Theorie der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ in 4 Dimensionen die Quaternionen „irreduzible Elementargrössen" oder reine Rechengrössen? Die entsprechende Frage für zwei Dimensionen ist schon lange entschieden: Die komplexen Zahlen $z = x + iy$ sind reine Rechengrössen.

---

[4]) „Commentarii Methematici Helvetici", Bd. 9, Heft 4, S. 321, wo die bis jetzt erschienenen Abhandlungen zitiert sind.